Université HENRI POINCARÉ NANCY 1

I.R.E.M. DE LORRAINE

17 fiches de

CALCUL FRACTIONNAIRE

en 3ème

Programme 1998

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université Henri Poincaré - NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 2ème trimestre 2000
n° de la publication : 2-85406-167- 5
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Bernard ANDRÉ

SOMMAIRE

DIVISEURS ET MULTIPLES

1) Compléter le tableau suivant le modèle :

$24 = 3 \times 8$	24 est multiple de 8 24 est multiple de 3	8 est un diviseur de 24 3 est un diviseur de 24	24 est divisible par 8 24 est divisible par 3
$56 = 7 \times 8$			
	33 est multiple de 11 33 est multiple de		
			30 est divisible par 6 30 ....
		7 est un .... de 28 .... est un .... de 28	
$36 = ... \times ...$			

2) Voici une liste de nombres : 27 - 42 - 75 - 110 - 99 - 54 - 105 - 450 - 47 - 525 - 765

a) Quels sont les multiples de 2 ?

b) Quels sont les multiples de 3 ?

c) Quels sont les multiples de 5 ?

d) Quels sont les multiples de 9 ?

3) Compléter le tableau qui suit avec oui ou non ; si oui, justifier avec une égalité.

	a = 63 diviseurs de a	b = 27 diviseurs de b	a - b = ... diviseurs de a - b	a + b = ... diviseurs de a + b
1	oui car 1 x 63 = 63			
2	non			
3				
4				
5				
6				
7				
8				

$36 = 63 - 27 = 9 \times 7 - 9 \times 3 = 9 \times (7 - 3) = 9 \times 4$ et $90 = 63 + 27 = 9 \times 7 + 9 \times 3 = 9 \times (7 + 3) = 9 \times 10$

On constate que : 63 et 27 sont multiples de 9 ainsi que leur somme 90 et leur différence 36.
63 et 27 sont multiples de .. ainsi que ....
.... sont multiples de .. ainsi que ....

Ecrire (au dos de la feuille) les factorisations qui permettent de vérifier ces trois phrases.

a, b et n étant des entiers naturels tels que a > b, il semble que :
si a et b sont multiples de n alors leur somme a + b et leur différence a - b sont multiples de n.

Essayer de démontrer cette affirmation avec votre professeur.

QUOTIENTS : changements d'écriture

Rappel : b et k sont deux nombres non nuls, $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

Règle n°1 : Pour passer du quotient $\frac{a}{b}$ au quotient $\frac{a \times k}{b \times k}$, on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre k non nul.

Règle n°2 : Pour passer du quotient $\frac{a \times k}{b \times k}$ au quotient $\frac{a}{b}$, on divise numérateur et dénominateur par un même nombre k non nul.

❶ *Utilisation de la règle 1*

a) Compléter les égalités suivantes :

$\frac{5}{3} = \frac{....}{12}$ $\quad \frac{1}{6} = \frac{....}{18}$ $\quad \frac{3}{7} = \frac{....}{21}$ $\quad \frac{5}{8} = \frac{....}{24}$ $\quad \frac{2}{11} = \frac{....}{55}$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{....}{12}$

b) Ecrire les quotients avec le même dénominateur (ou les réduire au même dénominateur).

fractions données	$\frac{5}{3}$ et $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{5}$	$\frac{9}{16}$ et $\frac{11}{8}$	$\frac{7}{3}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{6}$	$\frac{6}{5}$, $\frac{3}{10}$ et $\frac{13}{15}$
dénominateur commun choisi	12				
nouvelles écritures	$\frac{20}{12}$ et $\frac{3}{12}$				

❷ *Utilisation de la règle 2*

a) Compléter les égalités suivantes :

$\frac{15}{35} = \frac{....}{7}$ $\quad \frac{72}{90} = \frac{....}{30}$ $\quad \frac{28}{21} = \frac{4}{....}$ $\quad \frac{42}{18} = \frac{21}{....}$ $\quad \frac{9}{33} = \frac{....}{11}$ $\quad \frac{12}{8} = \frac{....}{....}$

b) Simplifier les quotients qui suivent par étapes successives en utilisant les caractères de divisibilité et les tables de multiplication.

$\frac{42}{105} =$ $\qquad \frac{378}{630} =$

$\frac{910}{1430} =$ $\qquad \frac{136}{616} =$

$\frac{774}{822} =$ $\qquad \frac{20}{80} =$

Comment être sûr que l'on ne peut plus simplifier ?

P.G.C.D.

❶ *Diviseurs communs*

Recherche 1 :

$36 = 1 \times 36$	1 et 36 sont diviseurs de 36	
$36 = 6 \times 6$	6 est diviseur de 36	
$36 = 2 \times 18$	2 et 18 sont...........................	le nombre 36 a neuf diviseurs
$36 = 3 \times ..$	.. et .. sont	
$36 = .. \times ..$	.. et .. sont	

$24 = 8 \times 3$	8 et 3 sont diviseurs de 24	
$24 = 6 \times 4$	6 et	
$24 = .. \times ..$	.. et	le nombre 24 a huit diviseurs
$24 = .. \times ..$	.. et	

24 et 36 ont des diviseurs communs. Lesquels ?
Quel est le plus grand de ces diviseurs communs ?

*On l'appelle le **Plus Grand Commun Diviseur** et on le note **PGCD.*** ex : PGCD (24 ; 36)=12

Recherche 2 :
Ecrire les diviseurs de 20 :
Ecrire les diviseurs de 45 : donc PGCD (20, 45) =

Recherche 3 :
Ecrire les diviseurs de 17 :
Ecrire les diviseurs de 77 : donc PGCD (17, 77) =

*On dit que 17 et 77 sont **premiers entre eux.***

Dire que deux nombres sont premiers entre eux signifie que leur PGCD est 1.

❷ Exercices (recherche à faire sur une autre feuille)

Voici six nombres : 75 - 42 - 30 - 77 - 39 - 21

a) Quel est le PGCD de75 et 30 ?
Quel est le PGCD de 42 et 21 ?
Quel est le PGCD de 77 et 39 ?

b) Ecrire les couples de nombres premiers entre eux parmi les nombres précédents.

❸ On veut trouver le PGCD de 129 et 137

Rappel de la fiche 1 :
Le PGCD de 137 et 129 est un diviseur de 137 et 129 ; il divise aussi leur différence 8.
Les diviseurs de 8 étant 1, 2, 4 et 8, on vérifie rapidement que 1 est le seul diviseur commun à 129 et 137.

Recherche PGCD (180, 225).
Ce nombre divise 180 et 225 ; alors il divise 180, 225 et 45
alors il divise 45, 180 et 135
alors il divise 45, 135 et 90
alors il divise 45, 90 et 45
alors il divise 45 donc PGCD (180, 225) = 45

Remarques : - *Cette méthode de calcul de différence permet de montrer que deux nombres sont premiers entre eux.*

- *Quand deux nombres sont premiers entre eux, on ne peut plus simplifier le quotient de ces deux nombres : la fraction obtenue est **irréductible**.*

P.G.C.D. (suite)

❶ *Une autre méthode pour trouver le P.G.C.D.*

Exemple 1 :

$225 = 180 \times 1 + 45$

$180 = 45 \times 4 + 0$

On en déduit que 45 est le PGCD de 225 et 180

Exemple 2 :

$77 = 1 \times 39 + 38$

$39 = 1 \times 38 + 1$ le PGCD de77 et 39 est 1 : les nombres sont **premiers entre eux**.

$38 = 1 \times 38 + 0$

Remarque : on aurait déjà pu le déduire dès la deuxième ligne puisque le reste de la division euclidienne est 1.

> Cette méthode de divisions successives est appelée algorithme d' Euclide. L'algorithme s' arrête lorsque le reste est nul ; le PGCD est donc l'avant dernier reste.

Utilise la méthode vue pour trouver PGCD (45, 20) ; PGCD (77, 17) ; PGCD (24, 36) ; PGCD (75, 30) ; PGCD (129, 137) ; PGCD (210, 525)
puis PGCD (37352 , 5766) ; PGCD (1085, 837)

❷ *Utilisation du PGCD pour simplifier*

a) Exemple :

$\frac{210}{525} = \frac{42}{105} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$

Ou tout simplement : le PGCD de210 et 525 est 105 alors $\frac{210}{525} = \frac{210 : 2}{525 : 5} = \frac{2}{5}$; on obtient la fraction irréductible.

> Pour obtenir une fraction irréductible, on divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

b) Utiliser les résultats précédents pour simplifier quand c'est possible.

$\frac{45}{20}$ $\frac{17}{77}$ $\frac{5768}{37352}$

$\frac{75}{20}$ $\frac{129}{137}$

$\frac{24}{36}$ $\frac{525}{210}$ $\frac{1085}{837}$

c) Rendre les fractions suivantes irréductibles :

$\frac{180}{132}$

$\frac{3172}{915}$

$\frac{675}{825}$

SOMMES ALGEBRIQUES DE QUOTIENTS

Exemples :

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$

b) $\frac{7}{9}-\frac{11}{9}=-\frac{4}{9}$

c) $\frac{5}{7}+2=\frac{5}{7}+\frac{2\times7}{1\times7}=\frac{5}{7}+\frac{14}{7}=\frac{19}{7}$

d) $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{5\times3}{4\times3}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{23}{12}$

e) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{7}{6}=\frac{3\times15}{4\times15}+\frac{2\times12}{5\times12}-\frac{7\times10}{6\times10}=\frac{45}{60}+\frac{24}{60}-\frac{70}{60}=\frac{45+24-70}{60}=\frac{-1}{60}=-\frac{1}{60}$

Rappels : - on n'ajoute ou ne retranche que des fractions de même dénominateur.
- on simplifie le résultat quand c'est possible.

Exercices :

1) Calculer et donner le résultat le plus simple possible (ne pas oublier que dans certains calculs, on peut faire des regroupements astucieux).

a) $\frac{8}{3}-\frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{7}+\frac{1}{7}+\frac{3}{7}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}$

e) $-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}$

f) $3-\frac{3}{4}$

g) $\frac{7}{3}-1$

h) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

i) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}$

j) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{7}$

2) Même exercice que le précédent (à faire sur une autre feuille)

k) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}$

l) $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$

m) $-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$

n) $-\frac{5}{4}-\frac{1}{3}+\frac{5}{4}+\frac{4}{9}$

p) $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}$

q) $\frac{7}{9}+2-\frac{8}{3}$

r) $\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-(-\frac{3}{2})$

s) $\frac{4}{7}-\frac{2}{11}+1$

t) $\frac{3}{4}+(-\frac{2}{3})-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}$

u) $\frac{3}{5}-(-\frac{2}{15})-\frac{7}{30}$

v) $\frac{1}{3}+\frac{7}{12}-\frac{8}{15}$

w) $\frac{3}{10}+\frac{2}{15}+\frac{1}{12}-1$

MULTIPLICATION

Tout résultat final doit être écrit sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.

1) Produit d'un entier par un quotient

Rappel : $7\times\frac{3}{5}=\frac{7\times3}{5}=\frac{21}{5}$ $\quad -\frac{7}{9}\times5=-\frac{7\times5}{9}=-\frac{35}{9}$ $\quad -\frac{1}{8}\times(-5)=\frac{1\times5}{8}=\frac{5}{8}$

$2\times\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{2\times7}{8}=-\frac{2\times7}{2\times4}=-\frac{7}{4}$ car on a pensé à simplifier.

$$\boxed{c\neq0\ ,\ a\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}\quad\text{et}\quad\frac{b}{c}\times a=\frac{ba}{c}}$$

Exercice :
Calculer les expressions données, sans oublier de les simplifier quand c'est possible.

Pour $x=\frac{2}{3}$	pour $x=3$	pour $x=-\frac{3}{4}$	pour $x=-2$
$4x=$	$\frac{2}{5}x=$	$5x=$	$\frac{3}{5}x=$
$-6x=$	$-\frac{3}{4}x=$	$-7x=$	$-\frac{5}{8}x=$
$3x=$	$\frac{1}{3}x=$	$-4x=$	$\frac{2}{7}x=$

2) Produit de deux quotients

Rappel : $\frac{5}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{5\times3}{2\times7}=\frac{15}{14}$ $\quad -\frac{2}{7}\times\frac{9}{7}=-\frac{2\times9}{7\times7}=-\frac{18}{49}$

$\frac{7}{3}\times\frac{15}{14}=\frac{7\times15}{3\times14}=\frac{7\times3\times5}{3\times2\times7}=\frac{5}{2}$ car on a pensé à simplifier.

$$\boxed{b\neq0\ ,\ d\neq0\ ;\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

Exercices :
1) Calculer les expressions données sans oublier de les simplifier quand c'est possible.

Pour $x=\frac{2}{3}$	pour $x=-\frac{3}{4}$	pour $x=\frac{4}{5}$	pour $x=-\frac{5}{6}$
$\frac{4}{5}x=$	$\frac{3}{4}x=$	$\frac{2}{3}x=$	$\frac{3}{7}x=$
$\frac{3}{2}x=$	$-\frac{8}{3}x=$	$-\frac{3}{7}x=$	$-\frac{6}{5}x=$
$-\frac{9}{8}x=$	$\frac{20}{9}x=$	$\frac{15}{7}x=$	$-\frac{8}{15}x=$

2) Compléter avec les résultats précédents :

	$\frac{1}{3}\times3=$	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=$	$-\frac{5}{6}\times(-\frac{6}{5})=$
on dit que :	$\frac{1}{3}$ et 3 sont………	$\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont…………	$-\frac{5}{6}$ et $-\frac{6}{5}$ sont…………..

MULTIPLICATION (suite)

Calculer et simplifier quand c'est possible :

Partie 1 :

$A=\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}$

$B=\frac{1}{6}\times(-\frac{5}{7})$

$C=-\frac{2}{3}\times(-\frac{11}{4})$

$D=-\frac{4}{3}\times(-\frac{9}{4})$

$E=\frac{5}{6}\times(-12)$

$F=\frac{5}{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{22}{35}$

$G=-\frac{3}{7}\times(-\frac{21}{5})\times(-\frac{4}{3})$

$H=-\frac{7}{18}\times\frac{8}{21}\times(-9)$

$I=\frac{3}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{-15}{4}\times\frac{4}{7}$

$J=-\frac{7}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{-5}{21}$

Partie 2 :

$K=\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{2\sqrt{3}}{5}$

$L=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times(-\frac{5}{\sqrt{6}})$

$M=\frac{-7}{4}\times(-\frac{5}{\sqrt{7}})$

$N=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\times(-\frac{7}{\sqrt{3}})$

$P=\frac{\sqrt{2}}{3}\times(-7)\times\frac{\sqrt{2}}{5}$

$Q=\frac{\sqrt{7}}{18}\times\frac{9}{\sqrt{21}}\times2\sqrt{3}$

IDENTITES REMARQUABLES

1er cas

$(a+b)^2$
$\left(\frac{1}{3}y+\frac{5}{7}\right)^2$

a^2		$2ab$		b^2
$\left(\frac{1}{3}y\right)^2$	+	$2\times\frac{1}{3}y\times\frac{5}{7}$	+	$\left(\frac{5}{7}\right)^2$
$\frac{1}{9}y^2$		$\frac{10}{21}y$		$\frac{25}{49}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$\left(\frac{1}{3}y+\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{1}{9}y^2+\frac{10}{21}y+\frac{25}{49}$

2ème cas

$(a-b)^2$
$\left(\frac{4}{5}y-3\right)^2$

a^2		$2ab$		b^2
$\left(\frac{4}{5}y\right)^2$	−	$2\times\frac{4}{5}y\times 3$	+	3^2
$\frac{16}{25}y^2$		$\frac{24}{5}y$		9

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$\left(\frac{4}{5}y-3\right)^2 = \frac{16}{25}y^2-\frac{24}{5}y+9$

3ème cas

$(a+b)(a-b)$ ou $(a-b)(a+b)$
$\left(\frac{2}{3}y+5\right)\left(\frac{2}{3}y-5\right)$ ou $\left(\frac{2}{3}y-5\right)\left(\frac{2}{3}y+5\right)$

a^2		b^2
$\left(\frac{2}{3}y\right)^2$	−	5^2
$\frac{4}{9}y^2$		25

$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
$\left(\frac{2}{3}y+5\right)\left(\frac{2}{3}y-5\right) = \left(\frac{2}{3}y-5\right)\left(\frac{2}{3}y+5\right) = \frac{4}{9}y^2-25$

IDENTITES REMARQUABLES

1^{er} cas

$(a + b)^2$

a^2	+	$2ab$	+	b^2

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2^{eme} cas

$(a - b)^2$

a^2	−	$2ab$	+	b^2

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3^{eme} cas

$(a + b)(a - b)$ ou $(a - b)(a + b)$

a^2	−	b^2

$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

IDENTITES REMARQUABLES

Effectuer les calculs demandés :

$$\left(\frac{1}{4}+x\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{2}+7\right)^2$$

$$\left(\frac{7}{5}x-1\right)^2$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{x}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{6}{5}x-\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\left(3-\frac{x}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}x-1\right)\left(\frac{2}{3}x+1\right)$$

$$\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

$$\left(2x+\frac{3}{7}\right)^2$$

$$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(11+\frac{x}{7}\right)\left(11-\frac{x}{7}\right)$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{5}{8}+2x\right)^2$$

DIVISION

Diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse.

Exemples :

$\frac{2}{3} : \frac{7}{4}$	On dit que :	$\frac{4}{7}$ est l'inverse de $\frac{7}{4}$ $\frac{7}{4}$ a pour inverse $\frac{4}{7}$ $\frac{7}{4}$ et $\frac{4}{7}$ sont des nombres inverses	On effectue : $\frac{2}{3} : \frac{7}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$
$\frac{9}{4} : 6$	On dit que :	$\frac{1}{6}$ est l'inverse de 6 6 a pour inverse $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ et 6 sont des nombres inverses	On effectue : $\frac{9}{4} : 6 = \frac{9}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ (car on a simplifié)

$$c \neq 0 \quad ; \quad b \neq 0 \qquad a : \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$-5 : \frac{7}{3} = -5 \times \frac{3}{7} = -\frac{15}{7}$

$\dfrac{-2}{\frac{-1}{3}} = -2 \times \left(\frac{-3}{1}\right) = 6$

$\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{7}{5}} = \frac{4}{9} : \frac{7}{5} = \frac{4}{9} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{63}$

Calculer et donner l'écriture la plus simple possible.

1	$\frac{3}{4} : \frac{6}{5}$	9	$-\frac{9}{8} : \frac{4}{9}$
2	$2 : \frac{8}{3}$	10	$\frac{18}{15} : \frac{12}{25}$
3	$-\frac{4}{7} : \frac{-8}{21}$	11	$\frac{14}{5} : (-\frac{21}{65})$
4	$-\frac{8}{3} : 2$	12	$-\frac{2}{5} : \frac{8}{25}$
5	$\frac{5}{3} : \frac{5}{3}$	13	$-\frac{5}{3} : \frac{3}{5}$
6	$\dfrac{-9}{\frac{11}{6}} =$	14	$\dfrac{\frac{-9}{7}}{3} =$
7	$\dfrac{\frac{28}{27}}{\frac{35}{9}} =$	15	$\dfrac{\frac{17}{-12}}{\frac{-34}{27}} =$
8	$\frac{8}{6} : 6$	16	$-\frac{4}{9} : \frac{16}{27}$

PRODUITS , QUOTIENTS ET EQUATIONS

a, b et c sont trois nombres non nuls.

Si a est le produit de b et c, alors b est le quotient de a par c
c est le quotient de a par b

$$\text{si } a = bc \text{ (ou } a = cb\text{)} \quad \text{alors } b = \frac{a}{c} \quad \text{et } c = \frac{a}{b}$$

x, y et z sont trois nombres non nuls.

Si x est le quotient de y par z, alors y est le produit de x et z (qui s'écrit xz ou zx)
z est le quotient de y par x

$$\text{si } x = \frac{y}{z} \quad \text{alors} \quad y = x \times z \quad \text{et} \quad z = \frac{y}{x}$$

1) A partir de l'égalité donnée, écrire deux nouvelles égalités sous la forme demandée :

$b = \frac{a}{c}$	$9 = \frac{63}{7}$				$k = \frac{1}{w}$		$t = \frac{3}{u}$
$a = bc$		$12 = 4 \times 3$		$x = 5y$		$p = 1 \times p$	
$c = \frac{a}{b}$			$v = \frac{d}{t}$				

2) Compléter les égalités suivantes :

$\frac{9}{3} = \ldots$ $\qquad 5 = \frac{\ldots}{12}$ $\qquad \frac{37}{\ldots} = 1$ $\qquad 25 = \frac{\ldots}{1}$ $\qquad 4 = \frac{\ldots}{4}$

$11 = \frac{\ldots}{4}$ $\qquad \frac{28}{7} = \ldots$ $\qquad 11 = \frac{\ldots}{5}$ $\qquad \frac{54}{6} = \ldots$ $\qquad 2{,}5 = \frac{\ldots}{4}$

$\frac{26}{10} = \ldots$ $\qquad 1{,}23 = \frac{\ldots}{100}$ $\qquad 0{,}8 = \frac{8}{\ldots}$ $\qquad 9{,}5 = \frac{\ldots}{2}$ $\qquad \ldots = \frac{11}{1}$

3) *rappel* : $\frac{a}{b} = c$ et $\frac{a}{c} = b$ équivalent à $a = bc$

α) Compléter les égalités (on n'effectuera pas les opérations).

$\frac{x}{4} = 9$ alors $x = 9 \times 4$

$\frac{x}{4} = 7{,}5$ alors $x = \ldots \times 4$

$\frac{x}{4} = \frac{7}{5}$ alors $x = \frac{7}{5}\ \ldots\ \ldots$

$\frac{x}{4} = \frac{5}{11}$ alors $x = \ldots\ \ldots\ \ldots$

$\frac{a}{7} = 8$ alors $a = 8 \times 7$

$\frac{a}{7} = 8{,}2$ alors $a =$

$\frac{a}{7} = \frac{9}{11}$ alors $a =$

$\frac{a}{9} = \frac{10}{13}$ alors $a =$

$\frac{b}{\pi} = 9$ alors $b = 9 \times \pi$

$7{,}1 = \frac{k}{14}$ alors $k =$

$\frac{y}{41} = \frac{5}{11}$ alors $y =$

$\frac{c}{12} = \frac{5}{11}$ alors $c =$

β) Comme dans l'exercice précédent, écrire l'égalité qui permet de calculer la valeur de la lettre :

$\frac{a}{3} = 17$ $\qquad 3{,}5 = \frac{p}{5}$ $\qquad \frac{k}{6} = \frac{7}{13}$

$\frac{b}{9} = 1{,}3$ $\qquad \frac{5}{12} = \frac{r}{2}$ $\qquad 3{,}2 = \frac{m}{2}$

$12 = \frac{c}{4}$ $\qquad \frac{2}{13} = \frac{g}{7}$ $\qquad \frac{y}{14} = \frac{3}{7}$

$\frac{c}{4} = \frac{5}{11}$ $\qquad \frac{11}{3} = \frac{s}{4}$ $\qquad 19 = \frac{n}{10}$

$\frac{d}{7} = \frac{11}{6}$ $\qquad \frac{z}{11} = \frac{17}{3}$ $\qquad \frac{x}{5} = \frac{20}{17}$

EGALITES DE QUOTIENTS ET EQUATIONS

$$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

$$\uparrow\downarrow$$

$$\boxed{\frac{6}{3}=\frac{16}{8}} \rightleftarrows \boxed{6\times 8=16\times 3} \rightleftarrows \boxed{\frac{8}{16}=\frac{3}{6}}$$

$$\uparrow\downarrow$$

$$\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\uparrow\downarrow$$

$$\boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{d}} \rightleftarrows \boxed{ad=bc} \rightleftarrows \boxed{\frac{d}{b}=\frac{c}{a}}$$

$$\uparrow\downarrow$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

1) Transformer ces égalités de quotients en autres égalités :

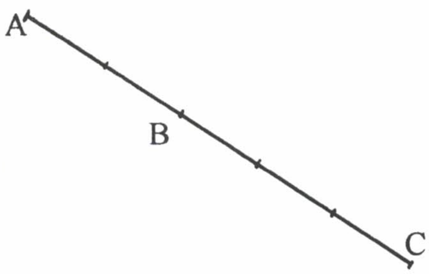
	Par l'échange des « moyens »	Par l'échange des « extrêmes »	Par l'écriture des inverses	Produits égaux
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$ad=bc$
$\frac{3}{7}=\frac{15}{35}$				
	$\frac{7}{11}=\frac{5}{d}$			
			$\frac{8}{y}=\frac{3}{7}$	
				$3\times p=x\times 2$

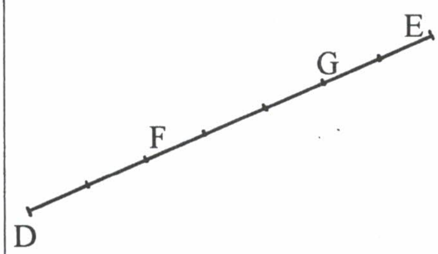
2) Dans les équations suivantes, écrites sous la forme d'une égalité de quotients, il faut chercher le nombre x ; ce nombre s'appelle la quatrième proportionnelle.
On te propose plusieurs techniques ; choisis celle qui te convient.

Equation	Résolution		Solution de l'équation
Ex 1 : $\frac{5}{6}=\frac{8}{x}$	On échange les « extrêmes »	$\frac{x}{6}=\frac{8}{5}$ et $x=\frac{8}{5}\times 6$	$\frac{48}{5}$ ou 9,6
Ex 2 : $\frac{4}{x}=\frac{7}{5}$	On écrit les produits égaux	$7x=4\times 5$ et $x=\frac{20}{7}$	$\frac{20}{7}$
$\frac{x}{8}=\frac{2}{3}$			
$\frac{5}{6}=\frac{x}{7}$			
$\frac{9}{x}=\frac{12}{5}$			
$\frac{11}{4}=\frac{33}{a}$			
$\frac{8}{13}=\frac{c}{5}$			
$\frac{17}{b}=\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{d}=\frac{12}{\pi}$			
$\frac{8}{9}=\frac{4}{z}$			

RAPPORTS DE LONGUEURS

1) Observer les différentes égalités de la première colonne. Ecrire des égalités de même type dans chaque colonne.





$\frac{AB}{AC}=\frac{2}{5}$	$\frac{BC}{CA}=$	$\frac{FD}{FE}=$	$\frac{ED}{EG}=$	$\frac{RS}{RT}=$	$\frac{ST}{SR}=$
$\frac{AC}{AB}=\frac{5}{2}$					
$\frac{AB}{2}=\frac{AC}{5}$					
$5AB=2AC$					
$AB=\frac{2}{5}AC$					
$AC=\frac{5}{2}AB$					

2) Pour illustrer chaque égalité, construire un segment et placer les points ; compléter les égalités de la dernière colonne.

Cas 1	$AB=\frac{2}{9}AC$ $B\in[AC]$		$\frac{AB}{AC}=$
Cas 2	$VT=\frac{4}{3}VR$ $T\in[VR)$		$\frac{VT}{VR}=$
Cas 3	$CA=\frac{5}{2}CD$ $A\in[CD)$		$\frac{CA}{CD}=$
Cas 4	$ME=\frac{1}{6}MH$ $E\in[MH]$		$\frac{MH}{ME}=$

EQUATIONS EN LIAISON AVEC LE THEOREME DE THALES

I) *A partir de l'égalité de deux rapports, trouver la valeur exacte de la longueur inconnue.*

Exemple 1 : $\frac{AM}{7} = \frac{3}{5}$

La résolution par l'une des méthodes proposée dans la fiche 12 donne comme solution :

$AM = \frac{3 \times 7}{5}$ soit $AM = \frac{21}{5}$ ou AM = 4,2

Exemple 2 : $\frac{8}{IJ} = \frac{3}{4}$

La résolution donne comme solution : $IJ = \frac{8 \times 4}{3}$ soit $IJ = \frac{32}{3}$

Attention : dans ce cas, il n'y a pas d'écriture décimale de la valeur exacte de IJ.

Exercice :

$\frac{OP}{9} = \frac{5}{2}$	$\frac{8}{3} = \frac{12}{EF}$	$\frac{6}{7} = \frac{RS}{10}$

II) *A partir de l'égalité de trois rapports, trouver les valeurs exactes des longueurs inconnues.*

Exemple : $\frac{5}{6} = \frac{AK}{9} = \frac{3}{IJ}$ Il faut résoudre les deux équations : $\frac{5}{6} = \frac{AK}{9}$ et $\frac{5}{6} = \frac{3}{IJ}$

$\frac{5}{6} = \frac{AK}{9}$ donne $AK = \frac{5 \times 9}{6}$ et $\frac{5}{6} = \frac{3}{IJ}$ donne $IJ = \frac{3 \times 6}{5}$

soit après simplification $AK = \frac{15}{2}$ ou $IJ = 3{,}6$

ou $AK = 7{,}5$

Remarque : il est conseillé de reprendre le rapport exact donné pour résoudre chaque équation plutôt que d'utiliser la première solution trouvée.

Exercice :

$\frac{6}{RS} = \frac{4{,}8}{3} = \frac{OT}{5}$	$\frac{6}{AE} = \frac{AB}{13{,}5} = \frac{5{,}4}{9}$	$\frac{8}{11} = \frac{MN}{3} = \frac{NP}{12{,}1}$

EQUATIONS, EN LIAISON AVEC LA TRIGONOMETRIE

1) Ecrire le produit ou le quotient qui permettra de calculer la longueur inconnue. (Tous les angles donnés sont aigus).

$\sin \widehat{C} = \dfrac{AB}{7}$ $\qquad$ $\sin \widehat{O} = \dfrac{8}{OM}$ $\qquad$ $\cos \widehat{E} = \dfrac{5{,}7}{EF}$

$AB =$ $\qquad$ $OM =$ $\qquad$ $EF =$

$\tan \widehat{F} = \dfrac{GH}{6}$ $\qquad$ $\tan \widehat{R} = \dfrac{4{,}2}{RS}$ $\qquad$ $\cos \widehat{G} = \dfrac{KL}{4}$

$GH =$ $\qquad$ $RS =$ $\qquad$ $KL =$

2) *Rappel des propriétés trigonométriques* :

Si α est la mesure en degrés d'un angle aigu, alors on a vu que :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad et \quad (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

En utilisant ces formules, compléter le tableau suivant avec les **valeurs exactes** :

sin α	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{13}$		$\frac{22}{122}$	0,6		$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{4}{5}$		$\frac{15}{17}$	$\frac{60}{61}$		$\frac{24}{25}$	
tan α		$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{15}$				

Cette partie sera utilisée pour les calculs.

EQUATIONS EN LIAISON AVEC AGRANDISSEMENT ET REDUCTION

Rappel : *Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k (k >0) :*
- *les longueurs sont multipliées par k*
- *les aires sont multipliées par k²*
- *les volumes sont multipliés par k³*

Compléter les tableaux qui suivent avec les valeurs exactes (simplifiées si besoin est).
Dans chaque tableau, les mesures sont données avec la même unité.

Rapport	k	$\frac{2}{3}$		2,5		$\frac{8}{7}$
Agrandissement ou **Réduction**						
Longueur initiale	L	27	11		12	
Nouvelle longueur	L'		2200	15	16	y

Rapport	k	$\frac{2}{3}$			1,2	$\frac{8}{7}$
	k^2		$\frac{1}{400}$			
Agrandissement ou **Réduction**						
Aire initiale	A		640	23	30	a
Nouvelle aire	A'	24		575		

Rapport	k	$\frac{2}{3}$	5	10^{-4}		$\frac{8}{7}$
	k^3				$10^{\cdots}$	
Agrandissement ou **Réduction**						
Volume initial	V	162		$3{,}1\times10^{10}$	0,7	z
Nouveau volume	V'		700		700	

Cette partie peut servir pour les calculs ……

NOMBRES FRACTIONNAIRES
Des calculs donnés au brevet

Fiche expert

Donner chaque résultat sous la forme fractionnaire la plus simple.

$A=\frac{7}{4}-\frac{2}{5}\times\frac{7}{8}$	$B=\frac{15}{16}:\frac{9}{4}+\frac{1}{12}$
$C=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{6}$	$D=\dfrac{8+\frac{2}{3}}{8-\frac{2}{3}}$
$E=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\left(-1+\frac{3}{5}\right)$	$F=\frac{4}{9}-2\times\frac{13+3}{13-3}$
$G=\left(\frac{11}{3}+\frac{11}{10}\right):\left(\frac{11}{6}+\frac{11}{4}\right)$	$H=\frac{3}{4}\times(-2)^3-(-3)^2$
$I=18-16:\frac{4}{7}$	$J=\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{2}$
$K=11-\frac{7}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{8}{5}$	$L=3-5\left(\frac{1}{5}-1\right)$
$M=\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\times\frac{21}{9}-\frac{12}{21}$	$N=\frac{5}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{25}{6}$
$P=\left(\frac{4}{7}\right)^2-\frac{5}{3}\times\frac{12}{7}$	$R=\dfrac{1}{\frac{7}{10}-\frac{9}{13}}$
$S=\frac{5}{3}-\frac{16}{45}\times\frac{35}{8}$	$T=\dfrac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{7}}{1-\frac{15}{49}}$
$U=\left(\frac{3}{2}\right)^4\times\left(\frac{-4}{9}\right)^3$	$V=\frac{3}{7}-\frac{5}{7}\times\left(5-\frac{4}{5}\right)$

TITRE : 18 fiches de calcul fractionnaire en 3 ème

AUTEURS : -GIMMILARO Martine
- MAUREL Catherine
- REGNARD Annick

PUBLIC VISE : Elèves ; enseignants
Age : 14 – 15 ans
Niveau : 3 ème

RESUME : Le document est une reprise du fichier : « Des quotients en 4 ème et 3 ème ». Il a été adapté aux seuls élèves de 3 ème, en conformité avec le programme paru en 1998.
Son but essentiel est de rappeler les règles nécessaires pour le calcul sur les quotients tout en introduisant la nouvelle partie arithmétique.

THEMES ABORDES :

- PGCD et fractions irréductibles
- Somme de quotients
- Produit de quotients
- Quotient de quotients
- Equations : recherche de la 4ème proportionnelle
  utilisation de ces calculs en géométrie

MOTS CLES : agrandissement – aire – calcul – dénominateur – développer – différence – diviseur – division – égalité – factorisation – fraction – identités remarquables – inverse – irréductible – longueurs – multiples – multiplication – numérateur – PGCD – premier – produit – quotient – rapport réduction – simplifier – somme – Thalès – trigonométrie – volume.