Université HENRI POINCARÉ NANCY 1

I.R.E.M. DE LORRAINE

DES QUOTIENTS

En 4ème et 3ème

Ce travail a été réalisé avec le soutien de la

M.A.F.P.E.N. de l'Académie de Nancy-Metz

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 3ème trimestre 1997
n° de la publication : 2-85406-157- 8
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Michel BONN

0,60 €

Les auteurs :

Martine GIMMILLARO

Catherine MAUREL

Annick REGNARD

Claude TIHA

Avant-propos

- Ce document est à destination des élèves , il peut être, tout ou partie, utilisé en classe de 3éme ou de 4ème, en parfaite conformité avec les programmes (1985 ou 1997). Il n'a pas vocation de remplacer le cours du Professeur, mais de faire le point sur les compétences indispensables pour la poursuite des acquisitions en mathématique en classe de 3ème. Les fiches traitent en termes d'application des règles de calcul sur les quotients, sans toutefois négliger le sens des concepts sous-jacents , mais sans jamais donner un statut unique ni aux objets mathématiques, ni aux interactions entre les divers fonctionnements mathématiques ou calculatoires. Il appartiendra au Professeur de varier les approches et d'instaurer les règles tant dans la découverte que dans la construction du sens, dans la conceptualisation des nombres et des opérations et dans l'approche arithmétique des diverses transformations d'écriture (emboîtement des diverses catégories de nombres, premiers pas vers une structuration raisonnable des objets arithmétiques que sont les nombres au collège). La plupart des compétences aiguisées dans les fiches sont de vrais prérequis indispensables à l'étude de nombreuses notions au programme de la classe de 3ème des collèges, et même à certains savoirs développés dans le programme de la classe de 4ème , en numérique et en géométrie, il appartiendra au professeur de structurer ces apprentissages dans le cadre de la stratégie globale qu'il entend développer dans sa classe tout au long de l'année.

Liste et objet des fiches:

Fiche 0	Changements d'écriture Ecriture d'un nombre entier sous la forme d' un produit de 2 ou plusieurs facteurs premiers ou non.
Fiche 1	Relations: produit et quotient associés A propos du sens de l'écriture fractionnaire- Equations associées
Fiche 2	Quotients égaux - simplification Diverses écritures d'un même quotient Calcul d' un terme d'un quotient
Fiche 3	Classer, comparer des quotients Ranger des quotients sur une droite numérique
Fiche 4	Comparer , encadrer des quotients de numérateur et dénominateur quelconques
Fiche 5	A propos du produit de 2 nombres en écriture fractionnaire ou non Nombres inverses

Fiche 6	Exercices de multiplication
Fiche 7	A propos de la division Diviser par un nombre fractionnaire ou non Inverse d'un quotient
Fiche 8	Où l'on reparle des extrêmes et des moyens D'une égalité de 2 quotients à une autre
Fiche 9	Quotients égaux et " ***Produit en croix*** " !!!...
Fiche 10	De l'égalité de 2 quotients à la résolution d'équation Calcul d'un terme dans une égalité de 2 quotients
Fiche 11	Des quotients en Géométrie Rapports de longueurs Partage d'un segment
Fiche 12	Des rapports de longueurs dans une figure géométrique. Exprimer un rapport de longueur sous forme d'un quotient Dans une application numérique, calculer une longueur.
Fiche 13	Des quotients à propos de la trigonométrie et de la moyenne géométrique
Fiche 14	Somme et différence de nombres en écriture fractionnaire Sommes généralisées - exercices
Fiche 15	Identités dites remarquables incluant des nombres en écriture fractionnaire ou non (Rappel) .
Fiche 16	Exercices de développement d'identités remarquables incluant des nombres fractionnaires ou non
Fiche 17	Exercices extraits des sujets du brevet des collèges (1985 - 1996) Opérations enchaînées incluant des nombres en écriture fractionnaire ou non

Produit : changements d'écriture	Calcul numérique	Quotient	Q0

Ces changements d'écriture sont utiles pour travailler sur les quotients.

Exemple : Ecrire 60 à l'aide d'un produit de facteurs entiers.
Cette décomposition doit faire apparaître le plus de facteurs possibles.

60=6x10 60=6x2x5 60=2x3x2x5	60=3x20 60=3x4x5 60x3x2x2x5	60=2x30 60=2x5x6 60=2x5x3x2	60=5x12 60=5x2x6 60=5x2x2x3

Quel que soit le "chemin parcouru", on obtient : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
ou en utilisant les puissances : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

❶ Décomposer de la même façon les nombres suivants, si c'est possible :

72 =	154 =	210 =
37 =	280 =	19 =
875 =	41 =	192 =

Remarque : on dit que 37, 19 et 41 sont des nombres premiers.

Donner les nombres premiers inférieurs à 50.

❷ Voici deux produits. Dans la colonne de droite, il faut indiquer les facteurs communs à ces deux produits.

1er produit	2ème produit	facteurs communs après décomposition
$2 \times 3 \times 5 \times 7$	$3 \times 5 \times 11$	
$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11$	$2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 13$	
$2^3 \times 3^5 \times 7^2$	$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$	
21×36	14×45	
35×72	90×28	

❸ Dans chaque membre de l'égalité, on complètera le produit donné afin d'obtenir l'égalité des deux produits.

On complètera avec le minimum de facteurs possibles et les plus petits possibles.

2 x 3 x 5 x	= 2 x 5 x 7 x	2 x 5 x 11 x	= 3 x 5 x 7 x
2 x 2 x 13 x	= 2 x 3 x 7 x	2 x 3 x 5 x 5 x	= 3 x 3 x 5 x 7 x
$2^3 \times 3^2 \times$	= 2 x 3 x 5 x	$5 \times 7^3 \times$	$= 2^4 \times 5 \times 7^2 \times$
4 x 9 x	= 6 x 10 x	14 x 27 x	= 21 x 6 x

Produits et quotients		Quotient	Q1

a, b et c sont 3 nombres non nuls.

si a est le produit de b et c, alors b est le quotient de a par c
c est le quotient de a par b

$$\boxed{\text{si } a = b\,c \text{ (ou } a = c\,b) \quad \text{alors } b = \frac{a}{c} \text{ et } c = \frac{a}{b}}$$

x, y et z sont 3 nombres non nuls

si x est le quotient de y par z alors y est le produit de x et z (qui s'écrit x z ou z x)
z est le quotient de y par x

$$\boxed{\text{si } x = \frac{y}{z} \quad \text{alors } y = x\,z \text{ et } z = \frac{y}{x}}$$

❶ A partir de l'égalité donnée, écrire deux nouvelles égalités sous la forme demandée :

$b = \frac{a}{c}$	$9 = \frac{63}{7}$				$k = \frac{1}{w}$		$t = \frac{3}{u}$
$a = b\,c$		$12 = 3 \times 4$		$x = 5y$		$p = 1 \times p$	
$c = \frac{a}{b}$			$v = \frac{d}{t}$				

❷ Compléter les égalités suivantes :

$\frac{9}{3} = ...$ $\quad 5 = \frac{....}{12}$ $\quad \frac{37}{....} = 1$ $\quad 25 = \frac{....}{1}$ $\quad 4 = \frac{....}{4}$

$11 = \frac{....}{4}$ $\quad \frac{28}{7} = ...$ $\quad 11 = \frac{....}{5}$ $\quad \frac{54}{6} = ...$ $\quad 1 = \frac{...}{3}$ $\quad 2{,}5 = \frac{...}{4}$

$\frac{26}{10} = ...$ $\quad 1{,}23 = \frac{....}{100}$ $\quad 0{,}8 = \frac{80}{...}$ $\quad 9{,}5 = \frac{....}{2}$ $\quad .... = \frac{11}{1}$

❸

rappel : $\frac{a}{b} = c$ et $\frac{a}{c} = b$ équivalent à $a = bc$

Compléter les égalités (on n'effectuera pas l'opération) :

$\frac{x}{4} = 9$ alors $x = 9 \times 4$ $\qquad \frac{a}{7} = 8$ alors $a = 8 \times 7$ $\qquad \frac{b}{\pi} = 9$ alors $b = 9\pi$

$\frac{x}{4} = 7{,}5$ alors $x =$ $\qquad \frac{a}{7} = 8{,}2$ alors $a =$ $\qquad 7{,}1 = \frac{k}{14}$ alors $k =$

$\frac{x}{4} = \frac{7}{5}$ alors $x = \frac{7}{5} \times$ $\qquad \frac{a}{7} = \frac{9}{11}$ alors $a =$ $\qquad \frac{y}{41} = \frac{8}{5}$ alors $y =$

$\frac{x}{4} = \frac{5}{11}$ alors $x =$ $\qquad \frac{a}{9} = \frac{10}{13}$ alors $a =$ $\qquad \frac{c}{12} = \frac{5}{11}$ alors $c =$

Comme dans l'exercice précédent, écrire l'égalité qui permet de calculer la valeur de la lettre.

$\frac{a}{3} = 17$	$\frac{b}{9} = 1{,}3$	$12 = \frac{e}{4}$	$\frac{c}{4} = \frac{5}{11}$	$\frac{d}{7} = \frac{11}{6}$
$3{,}5 = \frac{p}{5}$	$\frac{5}{12} = \frac{r}{2}$	$\frac{2}{13} = \frac{g}{7}$	$\frac{11}{3} = \frac{s}{4}$	$\frac{z}{11} = \frac{17}{3}$
$\frac{k}{6} = \frac{7}{13}$	$3{,}2 = \frac{m}{2}$	$\frac{y}{14} = \frac{3}{7}$	$19 = \frac{n}{10}$	$\frac{x}{5} = \frac{20}{17}$

Quotient : changement d'écriture	Calcul numérique	Quotient	Q2

Rappel : b et k sont deux nombres non nuls $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}}$

Règle n° 1 : Pour passer du quotient $\frac{a}{b}$ au quotient $\frac{a \times k}{b \times k}$, on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre k non nul.

Règle n° 2 : Pour passer du quotient $\frac{k \times a}{k \times b}$ au quotient $\frac{a}{b}$, on divise numérateur et dénominateur par un même nombre k non nul.

❶ Utilisation de la règle 1 pour écrire plusieurs quotients avec le même dénominateur.

a) Compléter les égalités suivantes :

$\frac{5}{3} = \frac{....}{12}$ $\frac{1}{6} = \frac{....}{18}$ $\frac{3}{7} = \frac{....}{21}$ $\frac{5}{8} = \frac{....}{24}$ $\frac{2}{11} = \frac{....}{55}$

b) Mettre, pour chaque série, les quotients au même dénominateur :

$\frac{5}{3}$ et $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{16}$ et $\frac{11}{8}$

$\frac{7}{3}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{6}$ $\frac{6}{5}$; $\frac{3}{10}$ et $\frac{13}{15}$

❷ Utilisation de la règle 2 pour simplifier des quotients.

En mathématiques, simplifier un quotient ou une fraction signifie qu'il faut trouver un quotient égal à celui-ci dont les numérateur et dénominateur sont deux entiers <u>les plus petits possibles.</u>

a) Compléter les égalités suivantes :

$\frac{15}{35} = \frac{....}{7}$ $\frac{28}{21} = \frac{4}{....}$ $\frac{12}{8} = \frac{....}{2}$ $\frac{9}{33} = \frac{....}{11}$

b) Simplifier les quotients suivants ; commencer par réécrire numérateur et dénominateur sous forme d'un produit de facteurs premiers (faire les derniers au dos de la feuille) :

$\frac{35}{49} =$ $\frac{12}{8} =$ $\frac{6}{9} =$ $\frac{15}{42} =$

$\frac{14}{16} =$ $\frac{20}{80} =$ $\frac{18}{33} =$ $\frac{42}{36} =$

$\frac{49}{14}$ $\frac{56}{72}$ $\frac{315}{378}$ $\frac{195}{195}$ $\frac{21 \times 3 \times 5}{2 \times 5 \times 9 \times 7}$ $\frac{4 \times 5 \times 7 \times 3}{6 \times 9 \times 5 \times 14}$ $\frac{2 \times 11}{55}$

Comparaison de quotients - classements		Quotient	Q3

❶ Classement de quotients de même numérateur.

```
0                                                                                  1
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----
```

- Placer sur la droite les nombres : $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{2}$

- Ecrire ces nombres par ordre croissant (utiliser le signe $<$)

- Ecrire ces nombres par ordre décroissant (utiliser le signe $>$)

Règle (à compléter)

Si deux quotients ont le même numérateur, le plus grand est celui qui

....

- Ecrire les quotients par ordre croissant : $\frac{13}{5}$, $\frac{13}{7}$, $\frac{13}{14}$, $\frac{13}{13}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{13}{9}$

- Vérifier l'ordre de ces quotients à la calculatrice

❷ Classement de quotients de même dénominateur.

```
0         1         2         3         4         5         6
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----
```

- Placer sur la droite les nombres : $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{4}{3}$

- Ecrire ces nombres par ordre croissant (utiliser le signe $<$)

- Ecrire ces nombres par ordre décroissant (utiliser le signe $>$)

Règle (à compléter)

Si deux quotients ont le même dénominateur, le plus grand est celui qui

....

- Ecrire les quotients par ordre croissant : $\frac{11}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{17}{9}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{3}{9}$

- Vérifier l'ordre de ces quotients à la calculatrice

Comparaison de quotients - classements		Quotient	Q4

❶ Classement de quotients par encadrements

Donner un encadrement de chaque quotient par deux nombres entiers consécutifs sous la forme proposée $1 \leq \frac{3}{2} < 2$.

$\frac{3}{2}$ / $\frac{1}{3}$ / $\frac{17}{6}$ / $\frac{96}{16}$ / $\frac{15}{4}$ / $\frac{8}{4}$ / $\frac{130}{25}$

Ecrire ces nombres par ordre croissant (utiliser le signe <) :

Ecrire ces nombres par ordre décroissant (utiliser le signe >) :

- Vérifier l'ordre de ces quotients à l'aide de la calculatrice.

❷ Classer des quotients de numérateurs et de dénominateurs quelconques.

a) Pour comparer les quotients : $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{3}$, on écrit des quotients de même dénominateur égaux aux quotients donnés (*voir fiche n° Q2 - réduction au même dénominateur*).

$4 \times 6 \times 5 = 120$ $\qquad$ $\frac{7}{4} = \frac{7 \times 30}{4 \times 30} = \frac{210}{120}$

(On aurait pu prendre 60 comme dénominateur commun).

Compléter : $\frac{9}{6} =$ $\qquad$ $\frac{7}{5} =$ $\qquad$ $\frac{5}{3} =$

- Ecrire ces nombres par ordre croissant (utiliser le signe <) :

- Ecrire ces nombres par ordre décroissant (utiliser le signe >) :

- Vérifier l'ordre de ces quotients à l'aide de la calculatrice.

b) Classer les nombres suivants par ordre croissant :

$\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ $\qquad$ puis $\frac{11}{4}$, $\frac{15}{16}$, 3, $\frac{25}{8}$, 1, $\frac{3}{2}$

Multiplication	Calcul numérique	Quotient	Q5

Tout résultat final doit être écrit sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.

1 - Produit d'un entier par un quotient

$7 \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{5} = \frac{21}{5}$ $\quad -\frac{7}{9} \times 5 = -\frac{7 \times 5}{9} = -\frac{35}{9}$ $\quad -\frac{1}{8} \times (-5) = \frac{1 \times 5}{8} = \frac{5}{8}$

$2 \times \frac{7}{8} = \frac{2 \times 7}{8} = \frac{2 \times 7}{2 \times 4} = \frac{7}{4}$ car il faut penser aux simplifications.

$$c \neq 0, \quad a \times \frac{b}{c} = \frac{a\ b}{c} \quad et \quad \frac{b}{c} \times d = \frac{b\,d}{c}$$

Exercice :

Calculer les expressions données sans oublier de simplifier quand c'est possible :

pour $x = \frac{2}{3}$	pour $x = 3$	pour $x = -\frac{3}{4}$	pour $x = -2$
$4x =$	$\frac{2}{5}x =$	$5x =$	$\frac{3}{5}x =$
$-6x =$	$-\frac{3}{4}x =$	$-7x =$	$-\frac{5}{8}x =$
$3x =$	$\frac{1}{3}x =$	$-4x =$	$\frac{2}{7}x =$

2 - Produit de deux quotients

$\frac{5}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{5 \times 3}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$ $\quad -\frac{2}{7} \times \frac{9}{7} = -\frac{2 \times 9}{7 \times 7} = -\frac{18}{49}$

$\frac{7}{3} \times \frac{15}{14} = \frac{7 \times 15}{3 \times 14} = \frac{7 \times 3 \times 5}{3 \times 2 \times 7} = \frac{5}{2}$ car il faut penser aux simplifications.

$$b \neq 0,\ d \neq 0\ ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{bd}$$

Exercices :

❶ Calculer les expressions données sans oublier de simplifier quand c'est possible :

Pour $x = \frac{2}{3}$	pour $x = -\frac{3}{4}$	pour $x = \frac{4}{5}$	pour $x = -\frac{5}{6}$
$\frac{4}{5}x =$	$\frac{3}{4}x =$	$\frac{2}{3}x =$	$\frac{3}{7}x =$
$\frac{3}{2}x =$	$-\frac{8}{3}x =$	$-\frac{3}{7}x =$	$-\frac{6}{5}x =$
$-\frac{9}{8}x =$	$\frac{20}{9}x =$	$\frac{15}{7}x =$	$-\frac{8}{15}x =$

❷ Compléter avec les résultats précédents :

	$\frac{1}{3} \times 3 =$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} =$	$-\frac{6}{5} \times \left(-\frac{5}{6}\right) =$
on dit que :	$\frac{1}{3}$ et 3 sont	$\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont	$-\frac{6}{5}$ et $-\frac{5}{6}$ sont

Multiplication	Calcul numérique	Quotient	Q 6

❸ Calculer et simplifier quand c'est possible :

1) $\frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$

2) $\frac{1}{6} \times \left(-\frac{5}{7}\right)$

3) $-\frac{2}{3} \times \left(-\frac{11}{4}\right)$

4) $-\frac{4}{3} \times \left(-\frac{9}{4}\right)$

5) $\frac{5}{6} \times (-12)$

6) $\frac{5}{3} \times \frac{7}{2} \times \frac{22}{35}$

7) $-\frac{3}{7} \times \left(-\frac{21}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)$

8) $-\frac{7}{18} \times \frac{8}{21} \times (-9)$

9) $\frac{3}{8} \times \frac{2}{9} \times \frac{-15}{4} \times \frac{4}{7}$

10) $-\frac{7}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{-5}{21}$

Division	Calcul numérique	Quotient	Q7

Diviser par un nombre, c'est multiplier par l'inverse de ce nombre.

Exemples **:**

$\frac{2}{3} : \frac{7}{4}$	On dit que :	$\frac{4}{7}$ est l'inverse de $\frac{7}{4}$ $\frac{7}{4}$ a pour inverse $\frac{4}{7}$ $\frac{7}{4}$ et $\frac{4}{7}$ sont des nombres inverses	on effectue : $\frac{2}{3} : \frac{7}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$
$\frac{9}{4} : 6$	On dit que :	$\frac{1}{6}$ est l'inverse de 6 6 a pour inverse $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ et 6 sont des nombres inverses	$\frac{9}{4} : 6 = \frac{9}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2 \times 3} = \frac{3}{8}$

$$\boxed{c \neq 0 \ ; \ b \neq 0 \qquad a : \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{a\,c}{b}}$$

$-5 : \frac{7}{3} = -5 \times \frac{3}{7} = -\frac{15}{7}$

$\dfrac{-2}{\frac{-1}{3}} = -2 \times (\frac{-3}{1}) = 6$

$\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{7}{5}} = \frac{4}{9} : \frac{7}{5} = \frac{4}{9} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{63}$

Calculer et donner l'écriture la plus simple possible :

1	$\frac{3}{4} : \frac{6}{5}$	9	$\dfrac{-9}{\frac{7}{3}}$
2	$2 : \frac{8}{3}$	10	$-\frac{9}{8} : \frac{4}{9}$
3	$-\frac{4}{7} : \frac{-8}{21}$	11	$\dfrac{\frac{28}{27}}{\frac{35}{9}}$
4	$-\frac{8}{3} : 2$	12	$\frac{8}{15} : \frac{12}{25}$
5	$\frac{5}{3} : \frac{5}{3}$	13	$\frac{14}{5} : (-\frac{21}{65})$
6	$-\frac{5}{3} : \frac{3}{5}$	14	$-\frac{2}{5} : \frac{8}{25}$
7	$\dfrac{-9}{\frac{11}{6}}$	15	$\dfrac{\frac{17}{-12}}{\frac{-34}{27}}$
8	$\frac{8}{3} : 6$	16	$-\frac{4}{9} : \frac{16}{27}$

Egalités de quotients	Calcul numérique	Quotient	Q 8

Remarque : Vos grand-parents ou vos parents ont appris que dans une telle égalité : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, les nombres a et d s'appellent les extrêmes et les nombres b et c s'appellent les moyens.

❶ On donne $\frac{6}{15}$, $\frac{40}{15}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{40}{16}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{16}{40}$, $\frac{16}{6}$, $\frac{15}{40}$

Donner chaque quotient avec une écriture décimale ou une fraction irréductible ; écrire ensuite les égalités existant entre ces quotients (il y en a 4).

On a choisi une égalité de départ. Expliquer par quel procédé on passe d'une égalité à l'autre.

égalité de départ	autre égalité trouvée	procédé
$\frac{6}{15} = \frac{16}{40}$	$\frac{40}{15} = \frac{16}{6}$	
$\frac{6}{15} = \frac{16}{40}$	$\frac{6}{16} = \frac{15}{40}$	
$\frac{6}{15} = \frac{16}{40}$	$\frac{15}{6} = \frac{40}{16}$	

❷ Complète ce tableau :

égalité de départ	procédé utilisé	nouvelle égalité
$\frac{15}{24} = \frac{35}{56}$	on échange les extrêmes	
$\frac{15}{24} = \frac{35}{56}$	on échange les moyens	
$\frac{15}{24} = \frac{35}{56}$	on prend les inverses	
$\frac{15}{24} = \frac{35}{56}$	on échange les extrêmes et on échange les moyens	

Quelle remarque peut-on faire ?

Vos parents et grand-parents apprenaient donc :

> *Dans une égalité de 2 quotients :*
> *– si l'on échange les extrêmes, on obtient une nouvelle égalité ;*
> *– si l'on échange les moyens, on obtient aussi une nouvelle égalité.*
> *Si 2 quotients sont égaux alors leurs inverses sont égaux.*

❸ Complète ce tableau en utilisant les règles vues auparavant :

deux quotients égaux	$\frac{14}{16} = \frac{35}{40}$	$\frac{15}{16} = \frac{x}{42}$	$\frac{15}{y} = \frac{35}{91}$	$\frac{12}{k} = \frac{30}{25}$	$\frac{9}{4} = \frac{12}{a}$
autre égalité de quotients					
3ème égalité de quotients					
4ème égalité de quotients					

Egalités de quotients

Calcul numérique	Quotient	Q 9

Rappel : Vos grand-parents ou vos parents ont appris la règle suivante :

Dans une égalité de 2 quotients : – si l'on échange les extrêmes, on obtient une nouvelle égalité ;
– si l'on échange les moyens, on obtient aussi une nouvelle égalité.
Si deux quotients sont égaux alors leurs inverses sont égaux.

❶ Compléter le tableau :

a, b, c et d sont 4 nombres non nuls.

quotients égaux	égalité donnée : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	on échange les moyens : — = —	on échange les extrêmes : — = —	égalité des inverses : — = —	simplification des quotients
réduction au même dénominateur					division des deux membres par le même nombre
comparaison des numérateurs					produits égaux

On obtient donc les règles suivantes :

> *Si deux quotients sont égaux, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*
>
> *Si deux quotients sont tels que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, alors ils sont égaux.*

Remarque : Parfois, calculer le produit des extrêmes et le produit des moyens est dit "calculer le produit en croix".

❷ Appliquer la première règle :

quotients égaux	$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$	$\frac{x}{7} = \frac{4}{21}$	$\frac{7}{x} = \frac{9}{y}$	$\frac{9}{t} = \frac{u}{5}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$	$\frac{9}{4} = \frac{k}{10}$	$\frac{u}{n} = \frac{1}{e}$
produits égaux							

❸ Utiliser la seconde règle pour reconnaître si deux quotients sont égaux ou non.

1er quotient	2ème quotient	produit des extrêmes	produit des moyens	conclusion
$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$			
$\frac{18}{45}$	$\frac{20}{50}$			
$\frac{6}{7}$	$\frac{70}{81}$			
$\frac{12}{15}$	$\frac{28}{35}$			
$\frac{12}{52}$	$\frac{3}{13}$			
$\frac{77}{35}$	$\frac{143}{65}$			
$\frac{14}{52}$	$\frac{3}{11}$			

Egalité de quotients et équations

Q10

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \arrow[d, shift left] & \\
\frac{6}{3} = \frac{16}{8} \arrow[r, shift left] & 6 \times 8 = 3 \times 16 \arrow[u, shift left] \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] & \frac{8}{16} = \frac{3}{6} \arrow[l, shift left] \\
 & \frac{8}{3} = \frac{16}{6} \arrow[u, shift left] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \arrow[d, shift left] & \\
\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \arrow[r, shift left] & ad = bc \arrow[u, shift left] \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] & \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \arrow[l, shift left] \\
 & \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \arrow[u, shift left] &
\end{tikzcd}$$

1) Transformer ces égalités de quotients en autres égalités :

	Par l'échange des moyens	par l'échange des extrêmes	par l'écriture des inverses	produits égaux
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$				
$\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$				
	$\frac{7}{11} = \frac{5}{d}$			
			$\frac{3}{a} = \frac{8}{7}$	
				$3 \times p = x \times 7$

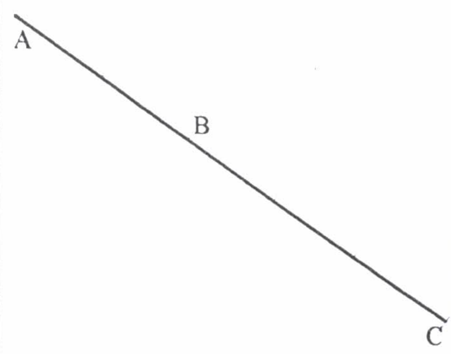
2) Dans les équations suivantes, écrites sous la forme d'une égalité de quotients, il faut chercher le nombre x ; ce nombre s'appelle la quatrième proportionnelle.

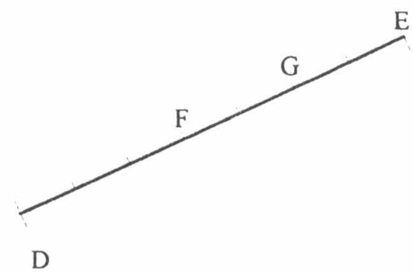
On te propose plusieurs techniques ; **choisis** celle qui te convient.

Equation	résolution		solution de l'équation
ex 1 : $\frac{5}{6} = \frac{8}{x}$	on échange les extrêmes (ou les moyens)	$\frac{x}{6} = \frac{8}{5}$ et alors $x = \frac{8}{5} \times 6$	$\frac{48}{5}$ ou 9,6
ex 2 : $\frac{4}{x} = \frac{7}{5}$	on écrit les produits égaux	$7x = 4 \times 5$ ou $x = \frac{20}{7}$	$\frac{20}{7}$
$\frac{x}{8} = \frac{2}{3}$			
$\frac{5}{6} = \frac{x}{7}$			
$\frac{9}{x} = \frac{12}{5}$			
$\frac{11}{4} = \frac{33}{a}$			
$\frac{8}{13} = \frac{y}{5}$			
$\frac{17}{b} = \frac{1}{3}$			
$\frac{1}{d} = \frac{12}{\pi}$			
$\frac{8}{9} = \frac{4}{y}$			

Rapports de longueurs		Quotient	Q11

❶ Observer les différentes égalités de la première colonne.
Ecrire des égalités de même type dans chaque colonne.





$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{5}$	$\frac{BC}{BA} =$	$\frac{FD}{FE} = -$	$\frac{ED}{EG} = -$	$\frac{RS}{RT} = -$	$\frac{ST}{SR} = -$
$\frac{AC}{AB} = \frac{5}{2}$					
$\frac{AB}{2} = \frac{AC}{5}$					
$5\,AB = 2\,AC$					
$AB = \frac{2}{5}\,AC$					
$AC = \frac{5}{2}\,AB$					

❷ Compléter les égalités suivantes et construire une figure illustrant chaque égalité (sur une autre feuille) :

cas 1	$AB = \frac{3}{4}\,AC$ donc $\frac{AB}{AC} =$ $B \in [AC]$	cas 5	$3\,DG = 7\,DE$ donc $\frac{DE}{DG} =$ $G \in [DE]$
cas 2	$RV = \frac{2}{9}\,RT$ donc $\frac{RT}{RV} =$ $R \in [VT]$	cas 6	$\frac{MN}{5} = \frac{MP}{4}$ donc $\frac{MN}{MP} =$ $P \in [MN]$
cas 3	$CA = \frac{5}{2}\,CD$ donc $\frac{CA}{CD} =$ $C \in [AD]$	cas 7	$8\,FG = 7\,FA$ donc $\frac{FG}{FA} =$ $F \in [AG]$
cas 4	$ME = \frac{1}{6}\,MH$ donc $\frac{MH}{ME} =$ $M \in [HE]$	cas 8	$IJ = \frac{IK}{3}$ donc $\frac{IK}{IJ} =$ $J \in [IK]$

Rapports de longueurs	Nombres entiers	Quotients	Q 12

A - Soit un rectangle ABCD

1 - Placer le point Y sur le segment [AB] tel que $\frac{AY}{AB} = \frac{3}{5}$; exprimer $\frac{YA}{YB}$ sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers.

Exprimer AB en fonction de YA

2 - Placer le point X sur le segment [AD] tel que XA = 3 XD ; exprimer $\frac{AX}{AD}$ sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers, puis AD en fonction de AX.

3 - Placer le point Z sur le segment [BC] tel que $\frac{ZB}{ZC} = \frac{AY}{AB}$

Exprimer $\frac{ZC}{BC}$ sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers, puis CZ en fonction de BC.

B - On veut dessiner une figure exacte lorsque XA = YA

a - Exprimer $\frac{AB}{AD}$

b - Pour placer le point V sur le segment [CD] tel que $\frac{CZ}{VD} = \frac{AB}{VC}$, exprimer $\frac{VC}{VD}$ en fonction de CZ et AB, puis CZ en fonction de BC.

Calculer $\frac{VC}{VD}$ (on remarquera que $\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AD}$)

c - Faire une figure exacte, si AB = 60 mm, calculer YA, XD, ZB, VD, puis vérifier que la figure satisfait aux conditions de l'énoncé.

Rapports de longueurs	Nombres entiers	Quotients	Q 13

Activité : Moyenne géométrique

- Tracer un triangle ABC rectangle en A ; de hauteur [AH]. Dans ce triangle nous avons les égalités d'angles suivantes :

$$\text{angle } (\widehat{ABC}) = \text{angle } (\widehat{HAC}) = \hat{\imath}$$
$$\text{angle } (\widehat{ACB}) = \text{angle } (\widehat{HAB}) = \hat{e}$$

1) Exprimer de 3 manières différentes cos $\hat{\imath}$; puis cos $\hat{e}$.

Ecrire les égalités de quotients qui en découlent. Exprimer HA^2 en fonction de HB et HC

(On pourra utiliser le produit : $\frac{AH}{AC} \times \frac{AH}{AB}$)

Qu'en conclure pour $\frac{HC.HB}{HA^2}$ puis pour HA^2 ?

2) Traduire cette propriété du triangle rectangle en complétant la phrase suivante :

Dans un triangle ABC rectangle en A, de hauteur [AH], ... = ... x . . . .

On dit que AH est la moyenne géométrique des 2 nombres HB, HC.

Les mathématiciens ont démontré que la réciproque de cette règle est vraie. C'est à dire que, dans un triangle ABC de hauteur [AH] , si la relation $HB . HC = HA^2$ est vérifiée alors ce triangle est rectangle en A.

3) Construire le triangle ABC de hauteur [AH], tel que HA = 4 cm, HC = 2 cm et HB = 8 cm

Vérifier que HA est la moyenne géométrique des nombres 2 et 8.

Calculer BC, AB puis AC et vérifier que ce triangle est bien rectangle en A.

4) Construire le triangle MNP rectangle en P, de hauteur PH tel que HM = 4 cm et HN = 9 cm.

Calculer NP, MP et vérifier que les résultats satisfont l'égalité de Pythagore.

5) Construire le triangle GFL rectangle en F de hauteur [FH] avec FH = 8 cm et GH = 4 cm

Calculer la valeur des angles $\hat{G}$ et $\hat{L}$ de ce triangle.

Sommes algébriques de quotients	Calculs numériques	Quotient	Q 14

Exemples :

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$

b) $\frac{7}{9}-\frac{11}{9}=-\frac{4}{9}$

c) $2+\frac{5}{7}=\frac{2 \times 7}{1 \times 7}+\frac{5}{7}=\frac{14}{7}+\frac{5}{7}=\frac{14+5}{7}=\frac{19}{7}$

d) $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{2 \times 4}{3 \times 4}+\frac{5 \times 3}{4 \times 3}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{23}{12}$

e) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{7}{6}=\frac{3 \times 15}{4 \times 15}+\frac{2 \times 12}{5 \times 12}-\frac{7 \times 10}{6 \times 10}=\frac{45}{60}+\frac{24}{60}-\frac{70}{60}=\frac{45+24-70}{60}=-\frac{1}{60}$

Rappels :
- on n'ajoute ou ne retranche que des **fractions de même dénominateur.**
- on simplifie le résultat quand c'est possible.

❶ Calculer et donner le résultat le plus simple possible (ne pas oublier que dans certains calculs, on peut faire des regroupements astucieux).

a) $\frac{8}{3}-\frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{7}+\frac{1}{7}+\frac{3}{7}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}$

e) $-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}$

f) $3+\frac{3}{4}$

g) $\frac{17}{2}-1$

h) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

k) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}$

l) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{7}$

❷ Même exercice que le précédent (à faire sur une autre feuille).

m) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}$

n) $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$

p) $-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$

r) $-\frac{5}{4}-\frac{1}{3}+\frac{5}{4}+\frac{4}{9}$

s) $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}$

t) $\frac{7}{9}+2-\frac{8}{3}$

u) $\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)$

v) $\frac{4}{7}-\frac{2}{11}+1$

w) $\frac{3}{4}+\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}$

x) $\frac{3}{5}-\left(-\frac{2}{15}\right)-\frac{7}{30}$

y) $\frac{1}{3}+\frac{7}{12}-\frac{8}{15}$

z) $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}+\frac{1}{12}-1$

Développement - Récapitulatif exercices	Calcul littéral	Quotient	Q 15

1° CAS

$(a+b)^2$
$\left(\frac{1}{3}y+\frac{5}{7}\right)^2$

a^2	+	$2ab$	+	b^2
$\left(\frac{1}{3}y\right)^2$		$2\times\frac{1}{3}y\times\frac{5}{7}$		$\left(\frac{5}{7}\right)^2$
$\frac{1}{9}y^2$		$\frac{10}{21}y$		$\frac{25}{49}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$\left(\frac{1}{3}y+\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{1}{9}y^2 + \frac{10}{21}y + \frac{25}{49}$

2°CAS

$(a-b)^2$
$\left(\frac{4}{5}y-3\right)^2$

a^2	-	$2ab$	+	b^2
$\left(\frac{4}{5}y\right)^2$		$2\times\frac{4}{5}y\times 3$		3^2
$\frac{16}{25}y^2$		$\frac{24}{5}y$		9

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$\left(\frac{4}{5}y-3\right)^2 = \frac{16}{25}y^2 - \frac{24}{5}y + 9$

3° CAS

$(a-b)(a+b)$ ou $(a+b)(a-b)$		
$\left(\frac{2}{3}y-5\right)\left(\frac{2}{3}y+5\right)$	ou	$\left(\frac{2}{3}y+5\right)\left(\frac{2}{3}y-5\right)$

a^2	-	b^2
$\left(\frac{2}{3}y\right)^2$	-	5^2
$\frac{4}{9}y^2$	-	25

$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
$\left(\frac{2}{3}y-5\right)\left(\frac{2}{3}y+5\right) = \left(\frac{2}{3}y+5\right)\left(\frac{2}{3}y-5\right) = \frac{4}{9}y^2 - 25$

Développement - Récapitulatif exercices	Calcul littéral	Quotient	Q 15 b

1° CAS

$(a+b)^2$

a^2		$2ab$		b^2
	+		+	

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2°CAS

$(a-b)^2$

a^2		$2ab$		b^2
	-		+	

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3° CAS

$(a-b)(a+b)$ ou $(a+b)(a-b)$

a^2		b^2
	-	
	-	

$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Développement	Calcul littéral	Quotient	Q 16

Développement :

$\left(\frac{1}{4} + x\right)^2$

$\left(\frac{x}{2} + 7\right)^2$

$\left(\frac{7}{5} x - 1\right)^2$

$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

$\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{5}\right)^2$

$\left(\frac{4}{5} - \frac{x}{5}\right)^2$

$\left(\frac{5}{6} x - \frac{3}{5}\right)^2$

$\left(3 - \frac{x}{4}\right)^2$

$\left(\frac{2}{3} x - 1\right)\left(\frac{2}{3} x + 1\right)$

$\left(x + \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)$

$\left(2 x + \frac{3}{7}\right)^2$

$\left(3 x - \frac{5}{2}\right)^2$

$\left(11 + \frac{x}{7}\right)\left(11 - \frac{x}{7}\right)$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

$\left(\frac{5}{8} + x\right)^2$

Nombres fractionnaires	Calcul numérique	Quotient	Q 17

Fiche expert

Des calculs donnés au brevet des collèges.
Donner chaque résultat sous la forme fractionnaire la plus simple.

$A = \frac{7}{4} - \frac{2}{5} \times \frac{7}{8}$	$B = \frac{15}{16} : \frac{9}{4} + \frac{1}{12}$
$C = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}$	$D = \dfrac{8 + \frac{2}{3}}{8 - \frac{2}{3}}$
$E = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-1 + \frac{3}{5}\right)$	$F = \frac{4}{9} - 2 \times \frac{13 + 3}{13 - 3}$
$G = \left(\frac{11}{3} + \frac{11}{10}\right) : \left(\frac{11}{6} + \frac{11}{4}\right)$	$H = \frac{3}{4} \times (-2)^3 - (-3)^2$
$I = 18 - 16 : \frac{4}{7}$	$J = \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{2}$
$K = 11 - \frac{7}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{8}{5}$	$L = 3 - 5\left(\frac{1}{5} - 1\right)$
$M = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \times \frac{21}{9} - \frac{12}{20}$	$N = \frac{5}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{25}{6}$
$P = \left(\frac{4}{7}\right)^2 - \frac{5}{3} \times \frac{12}{7}$	$R = \dfrac{1}{\frac{7}{10} - \frac{9}{13}}$
$S = \frac{5}{3} - \frac{16}{45} \times \frac{35}{8}$	$T = \dfrac{-\frac{1}{5} - \frac{2}{7}}{1 - \frac{15}{49}}$
$U = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(\frac{-4}{9}\right)^3$	$V = \frac{3}{7} - \frac{5}{7} \times \left(5 - \frac{4}{5}\right)$