I.R.E.M. de Lorraine
Groupe « Probabilités et Statistiques »

L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES AU COLLEGE ET AU LYCEE

EXEMPLES EUROPEENS ET PROPOSITIONS

2001

I.S.B.N. 2-85406-168-3

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université Henri Poincaré - NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 2ème trimestre 2001
n° de la publication : 2-85406-168- 3
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Bernard ANDRÉ

L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES AU COLLEGE ET AU LYCEE

EXEMPLES EUROPEENS ET PROPOSITIONS

Composition du groupe :

Isabelle BONI (jusqu'en 1999)
Farida CHAIBAI
Bernard PARZYSZ (jusqu'en 1999)
Daniel VAGOST
Jacques VERDIER

PRÉFACE

ENFIN ! Voici tout (ou presque) ce que nous avions toujours voulu savoir sur l'enseignement des probabilités et de la statistique en Europe, sans oser le demander (à qui le demander, d'ailleurs ?). Je ne dispose pour l'instant que d'une version encore incomplète de la brochure que vous avez en mains dans sa version définitive, mais déjà je sais que je vais l'utiliser dans mon enseignement à l'IUFM. L'équipe de l'IREM de Lorraine a donc terminé ce travail fort utile auquel j'avais naguère participé jusqu'à mon (lâche) abandon il y a deux ans pour cause de mutation[1], en le complétant d'ailleurs par une étude sur les représentations des élèves relatives au domaine du hasard et des probabilités, ainsi que par de pertinentes propositions d'enseignement. A l'époque (1997), nous savions vaguement qu'ailleurs en Europe un enseignement de l'aléatoire venait d'être mis en place au niveau du collège (ou de son équivalent) dans divers pays, et nous avions envie d'en savoir plus. Il faut dire que la Lorraine, plaque tournante européenne à proximité de l'Allemagne, du Luxembourg, de la Belgique et même de la Suisse, est un lieu favorable à l'émergence de telles idées. Au départ, nous souhaitions ouvrir une fenêtre vers l'extérieur dans le but de voir ce qui était en train de se passer hors de nos frontières, avec l'idée qu'il y aurait sans doute des enseignements à en tirer pour faire évoluer l'enseignement français dans le domaine de l'aléatoire. Les programmes qui ont depuis paru chez nous ont certes pris en compte de façon conséquente cette dimension au niveau du lycée, mais ce que nous visions était en fait plutôt le collège, en cherchant à établir les bases d'une progression cohérente et substantielle qui serait étendue à l'ensemble de l'enseignement secondaire[2]. Vouloir mettre l'accent sur ce domaine à la fin des études secondaires nous semblait nécessaire mais un peu tardif, car nous avions déjà pu nous rendre compte que des conceptions incomplètes (voire erronées) sur le hasard avaient déjà eu le temps de s'installer chez les élèves de Seconde.

A la lecture de cette brochure (et ce n'est pas là son moindre intérêt), je me suis aussi rendu compte qu'y sont posées, plus ou moins en filigrane, quelques questions essentielles telles que celles-ci :

---

[1] Apparemment, les Lorrains ne m'en ont pas trop tenu rigueur, puisqu'ils m'ont gentiment demandé de rédiger cette préface.

[2] Des recherches commencent d'ailleurs à être entreprises sur les possibilités de mener un tel enseignement au niveau de la fin du collège, et déboucheront sans doute bientôt sur des propositions concrètes.

Quelles recherches peut-on mettre en œuvre pour avoir accès aux conceptions "initiales" des élèves entrant au collège en ce qui concerne l'aléatoire ? Le fait qu'avec un dé le 6 paraisse plus difficile à obtenir que les autres points, l'application de la loi des grands nombres aux "petits" nombres, l'équiprobabilité attribuée d'office à tout ensemble de modalités commencent à être connus (et nous en trouvons confirmation dans le présent travail), mais il y a sans nul doute d'autres lièvres à débusquer, qui sont susceptibles de s'ériger en obstacles à une démarche de modélisation des phénomènes aléatoires.

Quelle place donner aux nouveaux outils d'enseignement (les fameux "TICE") dans une telle démarche ? Et plus particulièrement : la simulation d'une expérience aléatoire peut-elle se substituer à la réalisation effective de cette expérience ? Ou bien ce point de départ "matériel" est-il indispensable à l'initiation d'une démarche de modélisation qui passera par la notion de protocole d'expérimentation reproductible et aboutira finalement au concept théorique d'expérience aléatoire ? Autre question : comment gérer "l'effet boîte noire" de la touche random de la calculatrice et/ou de la fonction aléa de l'ordinateur ? Soit, pour faire simple : comment amener les élèves à leur faire confiance ?

Quelle formation, initiale et continuée, donner en probabilités et en statistique aux professeurs des lycées et collèges pour qu'ils soient à même, non seulement d'assurer réellement un tel enseignement, mais aussi (pourquoi pas ?) d'y prendre quelque plaisir ? Ce n'est pas par un "saupoudrage" de quelques jours qu'on arrivera à faire apparaître les enjeux et les intérêts véritables de cet enseignement, tant du point de vue de la culture scientifique que de celui de la formation de l'individu et du citoyen[1].

Bien entendu, ces quelques questions, qui ne se prétendent pas originales, ne sauraient trouver de réponse définitive dans le cadre d'une simple brochure, mais elles auront peut-être ceci de stimulant de pouvoir susciter parmi les équipes IREM (et en particulier, je l'espère, celle de l'IREM de Lorraine) de nouveaux travaux tout aussi passionnants que celui-ci. C'est là tout le mal que je souhaite à mes ex-collègues (et, je l'espère, toujours amis).

Bernard Parzysz

le 29 mai 2001

[1] Les commentaires, aussi variés que fantaisistes, lus et entendus en période électorale à propos des sondages nous le rappellent sans cesse.

INTRODUCTION

En 1997, l'IREM de Lorraine mettait en place notre groupe de recherche, sur le thème « L'enseignement des probabilités et des statistiques dans divers pays européens ». Son but était de recenser les objectifs de cet enseignement dans ces pays, aux niveaux correspondants à nos classes de collège et lycées. L'idée était de se pencher aussi bien sur les programmes officiels que sur les manuels utilisés.

Au fur et à mesure de l'avancement de notre travail, nous nous sommes intéressés en priorité à l'enseignement des probabilités plutôt qu'à celui de la statistique.
Le « tour d'horizon » d'un grand nombre de pays (y compris hors U.E., comme la Russie) que nous vous proposons dans la première partie de cette brochure n'est pas exhaustif : nous avons recherché en priorité les pays où l'enseignement paraissait le plus intéressant (à notre point de vue), ce qui nous a amenés à ne pas présenter les curricula de certains autres (comme la Pologne, la Slovaquie, etc.)[1].
Pour certains pays, en particulier l'Espagne qui nous semblait exemplaire, nous avons même présenté de façon très détaillée (avec de nombreux extraits de manuels) la façon dont les probabilités étaient introduites au niveau du collège.

Parallèlement, ce travail nous a amené à rechercher quelles pouvaient être les représentations que nos élèves se faisaient de l'aléatoire, d'abord au lycée, puis au collège (nos tests s'inspirant d'exercices et d'activités espagnoles ou helvétiques) : c'est la seconde partie de cette brochure.

Enfin, compte tenu de tous le matériau que nous avions ainsi accumulé, nous avons élaboré des propositions pour un renouvellement de l'enseignement de l'aléatoire en France, en ne nous laissant pas « enfermer » par le carcan des programmes officiels[2] alors en vigueur (pour le collège, c'était très facile : il n'y avait et il n'y a encore aucun enseignement de l'aléatoire !).

Il ne reste plus maintenant qu'à élaborer des documents pédagogiques et des fiches d'activités pour mettre en œuvre nos propositions, et à les expérimenter : il faut bien laisser un peu de travail de recherche aux autres IREM !

Le groupe « Probabilité et Statistiques »
de l'IREM de Lorraine. Juin 2001.

---

[1] Il y a également des pays que nous ne citions pas simplement parce que nous n'avons pas d'informations suffisantes sur l'enseignement qu'ils offrent !
[2] Pendant la période de recherche de notre groupe, nous avons d'ailleurs été « rattrapés » par les modifications assez radicales des nouveaux programmes de seconde (fluctuations d'échantillonnage) puis par les projets de 1ère et terminale. Nous avons essayé de continuer à travailler indépendamment de ces nouvelles contingences.

TOUR D'HORIZON
DE DIVERS PAYS

AGES DE LA SCOLATITÉ EN EUROPE

10 ans	11 ans	12 ans	13 ans	14 ans	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans	19 ans	
B			Secondaire 1er degré		Secondaire 2ème degré		Secondaire 3ème degré (4 filières)			**Belgique**
CH		Collège secondaire				Secondaire supérieur				**Suisse**
D	3 filières étanches (*) Realschule (majorité), Gymnasium (≈ 30%), Hauptschule (5 ans seulement) *(*) mais IregriertegesamtSchule en Rhénanie-Nord-Westphalie*						Gymnasium ou Fachoberschule *(pas de filière mais choix matières)* / Berufsfach Schule			**Allemagne**
DK	Ecole unique (Folkestone) de 7 à 16 ans						Gymnasium / E. techniques et professionnelles		+ prolongement	**Danemark**
E			E.S.O.				B.U.P.			**Espagne**
F		Collège				Lycée (majorité) / Lycée professionnel		L.P.. prolongement		**France**
GB		Comprehensive schools (+ vestiges d'anciens systèmes) *(Ecosse : 12 à 16 ans)*					Compr. schools (majorité) ou 6th form college ou High School			**G.-Bretagne**
GR	1er cycle Gymnasio ← *(de 9 à 12 ans)*		Gymnasio							**Grèce**

	10 ans	11 ans	12 ans	13 ans	14 ans	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans	19 ans	
I		Scuola Media			Secondaire supérieur (en lycée ou gymnase) ou Secondaire artistique (en 4 ans)						**Italie**
IRL			3 niveaux (A, B, C) dans 4 types d'écoles : Secondary, Vocational, Compr., Community			3 niveaux de L.C.P. (Founation, Ordinary, Higher-Level)					**Irlande**
L		3 filières : Lycée général, Lycée technique, Primaire complémentaire									**Luxembourg**
NL			Enseignement « secondaire »				WWO HAVO				**Pays Bas**
P	(5 ans)					? ? ?					**Portugal**
POL				5 classes, de O à IV							**Pologne**
RO	Gimnazial				Licéal						**Roumanie**
RUS	Gymnase unique de 7 à 18 ans (obligatoire jusqu'à 16 ans) Primaire de 7 à 11 ans. Secondaire de 11 à 18 ans … ou Lycées spécialisés les 2 ou 3 dernières années										**Russie**
S	Grunskola de 7 à 16 ans						Lycée technique haut niveau (4 ans) → Lycée général Lycée professionnel				**Suède**

La double barre indique la fin de la scolarité secondaire

(B), comme Belgique

Pour ce qui est de la description globale du système éducatif en Belgique, on se reportera à [JPB].

L'enseignement secondaire général commence en Belgique un an plus tard qu'en France.
Il se décompose en trois « degrés »

- Un premier degré de 2 ans (équivalents de la 5ème et de la 4ème française)
- Un second degré de 2 ans (équivalents de la 3ème et de la 2nde française)
- Un troisième degré de 2 ans (équivalents de la 1ère et de la Terminale française). En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, il y a trois « variantes » dans le troisième degré : 2, 4 ou 6 périodes hebdomadaires.

Les programmes que nous donnons ci-dessous concernent l'enseignement francophone.

Dans le premier degré (1ère et 2ème années secondaires) :

Enseignement de statistiques uniquement : représentation des données en 1ère année, moyenne, mode et étendue en 2ème année. Aucun enseignement de l'aléatoire.

A titre d'exemple, voici ce que contient le premier chapitre du manuel « ESPACE MATH 1 » [EM1]. Titre du chapitre : **Traitement de l'information.** Notions abordées : Repérer un point : a) sur la droite, b) dans le plan (abscisse et ordonnée) Graphiques : a) cartésien, b) histogramme, c) diagramme en secteurs Le vocabulaire statistique suivant est abordé : effectif, répétition (nombre d'occurrences d'une même valeur observée), moyenne arithmétique, mode, fréquence ; cet apport est fait à l'aide d'un exemple : répartition des notes (de 1 à 10) d'une classe à un contrôle.

Dans la première classe du second degré (3ème année secondaire) :

<u>Compétences à atteindre</u>

1. Maîtriser le vocabulaire et les procédures de calcul nécessaire à l'élaboration de différents diagrammes et à la détermination des valeurs centrales.
2. Interpréter les valeurs centrales en fonction de la situation traitée.
3. Choisir la représentation la plus adéquate pour situation traitée.
4. Effectuer un dénombrement en utilisant un diagramme en arbre.

Tableau recensé, ordonné groupé Effectifs, fréquences Effectifs cumulés, fréquences cumulées	On favorisera l'usage des calculatrices et des ordinateurs. Dans un tableau groupé, on pourra se limiter à des classes de même amplitude afin que dans l'histogramme, les hauteurs des rectangles soient proportionnelles aux effectifs
Représentations graphiques	On analysera des diagrammes en bâtonnets, des diagrammes circulaires, des histogrammes. On en construira quelques-uns. On examinera les effets visuels induits : - lors du remplacement d'un diagramme en bâtonnet par un diagramme figuratif à 2 ou 3 dimensions - par le choix de l'origine des unités
Mode, moyenne, médiane, quartiles	Les significations de ces différentes valeurs centrales seront dégagées des situations traitées. On pourra se contenter de déterminer graphiquement la médiane et les quartiles d'un tableau groupé à l'aide du polygone des effectifs cumulés.
Organisation de dénombrement	Des exemples seront traités à l'aide de diagrammes cartésiens ou en arbre. Ces moyens commodes de visualisation permettent de dégager la règle de la somme et celle du produit.

Dans la seconde classe du second degré (4ème année secondaire) :

<u>Compétences à atteindre</u>

1. Interpréter des tableaux statistiques en terme de probabilité.

2. Préciser la portée des valeurs centrales à la lumière des paramètres de dispersion.
3. Préciser l'effet d'un changement d'origine, d'unité sur la moyenne et l'écart type.

Fréquence et probabilité	A partir d'exemples, on renforcera les connaissances acquises durant les 3 premières années. L'examen de tableaux statistiques conduira à approcher empiriquement la probabilité.
Paramètres de dispersion : étendue, écart inter-quartile, écart moyen quadratique ou variance, écart type.	On montrera que les paramètres de dispersion relativisent les paramètres de position. On insistera sur la mise en pratique et l'interprétation plutôt que sur la démarche théorique.
Effet d'un changement d'origine, d'unité sur la moyenne, l'écart type	Les formules peuvent être écrites en utilisant le signe de sommation Σ. Néanmoins, la manipulation de ce symbole dans les transformations de formules n'est pas un objectif du programme

Dans la première classe du troisième degré (5ème année secondaire) :

Cours à 6 périodes et à 4 périodes

Compétences à atteindre

1. Utiliser des tableaux statistiques, des diagrammes en arbre ou des partitions pour calculer des probabilités.
2. Reconnaître et utiliser l'indépendance d'événements.
3. Utiliser une calculatrice graphique ou un tableur pour déterminer une droite de régression et le coefficient de corrélation correspondant.
4. Déterminer la pertinence des interprétations faites au vu d'un coefficient de corrélation.

Probabilité : définition, loi de la somme, loi du produit, probabilités conditionnelles, événements indépendants	La notion de probabilité introduite en 4ème année à partir des fréquences sera précisée en montrant la tendance qu'ont celles-ci à se stabiliser lorsque le nombre d'expériences est grand. On rencontrera des dénombrements et situations probabilistes conduisant à l'utilisation de partitions ou de diagrammes en arbre L'étude théorique des dénombrements au moyen des arrangements, combinaisons, permutations, ne figure pas au programme de 5ème. Le but est de rencontrer des situations à caractère aléatoire et de les traiter au moyen du calcul des probabilités.
Usage des moyens modernes de calcul : représentation de séries statistiques à 2 variables (nuage de points), point moyen du nuage. Ajustement linéaire (afin) d'un nuage statistique : - par considérations graphiques - par la méthode des moindres carrés	Les résultats seront admis. Ils seront commentés en liaison avec la minimalisation de la somme des carrés des écarts verticaux. On évaluera la pertinence de l'ajustement linéaire en calculant un coefficient de corrélation. Les exercices seront traités dans un contexte et résolus en utilisant les fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Cours à 2 périodes

Compétences à atteindre

1. Utiliser des tableaux statistiques, des diagrammes en arbre ou des partitions pour calculer des probabilités.
2. Reconnaître et utiliser l'indépendance d'événements.

Probabilité : définition, loi de la somme, loi du produit, probabilités conditionnelles, événements indépendants	La notion de probabilité introduite en 4ème année à partir des fréquences sera précisée en montrant la tendance qu'ont celles-ci à se stabiliser lorsque le nombre d'expériences est grand. On rencontrera des dénombrements et situations probabilistes conduisant à l'utilisation de partitions ou de diagrammes en arbre L'étude théorique des dénombrements au moyen des arrangements, combinaisons, permutations, ne figure pas au programme de 5ème. Le but est de rencontrer des situations à caractère aléatoire et de les traiter au moyen du calcul des probabilités.

Dans la deuxième classe du troisième degré (6ème année secondaire : classe terminale) :

Cours à 6 périodes

Compétences à atteindre

1. Identifier un groupement d'objets en terme d'arrangement, permutation, combinaison.

2. Démontrer et appliquer les formules permettant de calculer une permutation, un arrangement, une combinaison.
3. Démontrer et appliquer la formule de symétrie et la formule de Pascal.
4. Ecrire les premières lignes du triangle de Pascal et les interpréter dans différents contextes.
5. Démontrer et utiliser la formule du binôme de Newton.
6. Préciser la signification des termes : variable aléatoire, loi de probabilité, espérance mathématique, variance et écart type d'une variable aléatoire.
7. Résoudre des problèmes de probabilité en utilisant des dénombrements, une table, une calculatrice ou un logiciel.
8. Reconnaître des conditions d'application des lois de probabilité.
9. Utiliser le calcul des probabilités pour comprendre la portée, analyser, critiquer des informations chiffrées.

Analyse combinatoire : arrangements et permutations, combinaisons.	Au départ d'exemples de dénombrements ou de situations probabilistes étudiées dans les années précédentes, on identifiera des situations de référence : arrangements avec et sans répétitions, permutations et combinaisons simples. On établira les formules correspondantes. Le recours aux arbres, aux diagrammes reste un outil de résolution ; il peut éclairer le choix d'une formule, voire s'y substituer
Triangle de Pascal et binôme de Newton	On établira les formules issues du triangle de Pascal : formule de symétrie, formule de Pascal. On démontrera la formule du binôme de Newton.
Probabilités : notion de variable aléatoire, espérance mathématique, variance et écart type. Loi binomiale.	Les notions fondamentales seront dégagées au départ d'expériences aléatoires discrètes ou, éventuellement, continues. On calculera l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type dans le cas d'une loi binomiale. A partir de la loi binomiale, on rencontrera quelques exemples suffisamment diversifiés conduisant à une approche de la loi normale et de la loi de Poisson. On dégagera à cette occasion quelques conditions d'applications de ces lois.

Cours à 4 périodes

<u>Compétences à atteindre</u>

1 Identifier un groupement d'objets en terme d'arrangement, permutation, combinaison.
2 Appliquer les formules permettant de calculer une permutation, un arrangement, une combinaison.
3 Ecrire les premières lignes du triangle de Pascal et les interpréter dans un diagramme en arbre.
4 Résoudre des problèmes de probabilité en utilisant des dénombrements, une table, une calculatrice ou un logiciel.
5 Reconnaître des conditions d'application des lois de probabilité.
6 Utiliser le calcul des probabilités pour comprendre la portée, analyser, critiquer des informations chiffrées.

Analyse combinatoire : arrangements et permutations, combinaisons.	Au départ d'exemples de dénombrements ou de situations probabilistes étudiées dans les années précédentes, on identifiera des situations de référence : arrangements avec et sans répétitions, permutations et combinaisons simples. On établira les formules correspondantes, on écrira les premières lignes du triangle de Pascal. Le recours aux arbres, aux diagrammes reste un outil de résolution ; il peut éclairer le choix d'une formule, voire s'y substituer
Schéma binomial.	Quelques expériences aléatoires permettront d'introduire le schéma binomial. A partir de la loi binomiale, on rencontrera quelques exemples suffisamment diversifiés conduisant à une approche de la loi normale. On dégagera à cette occasion quelques conditions d'applications de ces lois.

Cours à 2 périodes

<u>Compétences à atteindre</u>

1 Utiliser une calculatrice ou un tableur pour déterminer une droite de régression et le coefficient de corrélation correspondant.
2 Déterminer la pertinence des interprétations faites au vu d'un coefficient de corrélation.
3 Reconnaître des conditions d'applications de la loi normale.

4 Utiliser le calcul des probabilités pour comprendre la portée, analyser, critiquer des informations chiffrées.

Usage des moyens modernes de calcul : représentation de séries statistiques à 2 variables (nuage de points), point moyen du nuage. Ajustement linéaire (afin) d'un nuage statistique.	Les résultats seront admis. Ils seront commentés en liaison avec la minimalisation de la somme des carrés des écarts verticaux. On évaluera la pertinence de l'ajustement linéaire en calculant un coefficient de corrélation. Les exercices seront traités dans un contexte et résolus en utilisant les fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un logiciel.
Notion de loi de probabilité : loi normale	En réactivant les propriétés de base concernant les probabilités, on rencontrera quelques exemples et contre exemples conduisant à une approche intuitive de la loi normale. On dégagera à cette occasion quelques conditions d'applications de cette loi.

En avril 2001, nous avons reçu de Jacques BAIR, directeur de l'I.R.E.M. de LIEGE-LUXEMBOURG, un message électronique dont nous extrayons ces quelques phrases :

> En ce qui concerne la Belgique, il s'agit d'un excellent résumé ... de ce qui devrait se faire (ou, de façon équivalente, de ce qui se trouve dans les programmes officiels). Malheureusement, la situation sur le terrain est loin d'être aussi "belle", car, en vertu du principe de l'enseignement en spirale cher à certains pédagogues belges, le professeur sur le terrain, qui devrait suivre un programme beaucoup trop lourd, a tendance à rejeter à l'année suivante le chapitre qui lui plaît le moins ou qu'il croit le moins important (et c'est bien entendu le chapitre de statistiques qui ainsi délaissé) ; toutes ces "impressions" devraient être confirmées, nous semble-t-il, par une vaste enquête que nous avons menée auprès de plus de 700 jeunes issus du secondaire et inscrits dans des études supérieures variées : je vous tiendrai au courant des résultats de cette enquête.
> Je te signale que les programmes de l'enseignement officiel vont encore être modifiés (et pas du tout dans le "bon sens") : en effet, à partir de la rentrée prochaine, les statistiques ne seront plus enseignées que pendant 2 des 3 dernières années du secondaire, avec un "trou" en cinquième année ; ainsi, la statistique descriptive sera vue exclusivement en quatrième, et tout le reste (les probabilités, l'analyse combinatoire et la régression) en sixième !

La remarque que Jacques BAIR faite au début ce cet encadré vaut pour la plupart des pays cités dans cette brochure : nous n'avons pu travailler que sur des programmes officiels ou des manuels ; jamais nous n'avons pu nous rendre compte sur le terrain de ce qui se pratiquait réellement...

(CH), comme Confédération Helvétique (Suisse)

En Suisse, l'enseignement est organisé par cantons. Chacun des cantons dispose de son « Ministère » de l'Éducation (généralement appelé Département de l'Éducation, ou de l'Instruction, parfois associé à la Culture, aux Sports, à la Jeunesse...).
Il existe une coopération entre les cantons francophones en vue d'harmoniser leurs objectifs d'enseignement et leurs programmes.

A titre d'exemple, nous donnerons des informations sur ce qui se fait dans les cantons du Valais, de Vaud et de Neuchâtel.

(VS) : Valais (Sion)

L'enseignement de probabilités et statistiques n'est donné qu'aux niveaux correspondants à ceux du lycée en France :
Aux élèves de 15-20 ans les Collèges cantonaux, candidats à la « Maturité Gymnasiale », permettant l'accès ans examen aux Universités et aux Ecoles Polytechniques fédérales (environ 20% d'une classe d'âge) ;
Aux élèves qui, par la voie de l'apprentissage, obtiennent la « Maturité Professionnelle » leur permettant l'accès aux hautes Ecoles Spécialisées (c'est à dire les Universités « des métiers »).

A titre indicatif, voici le programme correspondant aux 4 années de ces Collèges (équivalents des lycées français).

Sections A/B/D
Première année (5 heures hebdomadaires de mathématiques), 2ème année (4 heures), 3ème année (3 heures), 4ème année (3 heures) : rien en ce qui concerne les probabilités et statistiques.
Cinquième année (4 heures) : un 'gros' programme d'analyse. En probabilités : *Notions élémentaires de calcul des probabilités : axiomatique, probabilité conditionnelle, probabilité binomiale.*

Section C (scientifique)
Première année (7 heures hebdomadaires de mathématiques), 2ème année (7 heures), 3ème année (6 heures), 4ème année (5 heures) : rien en ce qui concerne les probabilités et statistiques.
Cinquième année (6 heures) : le 'gros' du programme est constitué d'analyse, d'algèbre linéaire, de géométrie.
En ce qui concerne les probabilités :

- *Axiomatique du calcul des probabilités*
- *Probabilité conditionnelle et probabilité binomiale*
- *Variables aléatoires discrètes et continues*
- *Loi de distribution binomiale, loi de Poisson, loi normale.*

Section E (technologique).
Les probabilités et statistiques n'apparaissent également qu'en 5ème année (4 heures de mathématiques) :

- *Axiomatique du calcul des probabilités*
- *Probabilité conditionnelle et probabilité binomiale*
- *Variables aléatoires discrètes et continues*
- *Eléments de statistiques mathématiques.*

Mathématiques appliquées

Un « cours » de mathématiques appliquées est prévu pour les élèves de 4ème et 5ème années de la section scientifique, à raison de 2 heures hebdomadaires.
Les objectifs de ce cours sont :

- Apprendre à maîtriser les méthodes du travail scientifique, à poser et à résoudre des problèmes, à discuter et présenter clairement leurs solutions
- Développer l'imagination, la créativité et l'esprit inventif en approfondissant un sujet scientifique.
- Prendre conscience de la nécessité de se donner des moyens numériques et graphiques pour résoudre rationnellement un problème.

- Elaborer des modèles mathématiques en partant d'une situation réelle, développer des solutions et les confronter à la réalité.

(ces objectifs sont assez proches des T.I.P.E. des classes préparatoires françaises ; les élèves concernés ont le même âge).
Parmi les thèmes proposés, on trouve de la géométrie descriptive, de l'axonométrie, de la perspective, de la trigonométrie sphérique, l'étude des polyèdres ou des corps ronds, des méthodes numériques (arithmétique des calculatrices, intégration numérique, mathématiques discrètes, méthodes de résolution des systèmes linéaires, méthodes d'optimisation, la détermination des nombres pi et e), des études de courbes et surfaces, les transformations de l'espace, de l'histoire des mathématiques, etc.
Deux sujets sont proposés qui concernent plus particulièrement les probabilités :
<u>Statistiques</u> :
Simulation d'expériences aléatoires. Moyenne, variance, histogrammes, etc. Corrélation linéaire. Régression.
<u>Probabilités</u> :
Echantillons et estimateurs. Tests d'hypothèse, test du khi2. Nombres aléatoires et méthode de Monte-Carlo.

(VD) : Vaud (Lausanne)

Ecole secondaire (11-15 ans)

Un nouveau programme de mathématique devait entrer en vigueur en automne 1999, dans les trois filières de l'école (équivalent au collège en France). Il comportera un nouveau domaine « **Analyse de données** » (en trois parties : Combinatoire, Probabilité, et Statistiques), alors que rien n'était fait dans ce domaine dans les programmes précédents.
Ce nouveau domaine doit être abordé par des situations-problèmes tirées de la vie courante, et devra faire la place aux questions de portée pratique ou sociale.
Les compétences visées sont les suivantes :

- *Rassembler et classer des données*
- *Calculer des combinaisons*
- *Travailler sur des suites aléatoires*
- *Calculer la probabilité d'un événement*
- *Trier des informations*
- *Remplir un tableau de données*
- *Traduire un ensemble de données par une représentation appropriée*
- *Interpréter un graphique*
- *Comparer des phénomènes à partir de leurs graphiques*
- *Calculer une moyenne, une moyenne pondérée, des écarts à la moyenne*
- *Utiliser un vocabulaire adéquat.*

Les manuels scolaires actuels sont mal adaptés à ce nouveau programme. Un moyen d'enseignement commun à tous les cantons francophones est actuellement en chantier, et devrait paraître en 2003.

Secondaire supérieur (16-18 ans) : voie du baccalauréat

Les notions suivantes sont actuellement au programme :
En 1ère année (équivalent à la 2nde française) : *Statistiques descriptives (représentation de données ; mesures de la tendance centrale et de la dispersion).*
En 2ème année : *Analyse combinatoire.*
En 3ème année (terminale) : *probabilités discrètes ; probabilités conditionnelles.*

Secondaire supérieur (16-18 ans) : voie « diplôme »

Cette voie ne conduit pas au baccalauréat. Elle correspond aux L.P. français (intermédiaire entre le B.E.P. et le Bac.Pro.).
En 1ère année : *notions de statistiques descriptives.*
En 2ème année : *thème facultatif ; peut-être intégré dans les thèmes aux choix*
En 3ème année : *analyse combinatoire et notions de calcul des probabilités.*

(NE) : Neuchâtel

Le canton de Neuchâtel est le seul où nous ayons trouvé une véritable approche de l'aléatoire est des probabilités au niveau de l'enseignement secondaire moyen (classes de 6ème à 9ème, équivalents des quatre classes de collège en France).
Le programme est le suivant (pour l'ensemble des 4 années) :

Les objectifs suivants doivent être atteints par une démarche empirique, sans recours systématique à des formules.

1. Dresser, de manière méthodique, la liste des cas possibles d'une situation donnée.
Exemple de situations maîtrisées :
Faire la liste de tous les nombres de 3 chiffres que l'in peut écrire avec 1, 2 et 3.
Faire la liste de toutes les manières possibles d'asseoir 4 personnes autour d'une table ronde.

2. Dénombrer :les permutations de n éléments ; les combinaisons de n éléments pouvant prendre k valeurs différentes.
Exemple de situations maîtrisées :
De combien de manières peut-on ranger 6 livres sur un rayon ?
Combien y a-t-il de grilles possibles au Sport-Toto ?

3. Savoir que $0 \leq P(E) \leq 1$; que $P(E) = 0 \Leftrightarrow$ E est un événement impossible ; que $P(E) = 1 \Leftrightarrow$ E est un événement certain.

4. Calculer, par dénombrement des événements, $P(E) = n/N$, où n est le nombre de cas où l'événement E se produit, et N le nombre total de cas équiprobables possibles.
Exemple de situation maîtrisée :
Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 5 avec deux dés ?

5. Analyser une situation par un diagramme en arbre et utiliser le fait que la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des segments qui le constituent.
Exemple de situation maîtrisée :
On tire simultanément deux boules d'une boîte contenant deux boules rouges et trois bleues ; quelle est la probabilité que les deux soient rouges ?

6. Déterminer l'espérance de réussite ou de gain, et la distinguer du résultat d'un essai expérimental.
Exemple de situations maîtrisées :
a) En lançant 100 fois deux dés, combien de fois peut-on espérer le double six ? Réalise l'expérience et compare avec la prévision.
b) On lance 3 pièces. Si une seule tombe sur Pile le joueur A marque3 points, sinon le joueur B marque 1 point.
Le jeu est-il équitable ?
Joue ensuite 3 fois avec ton voisin, et note les résultats obtenus : conclusions ?

On trouvera en annexe (pages de couleur) quelques exemples d'activités extraites de documents utilisés dans le canton de Neuchâtel.

(D) comme Allemagne

En Allemagne également, la politique éducative est du ressort de chaque région (Land). Des variations des structures (durée des études et organisation des établissements) existent donc entres les différents Länder.
Dans la plupart des cas, à l'issue de l'école élémentaire (Grundschule), les élèves (10 ans) ont le choix entre trois filières relativement étanches :

- le Gymnasium, qui concerne environ 30% des élèves, et débouche (après 8 années de scolarité) sur l'Abitur, diplôme indispensable pour entrer à l'université ;
- la Realschule concerne la majorité des élèves et débouche (après 5 années) sur la Mittlere Reife, diplôme qui ouvre la voie de l'enseignement technique, ou permet une éventuelle réorientation vers l'Abitur ;
- la Hauptschule qui débouche après une scolarité de 5 ans sur le Hauptschulabschluss (diplôme plutôt technique).

Dans certains Länder cependant, une Gesamtschule (sorte de collège unique) tend à se substituer aux trois autres types d'établissement jusqu'à l'âge de 16 ans.

Dans les lycées (Gymnasium) conduisant au baccalauréat (Abitur), les classes s'échelonnent de la 5ème à la 13ème (soit 9 années au total). L'enseignement des mathématiques est généralement indifférencié jusqu'à la 10ème ou la 11ème classe. A partir de là, l'élève peut choisir entre un enseignement de base (Grundkurs, GK) ou un enseignement approfondi (Leistungkurs, LK).
On trouvera de plus amples détails dans le compte rendu d'un atelier fait par Richard CABASSUT aux Journées APMEP de Gérardmer 1999 : *Place de la démonstration en France et en Allemagne*
(http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep/ateliers.htm,
ou http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep/atelVA02.html) ou dans [JPB].

Les probabilités ne prennent qu'une très faible place dans les programmes du Gymnasium de certains Länder, mais d'autres poussent plus loin que ce que l'on enseigne en France au même niveau.

Premier exemple : le Bade-Wurtemberg :

Prenons par exemple la 12ème et la 13ème année de la série « mathématiques » du Bade-Wurtemberg.
Le programme comporte 9 parties :

1) Suites, limites, et applications
2) Introduction au calcul intégral
3) Approfondissement du calcul différentiel et intégral dans le cas de fonctions particulières
4) Applications du calcul différentiel et intégral (mathématiques « en pratique »)
5) Systèmes d'équations linéaires
6) Espace vectoriel
7) Géométrie affine dans l'espace réel
8) Géométrie métrique dans l'espace réel
9) Thèmes au choix.

Ce n'est que dans cette neuvième partie que l'on voit apparaître, parmi 15 thèmes proposés, les 3 suivants :

Distribution normale
Intervalle de confiance pour une estimation
Chaînes de Markoff

Et encore, le programme précise-t-il que « le traitement d'un thème au choix est effectué **après** les épreuves du baccalauréat ».

Deuxième exemple : la Bavière :

GK (cours de base)

Le cours de base de mathématique a pour but d'élargir la formation mathématique des élèves. Ils doivent posséder, à l'issue du cours, un savoir mathématique nécessaire à la poursuite d'études de nature scientifique et autres, et à l'exercice de nombreuses activités professionnelles. Les connaissances et capacités acquises lors de la pratique du contenu pédagogique doivent aider l'élève à évoluer dans un monde qui requiert une mathématisation dans beaucoup de domaines.
Trois domaines sont abordés : le calcul infinitésimal, le calcul des probabilités et statistiques, et la géométrie analytique ; trois domaines qui ont joué un rôle important dans l'évolution des mathématiques et qui conviennent bien à l'enseignement.

Programme de probabilité et statistique (uniquement en 12ème année ; 44 heures au total) :
1) Expériences aléatoires, mathématisation de situations concrètes (environ 6 h).
2) Fréquence et concept de probabilité (approche fréquentiste de la notion). On parlera aussi du développement historique du concept de probabilité (environ 6 h).
3) Introduction à l'analyse combinatoire (environ 9 h).
4) Indépendance de deux événements (environ 4 h).
5) Processus de Bernoulli et loi binomiale (environ 12 h).
6) Tests d'hypothèse sans des cas simples (environ 7 h).3

Il n'y a pas de probabilité et statistiques la 13ème année (année de l'examen).

LK (enseignement plus spécialisé)

Le but de l'enseignement de la spécialité mathématique est de donner une formation mathématique plus approfondie. De nombreux exemples, traités rigoureusement, donneront l'occasion de traiter, avec plus de rigueur que jusqu'alors, des situations-problèmes ; ceci nécessite une plus grande abstraction et donne l'occasion d'aborder des problèmes fondamentaux.
Les élèves devront être capables, en utilisant les connaissances et les procédures antérieures, de traiter seuls (en autonomie) des exercices spécifiques. Le travail personnel et l'autonomie ont ici une place importante. Les élèves, en développant ces qualités, se préparent ainsi dans de bonnes conditions aux études supérieures. Sont au programme : le calcul différentiel, le calcul des probabilités et statistiques, et la géométrie ; trois domaines qui ont joué un rôle important dans l'évolution des mathématiques et qui conviennent bien à l'enseignement.

Probabilités et statistique : De nombreux événements de la réalité ne peuvent s'expliquer de façon causale (déterministe), ils sont aussi le fruit du hasard. Pour construire et décrire le calcul des probabilités et de la statistique mathématique, on élabore des modèles et des méthodes spécifiques. Les élèves apprendront, sur des exemples variés, à utiliser des méthodes mathématiques pour faire des prévisions raisonnables. L'utilisation de modèles mathématiques pour décrire la réalité et la construction de concepts clairs sont de ce fait très importants.

Programme de 12ème année (environ 52 h).
1) Expériences aléatoires, mathématisation de situations concrètes (environ 8 h).
2) Fréquence et probabilité (approche fréquentiste de la probabilité) (environ 8 h).
3) Introduction à l'analyse combinatoire (environ 10 h).
4) Probabilités conditionnelles et événements indépendants (environ 10 h).
5) Variables aléatoires et distributions ; fonction de répartition (environ 8 h).
6) Espérance, variance et écart-type comme moments d'une variable aléatoire (environ 8 h).

Programme de 13ème année (environ 46 ou 55 h).
1) Processus de Bernoulli et loi binomiale (environ 14 h).
2) Inégalité de Tchebichev et loi des grands nombres (environ 8 h).
3) Approximations des lois binomiales par des lois normales (9 h + approfondissement possible 9 h).
4) Tests d'hypothèse (environ 15 h).

N.B. Ce programme est réduit par rapport à celui de 1991, qui prévoyait 62 h en 13ème.

Troisième exemple : la Basse-Saxe :

Nous proposons en exemple de sujet de baccalauréat (Abitur) proposé en Basse-Saxe (NiederSachsen) en 1998 ; nous n'avons malheureusement pas pu nous procurer les programmes de ce Land.

Exercice A :
Dans le cadre d'une étude menée sur les cigarettes dites 'light', on trouve dans un article de magazine la déclaration suivante : « *Environ 32 millions d'Allemands fument et, par année, environ 250 000 meurent avant l'heure suite aux effets nocifs du tabac* ».
Déterminer la probabilité que, sur 300 fumeurs choisis au hasard,
(i) exactement 4,
(ii) moins de deux,
meurent prématurément dans l'année suivante à cause des effets nocifs du tabac.
Donnez une expression exacte de ces probabilités.
Puis évaluez les valeurs approchées obtenues avec la loi de Poisson et comparez.

Exercice B :
Lors d'un téléfilm policier, on a montré une ruse permettant de frauder un distributeur de billets. Dans la semaine qui a suivi, 12 délits sur ce schéma ont été enregistrés par la police.
Peut-on adresser des reproches à la direction de la chaîne, sachant que d'habitude on enregistre en moyenne seulement 4 délits de ce genre par semaine ?

(DK), comme Danemark

On trouvera une description du système éducatif danois dans un article de Richard CABASSUT, *Enseignement des mathématiques au Danemark*, paru dans l'Ouvert n°77 [RC]

Au Folkeskolen

Le Folkeskolen est l'équivalent du collège français.
Les sept « compétences et outils techniques » que les élèves doivent acquérir :

- Arithmétique élémentaire
- Description de quantités par mesures et calculs
- Utilisation de présentations graphiques
- Applications géométriques(plan et espace)
- Utilisation de variables et de formules
- Application et évaluation de la statistique
- Connaissance des probabilités.

En ce qui concerne les deux derniers points, le programme précise :
Les élèves examinent et interprètent des descriptions statistiques, telles qu'elles sont utilisées par les médias ou dans d'autres domaines. Le travail est axé sur la question de savoir comment la présentation des résultats peut influer sur la conception des données.
La notion de probabilité fait parie du traitement des données. L'accent est mis sur les probabilités statistiques. Les simulations sont faites par ordinateur. Les opérations algébriques, l'application de la règle de la proportion et l'utilisation de la notion de pourcentage doivent y avoir une place centrale.

Au Gymnasium

Les programmes actuels de mathématiques datent de 1997 (arrêté du Ministère de l'Education n°354 du 26/05/97).
Il existe deux formations de niveau différent au Gymnasium : le « lycée classique » et le « H.F. » (Hojere Foreberedelseksamen, destiné aux élèves plus âgés qui reprennent des études après une expérience professionnelle), toutes deux en trois ans.
L'enseignement des mathématiques est étagé en 3 niveaux au lycée classique :

Niveau 'C' : en option pour la section langue de niveau moyen.
Niveau 'B' : égal au niveau 'C' + 1 an ; obligatoire pour la section mathématique ; en option pour la section langue de haut niveau.
Niveau 'A' : égal au niveau 'B' + 1 an.

L'enseignement est étagé en 2 niveaux au H.F. :

Niveau 'C' : commun à tous les élèves
Niveau 'B' : égal au niveau 'C' + 1 an ; en option.

La section mathématique de lycée est choisie par environ 2/3 des élèves, et la section langues par 1/3. En section mathématique, il y a un écrit en fin de seconde année (niveau 'B'), et un écrit plus un oral en année terminale (niveau 'A').

Les 5 thèmes principaux de l'enseignement des mathématiques au Gymnasium sont :

- Nombres
- Géométrie et vecteurs
- Fonctions
- Calcul infinitésimal
- Statistiques et probabilités

En ce qui concerne statistiques et probabilités, le programme précise :
Les élèves doivent obtenir une compréhension des notions d'expérience aléatoire et de probabilité, et acquérir une bonne connaissance d'un choix de modèles théoriques de probabilités ainsi que des applications pratiques de ces modèles.
<u>Contenus</u> : expérience aléatoire, 'a priori' et probabilités fréquentielles. Champ des probabilités, probabilités des événements. Probabilité conditionnelle et indépendance. Variable aléatoire. Loi binomiale, loi hypergéométrique et loi normale.
(...)
Les champs des probabilités sont traités comme modèles d'expériences aléatoires, et des exemples de champs de probabilité symétriques et non symétriques sont donnés. Les notions d'événements indépendants et de

probabilités conditionnelles sont traitées (cf. formule de Bayes). L'enseignement doit comprendre quelques calculs combinatoires simples, et de calculs de probabilité à l'aide de la multiplication. La formule C(n,r) est déduite, mais la théorie des ensembles est traitée seulement dans la mesure où elle est nécessaire pour la compréhension de la répartition binomiale et de la répartition hypergéométrique. L'utilisation de tables de la loi binomiale et de la loi normale, ainsi que l'utilisation de papier 'normal' est enseignée. La relation entre les deux lois est abordée. L'importance de l'interprétation de données chiffrées comme valeurs réalisées d'une variable aléatoire est soulignée. Pour décrire l'interaction des valeurs observées et d'un modèle probabiliste, on utilisera la 'fonction de fréquence' et la fonction de répartition.
(traduction approximative..)

(E), comme Espagne

En Espagne, un certain nombre de provinces (Pays Basque, Catalogne, etc.) jouissent d'une certaine autonomie. [Voir ci-après l'exemple du Pays Basque].
Pour les autres provinces, les structures et les programmes sont identiques et « centralisés » à Madrid.
Nous les décrivons ci-dessous.

Description de la scolarité secondaire
L'enseignement secondaire se divise en deux parties :

- enseignement secondaire obligatoire (ESO) : 4 ans, correspondant aux classes de 5ème, 4ème, 3ème et 2nde françaises, constitué de deux cycles de deux ans.
- préparation au baccalauréat (Bachillerato) : 2 ans, correspondant aux classes de Première et de terminale françaises.

(Euzk), l'exemple du Pays Basque

Place des probabilités-statistiques dans l'enseignement des mathématiques

Le programme de l'ESO comporte 6 rubriques :

- Nombres et opérations : signification, stratégies et symbolisme
- Mesure, estimation et calcul de grandeurs
- Représentation et organisation de l'espace
- Langage des fonctions et des graphiques
- Interprétation, représentation et traitement de l'information de type statistique
- Traitement du hasard.

On voit donc que les rubriques "statistiques" et les "probabilités" constituent - au moins théoriquement - chacune une rubrique, sur un total de six.

Programmes des rubriques « probabilités et statistiques »

Pour l'ESO : Le programme suivant est donné globalement pour les quatre années. Chacune des six rubriques se décompose en trois : contenus conceptuels, contenus procéduraux, attitudes.
Voici le détail de celles qui nous concernent.

Rubrique 5 : Interprétation, représentation et traitement de l'information de type statistique.

<u>Concepts</u>

1. Information et saisie de données sur les phénomènes de type statistique
2. Graphiques statistiques (pictogramme, diagramme en secteurs, en bâtons, histogramme, polygone de fréquences)
3. Paramètres statistiques

<u>Procédures</u>

1. Utilisation de divers langages : Utilisation et interprétation des langages graphique et statistique pour décrire les phénomènes de l'environnement social, économique, scientifique... en utilisant le vocabulaire et les symboles adéquats.
2. Algorithmes et savoir-faire : Choix des paramètres les plus adéquats pour décrire une distribution, en fonction du contexte et de la nature des données, et obtention de ces paramètres à l'aide des algorithmes traditionnels ou de divers éléments de calcul. Détection d'erreurs dans la formulation de propositions utilisant le langage statistique.
3. Stratégies générales : Planification et réalisation individuelle de recueils de données de type qualitatif et quantitatif, à l'aide de techniques d'enquête, d'échantillonnage, de décomptes et la construction de tableaux et de graphiques statistiques. Formulation de conjectures sur le comportement d'une population, en accord avec les résultats relatifs à un échantillon de celle-ci.

<u>Attitudes</u>

1. Références à l'image des mathématiques
2. Reconnaissance et valorisation de l'utilité des langages graphique et statistique pour représenter et résoudre des problèmes de la vie courante et du domaine scientifique. Curiosité dans la recherche de relations entre grandeurs ou entre phénomènes. Sensibilité, intérêt et évaluation critique des langages graphique et statistique dans l'information et l'argumentation sociale, politique et économique.

3. Références à l'organisation et aux habitudes de travail : Reconnaissance et valorisation du travail en équipe comme forme efficace pour la réalisation d'enquêtes statistiques dans des situations variées.

La répartition selon les deux cycles est la suivante :
Premier cycle (12-13 ans)

- Manipulation des conventions usuelles des représentations graphiques de relations fonctionnelles et de données statistiques
- Utilisation des graphiques pour obtenir des valeurs concrètes et une information globale sur divers phénomènes
- Utilisation, dans des cas simples, du langage des fonctions pour la description de relations
- Procédés d'obtention et de manipulation de données relatives à des variables discrètes.

Second cycle (14-15 ans)

- Etude plus complète des représentations graphiques. Approfondissement de l'analyse des graphiques introduisant de nouvelles notions : continuité, périodicité, etc.
- Traitement algébrique de relations fonctionnelles simples.
- Procédés d'obtention et de manipulation de données statistiques se rapportant à des variables continues ou discrètes.
- Traitement des données à l'aide des techniques de dénombrement, de tableaux, de graphiques et des paramètres de position.
- Attitude positive et critique envers l'information exprimée au moyen de graphiques.
- Interprétation des données statistiques à l'aide des paramètres de position et de dispersion.
- Signification de la dispersion.
- Initiation aux variables bidimensionnelles.
- Attitude positive et critique face aux informations statistiques

Rubrique 6 : Le traitement du hasard.

Concepts

1. Phénomènes aléatoires et terminologie pour les décrire
2. Attribution d'une probabilité à des événements : fréquence et probabilité d'un événement ; règle de Laplace
3. Attribution d'une probabilité dans des expériences aléatoires composées : événements dépendants et indépendants.

Procédures

1 Utilisation de différents langages : utilisation du vocabulaire adéquat pour décrire des situations et des expériences aléatoires. Expression qualitative et quantitative de la probabilité d'un événement, de diverses manières.
2. Algorithmes et savoir-faire : utilisation d'informations diverses (fréquences, symétries, croyances, observations préalables) pour attribuer une probabilité à un événement. Utilisation de la règle de Laplace pour l'attribution d'une probabilité dans les cas simples. Utilisation de procédés divers (dénombrement, diagramme en arbre, tableau de contingence...) pour le calcul de la probabilité d'événements composés. Détection des erreurs usuelles dans interprétation du hasard. Obtention de nombres aléatoires par diverses techniques (table, calculatrice...).
3. Stratégies générales : formulation et vérification de conjectures sur le comportement de phénomènes aléatoires simples. Utilisation des probabilités pour prendre des décisions fondamentales dans divers contextes.

Attitudes

1. Références à l'image des mathématiques : reconnaissance et valorisation des mathématiques pour interprétation, la description et la prédiction dans des situations incertaines. Disposition favorable à la prise en compte d'informations probabilistes dans la prise de décision relative aux phénomènes aléatoires. Curiosité et intérêt pour la recherche de phénomènes aléatoires dans la vie courante. Evaluation critique de l'utilisation d'informations à caractère probabiliste dans les médias, et rejet des abus et des usages incorrects qui en sont faits.

La répartition selon les deux cycles est la suivante :
Premier cycle (12-13 ans)

- Obtention, par des moyens empiriques, d'information sur les régularités dans des situations aléatoires.
- Techniques simples d'attribution de probabilités.
- Attitude positive dans la quantification du probable.

Second cycle (14-15 ans)

- Utilisation de méthodes empiriques et de dénombrements pour attribuer des probabilités dans des cas plus complexes.
- Calcul de probabilités théoriques par la règle de Laplace.
- Expérience composée. Probabilité conditionnelle.
- Augmentation de précision dans la quantification du probable.
- Attitude positive envers les informations données en termes de probabilité.

Document d'accompagnement

Texte d'accompagnement des programmes relatif au traitement du hasard dans le premier cycle de l'ESO (12-15 ans) :

Le développement, chez les élèves, de l'intuition au sujet de l'incertain, qui permet de raisonner sur le résultat possible de phénomènes ou expériences dans lesquels intervient le hasard, ou sur la plausibilité de résultats déjà obtenus, requiert (...) un travail continu. Ce travail a déjà été commencé dans les cycles antérieurs et permet maintenant d'arriver à un certain degré de formalisation de la mesure du degré d'incertitude. Dans ce cycle, on peut arriver, à travers des situations familières pour l'élève ou qui peuvent être expérimentées, à obtenir une information sur les régularités que présentent les résultats de situations aléatoires, principalement par des moyens empiriques, ce qui permettra de faire des prédictions sur la possibilité d'obtenir un succès. Ils peuvent d'autre part acquérir, sans nécessairement passer par le calcul et les proportions, des techniques et des moyens permettant l'attribution de probabilités et leur expression.

On voit donc qu'en Espagne le développement de la "pensée aléatoire" commence dès l'école élémentaire (l'incertain dans la vie courante), et qu'au début de l'E.S.O. se poursuit la fréquentation expérimentale des phénomènes aléatoires, avec un début de quantification des résultats (degré d'incertitude).

On trouvera en annexe (pages de couleur) quelques exemples d'activités extraites de manuels du premier cycle de l'E.S.O.

B) Pour le Bachillerato : le programme est précisé pour chacune des deux années suivant la série.

Exemple : ENSEIGNEMENT SOCIAL ET ECONOMIQUE

Pour cette filière du baccalauréat, le programme est le suivant :

MULTZOA - ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA

Première année

A) Kontzeptuzko Edukiak

1. Aldagai estatistiko diskretu eta jarraituak. maiztasunen banaketa.
2. Parametro estatistikoak: zentralizazio, posizionamendu- eta dispretsio-neurriak.
3. Banaketa bidimentsionalak. Puntu-hodeia. Parametro estatistiko bidimentsionalak.
4. Bi aldagairen arteko erlazio funtzionala eta ausazko erlazioa.
5. Zuzen batetik puntu-hodei baterako doikuntza intuitiboa. Bi aldagairen arteko erlazio-maila. Koerlazioaren eta kausalitatearen arteko desberdintasuna. Koerlazio-koefizientea. Erregresio lineala.
6. Probabilitate binomialeko banaketa. Banaketa normala binomialaren muga gisa.

B) Prozedurazko Edukiak

1. Hizkuntza estatistikoaren erabilera (terminologia espezifikoa, taulak, grafikoak, ...) Gizarte-Zientzietako eta Ekonomiako fenomenoak deskribatu eta interpretatzeko.
2. Algoritmoak erabiltzea parametro estatistikoak kalkulatzeko.
3. Sarrera bikoitzeko taula baten bidez edota puntu-hodei batez adierazitako gizarteko edo ekonomiako fenomenoei dagozkien datu numerikoen interpretazioa.
4. Puntu-hodeien interpretazioa aldagaien arteko erlazioa balioesteko eta, hala badagokio, koerlazio-koefizientearen balioa.
5. Koerlazio-koefizientea aplikatzea aldagaien arteko erlazio-maila erabakitzeko.
6. Erregresio-zuzena aplikatzea interpolatu eta aurresateko.
7. Kalkulagailua edo programa informatikoak erabiltzea parametro estatistiko desberdinak kalkulatzeko.
8. Txostenak egitea Gizarte-Zientziei eta Ekonomiako fenomenoei buruz egindako ikerkuntzen emaitza gisa.
9. Banaketa binomiala eta normala erabiltzea probabilitateak esleitzeko.
10. Banaketa binomiala normal gisa doitzea.

11. Binomialaren eta normalaren taulak erabiltzea probabilitateak kalkulatzeko.

Deuxième année

A) Kontzeptuzko Edukiak

1. Zorizko esperientzia konposatuak. Probabilitate baldintzatua, osoa eta "a posteriori"zkoa.
2. Inferentzia estatistikoaren sarrera.
3. Laginak aukeratzearekin eta adierazgarritasunaren baldintzekin zerikusia duten problemak, eta horietatik atera daitezkeen ondorioak aztertzea.
4. Banaketa normalean oinarritutako hipotesi baten kontrasterako test bat aztertzea.

B) Prozedurazko Edukiak

1. Gertaeren deskribapena eta hoien probabilitateen kalkulua, teknika desberdinak erabiliz.
2. Birkontaketako teknikak erabiltzea: konbinatoria, zuhaitz-diagrama,...
3. Probabilitateen kalkulua eguneroko bizitzako egoeretara aplikatzea.
4. Zorizko fenomenoei buruzko ustekizunak egitea, probabilitatearen kalkuluak eskaintzen duen azterketa zorrotzaren ondorioz onartuz edo atzera botaz.
5. Simulazioko programa informatikoak erabiltzea, zorizko fenomenoak aztertzeko.
6. (Zorizko lagin batetik abiatuz) populazio jakin baten ezaugarriren bati buruzko ondorioak aztertzeko eta lortzeko prozesua antolatu eta burutzea.
7. Test motaren bat erabiltzea inferentzia-hipotesi baten baliagarritasuna egiaztatzeko.

Traduction approximative :

Première année du baccalauréat (16 ans).

Concepts

1. Variables statistiques discrètes et continues. Distribution des fréquences.
2. Paramètres statistiques : paramètres de 'mesure centrale' et de dispersion.
3. Distribution à deux dimensions. Nuage de points. Paramètres statistiques bidimensionnels.
4. Relation fonctionnelle et relation aléatoire entre 2 variables
5. Ajustement intuitif d'un nuage de points. Degré de la relation. Différence entre corrélation et causalité. Coefficient de corrélation. Régression linéaire.
6. Distribution binomiale de la probabilité. Distribution normale comme limite de la distribution binomiale

Procédures

1. Utilisation du langage statistique (terminologie spécifique, tableaux, graphiques, ...) pour décrire et interpréter les phénomènes des Sciences Sociales et Economiques.
2. Utilisation d'algorithmes pour calculer les paramètres statistiques
3. Interprétation de données numériques correspondant à des phénomènes sociaux ou économiques, exprimés au travers de tables à double entrée et/ou de nuages de points.
4. Interprétation des nuages de points pour estimer la relation entre les variables et, le cas échéant, la valeur du coefficient de corrélation.
5. Application du coefficient de corrélation pour décider du degré de la relation entre les variables.
6. Application de la droite de régression pour interpoler ou pour prédire.
7. Utilisation de la calculatrice ou de programmes informatiques pour le calcul des différents paramètres statistiques
8. Elaboration de 'résumés' à partir de résultats d'enquêtes réalisées sur des phénomènes relatifs aux sciences sociales et économiques.
9. Utilisation des distributions binomiales et normales pour déterminer des probabilités.
10. Ajustement d'une distribution binomiale par une distribution normale.
11. Utilisation de tables de la loi binomiale et de la loi normale pour calculer des probabilités.

Seconde année du baccalauréat (17 ans).

Concepts

1. Expériences aléatoires composées. Probabilité conditionnelle (totale, et a posteriori).
2. Introduction à l'inférence statistique.
3. Problèmes relatifs au choix de l'échantillon, aux conditions de représentativité, et à l'analyse des conclusions qu'il convient d'en extraire.
4. Etude d'un test d'hypothèse (au choix) basé sur la distribution normale.

Procédures

1. Description d'événements, et calcul de leurs probabilités en utilisant diverses techniques.
2. Utilisation de techniques de dénombrement : combinatoire, diagrammes en arbres...
3. Application du calcul des probabilités à des situations réelles de la vie quotidienne.

4. Formulation de conjectures sur des phénomènes aléatoires, en les acceptant ou en les refusant à partir de l'analyse rigoureuse que procure le calcul des probabilités.
5. Emploi de programmes informatiques de simulation pour étudier des phénomènes aléatoires.
6. Organisation et exécution de procédés d'analyse, et obtention de conclusions, sur une caractéristique (au choix) d'une population déterminée (à partir d'un échantillon aléatoire).
7. Utilisation d'un type de test pour vérifier la validité d'une hypothèse.

ATELIERS D'APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES

(En option)

Les contenus des matières optionnelles se présentent en 'blocs' thématiques qui sont déterminés en fonction des domaines d'application des connaissances mathématiques. Ces rubriques sont conçues de telle façon qu'elles sont totalement indépendantes les unes des autres, aucune d'elle n'étant nécessaire pour aborder le reste.
Elles cherchent à illustrer par des exemples l'usage des mathématiques dans différentes activités, de sorte que l'élève puisse se faire une idée de leur dans différents domaines, avec ce que cela suppose d'aide dans l'orientation de son travail dans le futur.
A des moments précis, on signalera l'opportunité d'utiliser l'ordinateur ou de la calculatrice pour le traitement des données, situation imposée par le degré de complexité que requerrait un traitement formel.
Les rubriques proposées dans le domaine des mathématiques sont au nombre de trois :

- Mathématiques financières.
- Mathématiques pour la connaissance de la société.
- Mathématiques nécessaires à l'étude du milieu physique.

Nous ne présentons ci-dessous que la seconde rubrique.

Rubrique 2 : mathématiques pour la connaissance de la société

CONTENUS

1. Réalisation d'enquêtes
    - Types d'enquêtes
    - Élaboration et maniement de questionnaires
    - Élaboration d'échantillons :
        - Échantillons aléatoires simples
        - Échantillons aléatoires systématiques
        - Échantillons aléatoires stratifiés
        - Échantillons par quotas
        - Échantillons non aléatoires
2. Indices statistiques
    - Indices simples et indices composés
    - Indice de Laspeyres
    - Indices démographiques : taux de natalité, de mortalité, de croissance de la population
    - Indices économiques : indice des prix, taux d'inflation, indices de croissance...
3. Élections
    - Circonscriptions électorales
    - Vote nominal, vote par listes ouvertes ou fermées
4. Systèmes de répartition des candidats
    - Système majoritaire
    - Systèmes proportionnels : la loi de Hont

PROCÉDURES

1. Interprétation et utilisation de termes d'origine statistiques pour la description des différents types d'enquêtes.
2. Élaboration, interprétation et utilisation des indices statistiques à des intentions diverses.
3. Élaboration, interprétation et évaluation des indices statistiques les plus connus.

4. Utilisation de représentations graphiques d'indices statistiques pour décrire l'état et l'évolution de la société, en relation avec différents concepts.
5. Description verbale d'enquêtes, pour la réalisation et l'interprétation desquelles on en réfère à l'utilisation d'une terminologie adéquate.
6. Incorporation dans le langage quotidien des termes spécifiques du processus électoral.
7. Élaboration de questionnaires à différentes intentions.
8. Élaboration de différents types d'échantillons, évaluation préalable de l'efficacité de ceux-ci, en adéquation avec le but de l'enquête et les moyens dont on dispose.
9. Conception et utilisation d'algorithmes de calculs pour différents types d'indices statistiques, en accord avec le but que l'on poursuit.
10. Utilisation d'algorithmes pour calculer les indices d'utilisation courante en utilisant des données de diverses provenances (supposées [supuestos], ou venant des médias).
11. Élaboration, utilisation et évaluation critique des systèmes électoraux, et en particulier pour l'élection des représentants des élèves dans l'institution scolaire.

ATTITUDES

1. Confiance en ses propres possibilités pour affronter la lecture critique de nouvelles ou d'informations de caractère social où interviennent des paramètres statistiques.
2. Habitude d'affronter avec un esprit critique les nouvelles ou informations présentées par les médias, relatives à la description de la société ou des processus électoraux.
3. Disposition favorable au contrôle systématique des résultats dans des situations de comptage, de choix d'échantillons, de réalisation de calcul, d'interprétation de résultats, situations qui se réfèrent à la réalisation d'enquêtes ou aux processus électoraux.
4. Sensibilité et goût pour la présentation soignée et claire du but poursuivi et des résultats obtenus, dans des situations relatives aux enquêtes ou aux élections.
5. Intérêt et respect pour les propositions, stratégies de calcul, solutions (et leurs interprétations) distinctes des siennes propres dans l'obtention et la transformation de données relatives à des groupes sociaux et aux processus électoraux.
6. Reconnaissance et évaluation du travail en équipe comme moyen efficace pour réaliser des travaux d'investigation sociale.
7. Curiosité pour rechercher des relations entre divers indicateurs sociaux.
8. Reconnaissance et évaluation de la présence des mathématiques dans les sciences sociales

(I), comme Italie

(Source : Programmi Scolastici Pirola. Milano 1972)

1- Description de la scolarité

Ecole élémentaire : 5 ans
Ecole moyenne obligatoire : 3 ans
Ecole secondaire supérieure : 5 ans
Elle se présente sous la forme de deux cursus parallèles : Gymnase supérieur (2 ans) + Lycée classique (3 ans), ou Lycée scientifique : 5 ans. Il y a également un cycle 'artistique' en 4 ans.

2- Place des mathématiques

Au gymnase supérieur : 2 heures / semaine (sur 27 semaines)
Au lycée classique : en 1ère année : 3 heures / semaine (sur 28), en 2ème et 3ème années : 2 heures / semaine (sur 28 ou 29)
Au lycée scientifique : en 1ère année : 5 heures / semaine (sur 25), en 2ème année : 4 heures / semaine (sur 27), en 3ème, 4ème, 5ème années : 3 heures / semaine (sur 28 à 30)

3- Place des probabilités-statistiques

A- Ecole primaire

Le programme comporte 4 titres :

- Les problèmes
- Arithmétique
- Géométrie et mesure
- Probabilités, statistique, informatique

B- Ecole moyenne obligatoire

Le programme comporte 7 "thèmes" :

- La géométrie, première représentation du monde physique
- Ensembles de nombres
- Mathématiques du certain et mathématiques du probable
- Problèmes et équations
- La méthode des coordonnées
- Transformations géométriques
- Correspondances. Analogies structurelles.

C- Gymnase supérieur et lycée classique (programmes de 1972)

Dans chaque classe, deux chapitres : Algèbre. Géométrie.
En dernière année, le chapitre "Algèbre" est remplacé par " Trigonométrie".
Ni probabilités, ni statistiques.

D- Lycée scientifique (programmes de 1972)

Pas de probabilités ni de statistiques.

On voit que l'enseignement de la "pensée aléatoire" se développe actuellement sur l'école élémentaire et l'école moyenne, mais est abandonné ensuite (les programmes datent de 1972).

En 1991, une commission présidée par Beniamino BROCCA a publié des propositions pour l'école secondaire supérieure ("Plans d'étude de l'école secondaire supérieure et programmes des deux premières années"), qui sont actuellement en usage dans les classes expérimentales (et aussi dans d'autres) ; ils serviront de base aux futurs programmes. Ces propositions font une place non négligeable aux statistiques et aux probabilités.

Dans ce projet on trouve deux programmes (A et B) :
Programme A (sections classique, linguistique, socio-psycho-pédagogique et artistique). 4 heures / semaine.
Programme B (sections scientifique, scientifico-technologique, technologique et économique). 5 heures / semaine.
Chacun des deux programmes comporte 5 thèmes :

- Thème 1 : Géométrie du plan et de l'espace

- Thème 2 : Ensembles de nombres et calcul
- Thème 3 : Relations et fonctions
- Thème 4 : Eléments de probabilités et de statistique
- Thème 5 : Eléments de logique et d'informatique.

Programmes de probabilités et statistiques

A- Ecole primaire
Commentaires relatifs au titre "Probabilités, statistique, informatique" :
Une importance éducative considérable est (...) reconnue aux concepts, principes et capacités liés à la représentation statistique des faits, phénomènes et processus, et à l'élaboration de jugements et de prévisions dans des conditions d'incertitude.
L'introduction des premiers éléments de probabilités, qui sont placés à la fin du cours élémentaire, a pour but de préparer chez l'enfant un terrain intuitif sur lequel on pourra, dans une phase ultérieure, fonder l'analyse rationnelle des situations d'incertitude. La définition classique de la probabilité comme « rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles dans des situations symétriques » ne peut être assumée comme point de départ, mais constitue plutôt le point d'arrivée d'une activité bien graduée.
Dans le déroulement de cet itinéraire, on peut réaliser la construction et l'analyse de procédures et d'algorithmes - numériques ou non numériques -, ainsi que l'usage initial, mais cohérent et productif, d'instruments adéquats de calcul et de traitement des informations.

Objectifs des deux premières années
Dans des situations-problèmes tirées de la vie réelle et des jeux, utiliser de façon significative et cohérente les expressions : peut-être, il est possible, il est certain, je ne sais pas, il est impossible, etc.

Objectifs des troisième, quatrième et cinquième années
1. Réaliser des observations et des recueils de données statistiques simples, tracer des diagrammes en barres, des histogrammes, des polygones... ; calculer des moyennes arithmétiques et des pourcentages en utilisant, si besoin, des calculettes ; inversement, interpréter des représentations et des calculs faits par d'autres.
2. Confronter, dans des situations de jeux (avec des cartes, des pièces, des dés ou autres) les probabilités des diverses éventualités, grâce à l'usage de représentations adéquates.
3. Représenter, énumérer et dénombrer (par ex. de graphes en arbre) tous les cas possibles dans des situations combinatoires simples, sans en déduire aucun élément d'évaluation de probabilité.
4. Tracer et interpréter des diagrammes de flux (?) pour la représentation de procédures commodes (??)

Extrait des "indications méthodologiques" :
Le recueil des données, effectué dans des contextes variés, et leur organisation de façon adéquate, conduiront aux premières notions de statistique descriptive, grâce aussi à leur visualisation immédiate.
En ce qui concerne les premiers éléments de probabilités, il est important que l'enfant soit conduit à accepter sans trouble des situations d'incertitude. On peut très bien atteindre ce but au moyen du jeu : beaucoup de jeux ont un caractère aléatoire, ou qui s'y ramène par l'attribution de rôles particuliers (?). L'habileté du joueur consiste à savoir choisir, parmi les nombreuses possibilités, celle qui offre la plus grande probabilité de gagner ; il s'agit donc, en premier lieu, de conduire l'enfant à réaliser des comparaisons de probabilités. Ceci peut être fait d'abord en termes très vagues, puis dans des situations bien schématisées. (...)
En définitive, l'introduction à la pensée et à l'activité mathématique doit consister en premier lieu à construire, surtout là où se manifeste une carence, une large base expérimentale de faits, phénomènes, situations et processus, sur laquelle peuvent se développer les connaissances intuitives, les procédures et les algorithmes de calcul, ainsi que les formalisations les plus élémentaires de la pensée mathématique.
On favorisera ainsi la formation d'une attitude positive envers les mathématiques, comprises, soit comme un instrument valide de connaissance et d'interprétation critique de la réalité, soit comme une fascinante activité de la pensée humaine.

B- Ecole moyenne obligatoire
Extrait des "orientations pour la "lecture" des contenus :
L'introduction des éléments de statistique descriptive et de la notion de probabilité a pour but de fournir un outil fondamental pour l'activité de mathématisation, d'une valeur interdisciplinaire considérable. La notion de probabilité découle, soit comme conclusion naturelle des arguments de statistique, soit à partir d'expériences simples de tirages au hasard.
L'enseignant, évitant de présenter une définition formelle de la probabilité, aura soin, au contraire, de mettre en garde les élèves contre les méprises relatives, soit à l'interprétation des données statistiques, soit à l'utilisation

de la probabilité dans la prévision des événements. Les applications ne devront pas dépasser le calcul de la probabilité dans des situations très simples, liées à des problèmes concrets (par exemple de génétique, d'économie, de jeux).

Thème 3 : Mathématiques du certain et mathématiques du probable.

a) Affirmations de type vrai /faux et affirmation de type probabiliste. Usage correct des connecteurs logiques (et, ou, non) : leur interprétation comme opérations sur les ensembles et leurs applications aux circuits électriques.
b) Relevés statistiques et leur représentation graphique (histogramme, polygone...) ; fréquence, moyenne.
c) Evénements aléatoires ; notion de probabilité et applications.

2- Ecole secondaire supérieure (projet BROCCA 1991) : les deux premières années

Thème 4 : Eléments de probabilités et de statistique (Contenu commun aux deux programmes.)

1. Exemples d'espaces probabilisés : événements aléatoires, événements disjoints et "règle de la somme".
2. Probabilité conditionnelle, probabilité composée. Evénements indépendants et "règle du produit".
3. Eléments de statistique descriptive : recueil de données, valeurs de synthèse, indices de dispersion.

Commentaires:

L'étude des probabilités, d'une part développe une approche correcte de l'analyse des situations dans des conditions d'incertitude, en fournissant des outils pour traiter de façon rationnelle les informations appropriées et prendre des décisions cohérentes, et, d'autre part, fournit de nouveaux domaines dans lesquels il est possible de développer des exemples intéressants de mathématisation.

Par la consolidation d'une mentalité probabiliste qui guide également l'élève dans les jugements de la vie courante, un cheminement raisonné vers les différentes définitions de la probabilité et une richesse d'exemples tirés de situations réelles sont essentiels.

L'étude des probabilités constitue en outre un contexte dans lequel la formalisation et l'abstraction peuvent faire parvenir à une structuration axiomatique de la théorie. Dans la résolution des problèmes, il est souhaitable d'utiliser une grande variété d'outils tels que les dénombrements, les diagrammes d'Euler-Venn et les graphes de types variés.

Les contenus de la partie statistique constituent l'occasion d'une mise au point plus rigoureuse et formalisée de concepts et d'instruments déjà construits en partie, suggérant une familiarisation plus grande à travers des applications à des problèmes situés dans un contexte pluridisciplinaire. Pour mettre l'élève en mesure de profiter correctement et de façon critique des informations statistiques qui lui parviennent sous forme variée, l'analyse et l'interprétation des données présentées sous des formes diverses revêtent une importance particulière : de quel tableau à quel graphique ou à quelle vue plus synthétique...

(IRL), comme Irlande

Le système irlandais est assez complexe.

Le niveau « secondaire moyen »

Ce qui correspond au collège français dure 3 ans avec à chaque fois 3 niveaux (A, pour les meilleurs, B et C), et se prépare dans 4 types d'écoles au choix : Secundary school, Vocational schoom, Comprehensive school et Community school. L'examen final, le « Junior certificate », se passe vers 15 ans, et correspond au brevet des collèges français. Les élèves choisissent dans chaque matière le niveau auquel ils désirent passer l'examen : High level (A), Ordinary level (B), Foundation level (C).

Les statistiques dans les programmes de mathématiques :

Aucune approche de l'aléatoire dans les programmes irlandais. Uniquement des statistiques descriptives.

<u>En première année</u> (correspondant à la 5ème française) :
Rien

<u>En deuxième année, niveau A</u> :
Dessin et interprétation de diagrammes en bâton et 'en camembert' (pie-charts), de graphiques chronologiques et d'histogrammes. Tableaux de nombres exprimés comme tables de fréquences. Moyenne et mode. Fréquences cumulées. Etendue, médiane, intervalle inter-quartile. Moyenne d'une distribution groupée.

<u>En deuxième année, niveaux B et C</u> :
Dessin et interprétation de diagrammes en bâtons, de diagrammes 'en camembert' (pie-charts), de graphiques chronologiques.

<u>En troisième année, niveaux B et C</u> :
Tableaux de nombres exprimés comme tables de fréquences. Moyenne et mode.

Le niveau « secondaire supérieur »

Source : [MS]
Il y a encore trois niveaux pour le « Leaving certificate » (équivalent au baccalauréat français), qui se prépare en seulement deux ans.

Les statistiques dans les programmes de mathématiques :

Foundation level :

1. Principe fondamental du dénombrement : si une tâche peut être réalisée par x chemins différents, et si une autre tâche peut être réalisée par y chemins différents, alors la 1ère tâche suivie de la 2nde peut être réalisée par xy chemins différents.	*Utilisation sur des exemples.*
2. Probabilités discrètes : cas simples. Pour des issues équiprobables, probabilité = (nombre de cas favorables) / (nombre de cas possibles).	*Exemples comprenant : lancers de pièces, lancer de dés, distributions de dates d'anniversaire, tirages d'une ou deux cartes, et distribution des sexes.*
3. Statistiques : représentation de donnée statistiques par un tableau ou un graphique. Distribution des fréquences de séries groupées ou non-groupées. Fréquences cumulées, graphique des fréquences cumulées. Médiane. Moyenne pondérée. Concept de dispersion : écart-type d'un tableau d'au plus 10 valeyrs.	*On insistera sur l'utilisation de la calculatrice. La médiane sera obtenue à partir d'un tableau ou d'un graphique de fréquences. Il est exclu de déterminer la médiane à partir de l'histogramme (mais l'histogramme lui-même est au programme).*

Ordinary & higher level :

1. Principe fondamental du dénombrement : si une tâche peut être réalisée par x chemins différents, et si une autre tâche peut être réalisée par y chemins différents, alors la 1ère tâche suivie de la 2nde peut être réalisée par xy chemins différents.
Permutations et combinaisons : exemples concrets (exemples avec répétitions exclus)

2. Probabilités discrètes : cas simples. Pour des issues équiprobables, probabilité = (nombre de cas favorables) / (nombre de cas possibles). Exemples comprenant : lancers de pièces, lancer de dés, tirages de cartes, et distribution des sexes, etc.

3. Statistiques : calcul et interprétation de la moyenne pondérée et de l'écart-type.

(L), comme Luxembourg

Organisation des études secondaires

1. Division inférieure (correspondant aux trois premières années du collège français)

1.a. Classe de 7ème , ou classe d'orientation (correspondant à la 6ème française)
4 heures hebdomadaires de mathématiques

1.b. Classes de 6ème et de 5ème : option 'classique' (avec latin) ou option 'moderne'
3 h de math en 6ème
3,5 h de math en 5ème

2. Division supérieure (correspondant à 3ème, 2nde, 1ère et terminale françaises)

2.a. Classe de quatrième et de troisième : choix d'une orientation littéraire ou d'une orientation scientifique ; dans chacune des deux branches, séparation 'classique' (latin + grec) ou moderne.
3 h de math en 4ème et 3ème littéraire
4 h de math en 4ème et 3ème scientifique

2.b Classes seconde et de première : spécialisation des séries de baccalauréat :

Séries littéraires : A1 = langues
A2 = sciences humaines et sociales
E= arts plastiques
F = musique

Séries scientifiques : B = mathématiques et sciences physiques
C = mathématiques et sciences naturelles
D = mathématiques et sciences économiques

La commission nationale pour les programmes de mathématiques conçoit tous les programmes, sauf ceux des secondes et premières A2, E, F et D (qui dépendent de la commission nationale des programmes d'économie).

Horaires :

	A1	A2	E	F	B	C	D
Seconde	3	3	3	3	7	5	5
Première	0	3	3	3	9	6	5
Coeff exam.	0/23	2/23	2/23	2/23	7/23	4/23	3/23

Enseignement des probabilités et statistiques

Des cours assez structurés existent depuis longtemps dans les séries A2, E, F et D. Il n'est pas prévu de modifier leurs programmes actuels.
De nouveaux programmes ont été mis en place en 2000/2001 dans les autres séries. Tous les programmes se trouvent dans [HP].

Il s'agit essentiellement de représentations de données statistiques (tableaux diagrammes) et d'apprentissage du vocabulaire (effectif, répétition, fréquence, moyenne, mode) en classes de 6ème et 5ème.

En 4ème, on demande aux élèves de savoir organiser et représenter les données, de maîtriser les notions de base, et de savoir déterminer les valeurs centrales d'une série statistique (moyenne, médiane, quartiles).

Les probabilités ne sont abordées qu'à parti de la classe de seconde (équivalent à la 1ère française), en section B (scientifique) :

Compétences à développer :

- Connaître et savoir utiliser les règles et propriétés élémentaires des probabilités simples et conditionnelles.
- Savoir calculer l'ajustement linéaire d'un nuage de points.
- Savoir calculer le coefficient de corrélation.

Voici un exemple de la « définition » de la probabilité dans le manuel officiel en vigueur au Grand-Duché ([EM5]).

> DEFINITION
> La **probabilité** veut mesurer le « nombre de chances » de chaque événement d'un phénomène fortuit.
> Quelques règles habituelles aux mesures sont alors d'application :
> A l'événement impossible, rien ne se produit, correspond la probabilité 0 ;
> A l'événement certain, n'importe quelle épreuve se produit, correspond la probabilité 1 ;
> Tout autre événement a ainsi une probabilité comprise entre 0 et 1 ;
> Si deux événements n'ont rien en commun, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise égale la somme des probabilités de chacun d'eux.
>
> Ces considérations se résument dans la définition :
> **Une loi de probabilité est une fonction P qui, a chaque événement, associe un nombre entre 0 et 1, de sorte que :**
> **$P(\Omega) = 1$,**
> **$P(\varnothing) = 0$,**
> **Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.**

En classe de $1^{ère}$ B, C et D (classes terminale), le programme correspond aux compétences suivantes :

Savoir reconnaître et modéliser des situations où intervient l'analyse combinatoire :

- Permutations, arrangements, combinaisons,
- Propriétés des coefficients binomiaux,
- Triangle de Pascal et binôme de Newton,
- Probabilités élémentaires.

En avril 2001, nous avons reçu de Jacques BAIR, directeur de l'I.R.E.M. de LIEGE-LUXEMBOURG, un message électronique dont nous extrayons ces quelques phrases :

> *En ce qui concerne le Luxembourg, je crois savoir qu'une commission, à laquelle l'I.R.E.M. de LIEGE collabore, se penche sur l'enseignement des statistiques dans les deux dernières années du secondaire en sciences économiques : il y aura donc du changement dans l'air (mais, probablement, pas avant 2 à 3 ans).*

(RO), comme Roumanie

Organisation de l'enseignement :

- Enseignement primaire : 4 ans, classes I à IV
- Enseignement moyen (gimnazial), correspondant au collège : 4 ans, classes V à VIII
- Enseignement de lycée (liceal) : 4 ans, classes IX à XII.
- Ecoles normales d'instituteurs : 3 ans, classes XI, XII et XIII (recrutement en fin de X$^{\text{ème}}$).

Au lycée, on distingue 3 filières : A, B et C ; A étant celle où les maths sont le plus approfondies (5 h par semaine) et C celle où elles le sont le moins (3 h par semaine en IX$^{\text{ème}}$-X$^{\text{ème}}$ et 2 heures en XI$^{\text{ème}}$-XII$^{\text{ème}}$).

Aucun enseignement de statistique ni de probabilité au niveau du collège, si ce n'est un chapitre sur les pourcentages en VI$^{\text{ème}}$.

La filière A (forte dominance en mathématique) au Lycée

Classe de IX$^{\text{ème}}$:

Cinq heures de mathématiques par semaine. Pas de probabilités ni de statistiques.

Classe de X$^{\text{ème}}$:

Cinq heures de mathématiques par semaine. Répartition prévue pour cet horaire :

Enseignement et apprentissage de l'algèbre : 90 heures (dont 35 heures de probabilités et statistiques, détaillées ci-dessous) et de la géométrie : 58 heures.
Epreuves écrites et débats sur les résultats : 9 heures
Révision finale : 10 heures
A la disposition du professeur : 8 heures.

CONTENU DÉTAILLE DES 3 CHAPITRES *DÉNOMBREMENTS, STATISTIQUES* ET *PROBABILITÉS*

III. **Raisonnement par récurrence et dénombrements (18 heures)**
Méthode du raisonnement par récurrence et applications (4 heures)
Eléments de la théorie combinatoire ; ensembles ordonnés ; permutations ; arrangements ; combinaisons. Applications (5 heures).
Binôme de Newton et applications. Identités avec les combinaisons et applications (5 heures)
Suites, suites arithmétiques, suites géométriques (4 heures).

IV. **Eléments de statistiques mathématiques (9 heures).**
Données statistiques ; regroupements des données ; types de regroupements statistiques ; fréquence absolue, fréquence relative ; types de tableaux statistiques ; exemples (2 heures).
Représentation des séries statistiques par
des diagrammes représentés par des carrés, des cercles, des rectangles ;
des diagrammes de structure (rectangles de structure et cercle de structure) ;
histogramme et polygone des fréquences ;
chronogrammes (historiogrammes) ;
diagrammes en tuyaux d'orgue. Applications (2 heures)
Les moyennes : moyenne arithmétique simple, moyenne pondérée, propriétés ; moyenne harmonique, simple et pondérée ; moyenne quadratique, simple et pondérée ; moyenne géométrique, simple et pondérée (2 heures).
Applications : étendue, écart moyen, variance, écart-type, coefficient de corrélation (3 heures).

V. **Eléments de calcul des probabilités (8 heures).**
Notion d'événement, événement certain, événement impossible ; opérations avec les événements ; événements incompatibles, événements compatibles (3 heures).
Notion de probabilité : fréquence relative d'un événement, probabilité d'un événement, champ fini de probabilité ; probabilités conditionnelles ; applications (3 heures).
Schémas classiques de probabilités : Poisson et Bernoulli (2 heures).

Classe de XI$^{\text{ème}}$ et de XII$^{\text{ème}}$:

Plus d'enseignement de probabilités ni de statistiques.

La filière B (dominance en mathématique moyenne) au Lycée

En statistique et probabilités (classe de X^{ème}), le contenu du programme est exactement le même que dans la filière A.
Il n'y a que 4 heures hebdomadaires, donc compter 20 % de cours en moins (approfondissement certainement moins poussé).

La filière C (faible dominance en mathématique) au Lycée

Il n'y a cette fois que trois heures hebdomadaires. Les probabilités et statistiques ne s'enseignent également que dans la classe de X^{ème} :

CONTENU DÉTAILLE DES 3 CHAPITRES *DÉNOMBREMENTS, STATISTIQUES* ET *PROBABILITÉS*

III. **Raisonnement par récurrence et dénombrements (12 heures)**
Méthode du raisonnement par récurrence et démonstration de quelques égalités simples (3 heures)
Eléments de la théorie combinatoire ; ensembles ordonnés ; permutations ; arrangements ; combinaisons. Applications (3 heures).
Binôme de Newton et applications. Applications simples (3 heures)
Suites arithmétiques, suites géométriques (3 heures).

IV. **Eléments de statistiques mathématiques (8 heures).**
Données statistiques ; fréquence absolue, fréquence relative ; types de tableaux statistiques ; exemples (2 heures).
Représentation des séries statistiques par
- des diagrammes représentés par des carrés, des cercles, des rectangles ;
- des diagrammes de structure (rectangles de structure et cercle de structure) ;
- histogramme et polygone des fréquences ;
- chronogrammes (historiogrammes) ;
- diagrammes en tuyaux d'orgue. Applications (1 heure)

Les moyennes : moyenne arithmétique simple, moyenne pondérée, propriétés ; moyenne harmonique, simple et pondérée ; moyenne quadratique, simple et pondérée (2 heures).
Applications : étendue, écart moyen, variance, écart-type (3 heures).

V. **Eléments de calcul des probabilités (6 heures).**
Notion d'événement, événement certain, événement impossible ; opérations avec les événements ; événements incompatibles, événements compatibles (3 heures).
Notion de probabilité : fréquence relative d'un événement, probabilité d'un événement, champ fini de probabilité ; probabilités conditionnelles ; applications (3 heures).

(RU), comme Russie

La loi sur l'enseignement, promulguée par Eltsine en 1992, est une des plus « libérales » qui soient :

- Très grande liberté des établissements et des communes relativement aux programmes et aux choix des manuels (le Ministre de l'Education n'est qu'un « conseiller »).
- Les types d'établissements sont très variés (publics, privés, spécialisés...) et les programmes sont très variables. Dans la pratique, et grosso modo, 70% de l'horaire est fixé au niveau fédéral (Fédération de Russie), 20% au niveau des républiques, régions autonomes, ... et 10% au niveau de l'établissement.

Actuellement, les études à « l'école » durent 11 ans : de la 1ère classe (6 ans) à la 11ème classe (baccalauréat « attestat », 17 ans). Cet « attestat » ne dispense pas des concours d'entrée dans les universités. Les quatre premières années constituent l'enseignement primaire (maître unique). En fin de 9ème classe, les élèves passent un examen national, qui marque la fin de la scolarité obligatoire. Dans les régions de Moscou et de Saint-Pétersbourg, 70% des jeunes poursuivent en 10ème et en 11ème. Ces 11 années d'études se font dans le même établissement ; il y a cependant des exceptions : des écoles « primaires » (de la 1ère à la 4ème classe), et des lycées spécialisés (de la 10ème à la 11ème, ou de la 9ème à la 11ème, voire de la 8ème à la 11ème).

Devant cette trop grande liberté, le gouvernement a voulu réagir. En 1997, une réforme de l'Education (que l'on pourrait résumer par « faire mieux avec moins de moyens »), initiée par Eltsine, n'a pas fonctionné.
En 2000, le président Poutine a publié un décret de « modernisation » de l'Education. Les points les plus importants :

- On pose explicitement la question de l'évaluation du système éducatif.
- On introduit les nouvelles technologies (informatique, calculatrices, internet...)
- On envisage un autre examen terminal, qui serait à la fois diplôme de fin d'études et porte d'entrée à l'Université.
- On envisage de prolonger d'un an les études (jusqu'à une 12ème classe, 18 ans), en prolongeant d'un an aussi la scolarité obligatoire (jusqu'à la 10ème classe, 16 ans).

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Au niveau fédéral : de la 1ère à la 10ème classe, il est prévu 4 séquences hebdomadaires de mathématiques (une séquence dure 45 minutes, prolongée de 10 minutes de discussions possibles avec quelques élèves en particulier), plus 2 séquences d'informatique en 9ème et en 10ème.
Au niveau local, communes ou établissements disposent d'un volant de 1 h hebdomadaire en 1ère classe, de 2 h de la 2ème à la 7ème, et de 3 h de la 8ème à la 10ème. Une partie de ce volant peut être consacré aux mathématiques.
En outre, chaque élève peut choisir (selon les disponibilités offertes par l'établissement) jusqu'à 5 h hebdomadaires d'options ... ce qui peut donner de 0 à 5 h de mathématiques supplémentaires. Ce dernier cas n'existant que dans de rares lycées « spécialisés en mathématiques : lycées math/physique, math/économie, etc.

LES OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

- Nouveau (décret 2000) : les mathématiques font partie de l'enseignement « humaniste » (on pourrait traduire par culture et éducation du citoyen).
- Nouveau (décret 2000) : l'enseignement est différencié, au niveau fédéral, selon les types d'établissement. Pour les deux dernières années (10ème et 11ème classes), il y a une série A (littéraire) avec 3 h de mathématique, une série B avec 5 heures, et une série C avec 9 heures. Les séries A et C sont rares, et n'existeront que dans des lycées spécialisés. La majorité des élèves auront donc 5 séquences hebdomadaires de mathématiques (au lieu de 4 auparavant).
- Nouveau (décret 2000) : pour la première fois en Russie, les statistiques et probabilités font partie intégrante des mathématiques.

LES PROBABILITES ET STATISTIQUE AU NIVEAU 'COLLEGE'

Ce niveau va actuellement de la 5ème classe (10 ans) à la 9ème classe (14 ans), classe d'examen et fin actuelle de la scolarité obligatoire.
Ce niveau programme est actuellement expérimenté (depuis 4 ans).

Son principal objectif est la formation du citoyen responsable.
L'approche des probabilités y est faite grâce à la statistique.

5ème classe (10 ans) :
- un peu de combinatoire (non liée aux probabilités, mais à la logique), sans aucune formule
- premières notions d'événements aléatoires et de « chances », sans aucune formalisation ni calcul
- règles de jeux
- tableaux et diagrammes (en particulier pour représenter les résultats de sondages publics)

6ème classe (11 ans)
- diagrammes (en bâtons, circulaires)
- un peu de combinatoire (à l'aide de représentations en arbres)
- « protocoles » d'expériences aléatoires et observation des fluctuations (avec l'idée sous-jacente de vérification d'une hypothèse)

7ème classe (12 ans ; début de la formalisation)
- caractères statistiques (mode, médiane, moyenne)
- permutations ; factorielle n !
- fréquence d'apparition d'un événement aléatoire ; relative stabilisation de la fréquence et notion de probabilité

8ème classe (13 ans)
- moyennes pondérées ; activités autour des diverses moyennes
- hypothèse d'équiprobabilité et vérification ou infirmation expérimentale (exemple : on lance 2 pièces, il y a 3 issues : sont-elles équiprobables ?)
- probabilités « géométriques »

9ème classe (14 ans)
- études et enquêtes statistiques (avec introduction de caractères de dispersion)
- les probabilités et les statistiques « autour de nous » (dans la vie courante, les jeux, les médias…)

Il s'agit là de ce qui devrait « en principe » être enseigné dans toutes les écoles ; la plupart de ces informations nous proviennent d'Evgheni BOUNOMOVITCH, député à la DOUMA et responsable des questions d'enseignement, adhérent de la RAYM[1], que nous avons pu rencontrer à plusieurs reprises soit dans des séminaires en Russie, soit lors des Journées Nationales de l'A.P.M.E.P. (et en particulier à Nice, en octobre 2000, où il animait un atelier sur ce thème).
Bien sûr, il est très difficile de savoir ce qui se fait réellement sur le terrain, d'autant plus que ce programme est radicalement nouveau, en rupture totale avec les « habitudes » antérieures, et que les professeurs n'ont pas été formés en probabilités et statistiques (la Russie n'étant pas le seul pays où la formation ne précède pas les innovations dans les programmes...).

[1] Association Russe des Enseignants de Mathématiques, équivalent de l'A.P.M.E.P.

(SK), comme Slovaquie

Nous n'avons pas d'indications très précises sur la structure des études dans ce pays.
Nous n'avons eu connaissance que du programme des 5 années de « lycée » (sans savoir à quels âges cela correspond).

1ère année :

Eléments d'analyse combinatoire.

2ème année

STATISTIQUES
a) Séries statistiques à une variable
- Répartition d'une population en classes
- Effectifs, fréquences

b) Séries statistiques à une variable quantitative
- Effectifs cumulés, fréquences cumulées
- Caractéristiques de position et de dispersion : moyenne et écart-type

Travaux pratiques :
Démarche propre à la statistique, à partir de documents authentiques issus de la biologie, des sciences humaines, etc. :
- Lecture de données relatives à une population
- Choix des résumés (regroupements, indicateurs...) de description de la population ; présentation en tableaux, en diagrammes.
- Exécution des calculs (calculatrice, ordinateur).
- Présentation des résultats (histogramme, graphique...)
- Contrôle et analyse critique des résultats

3ème année :

Rien

4ème année :

ANALYSE COMBINATOIRE
a) Cardinal de l'ensemble A^p des p-listes d'éléments d'un ensemble fini A. Cas où les éléments sont deux à deux distincts : dénombrement des arrangements et des permutations, notation factorielle (n!).
b) Parties de cardinal donné d'un ensemble fini : dénombrement des combinaisons. Coefficients binomiaux, propriétés.
c) Triangle de Pascal, formule du binôme de Newton.

5ème année :

PROBABILITES SUR UN ENSEMBLE FINI
- Expérience aléatoire. Evénements, événements élémentaires, probabilité d'un événement. Evénements disjoints (ou incompatibles), événements contraires, réunion et intersection de deux événements.
- Cas où les événements élémentaires sont équiprobables.
- Evénements indépendants

Travaux pratiques :
- Exemples simples d'emploi de partitions et de représentations (arbres, tableaux) pour dénombrer des éventualités.
- Exemples simples d'études de situations classiques (urnes, jeux, etc.)

Option mathématique en 5ème année :

PROBABILITES SUR UN ENSEMBLE FINI
a) <u>Variable aléatoire réelle</u> prenant un nombre fini de valeurs, et loi de probabilité associée ; fonction de répartition, espérance mathématique, variance.
- Exemples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux, schéma de Bernoulli...)

- Exemples simples de description et d'étude d'expériences aléatoires à l'aide d'une variable aléatoire.

b) Probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle ; relation $p(A \cap B) = p(A/B).p(B)$

Indépendance de deux événements.

Formules des probabilités totales :

Les événements B_1, B_2, B_n constituant une partition de E, pour tout événement A on a $p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \ldots + p(A \cap B_n)$ et, pour tout k, $p(A \cap B_1) = p(A/B_k)p(B_k)$.

ANNEXES

ACTIVITÉS EXTRAITES DE MANUELS ÉTRANGERS

On trouvera dans cette annexe une grande partie des chapitres d'initiation aux probabilités, extraite de manuels de collège (E.S.O.) utilisé en Espagne [JRV], et des activités inédites extraites de polycopiés utilisés dans les collèges du canton de Neuchâtel (CH).

Pour ce qui est de l'Espagne, nous avons choisi de vous fournir de larges extraits du manuel de 1ère année (correspondant à la 5ème française), pour bien monter comment est faite l'initiation à l'aléatoire à ce niveau.
Nous vous proposons également quelques documents extraits du livre de 4ème année (équivalent à la seconde française). On remarquera une grande similitude entre certains passages ; en effet, chaque notion étudiée une année est toujours reprise dans les années suivantes, mais en approfondissant un peu plus, en présentant les choses de plus en plus « théorisées » : c'est le principe de l'enseignement **en spirale**.
Pour ce qui est de cette 4ème année, nous présentons également le plan (et un ou deux extraits) du chapitre de statistique traitant de la dépendance linéaire, et du chapitre concernant les dénombrements.

Les activités proposées par les Suisses peuvent nous paraître, à première vue, beaucoup plus surprenantes : on se demande si on oserait donner de tels problèmes à des élèves de première ou de terminale en France.

Il s'agit là de « situations-problèmes » proposées aux élèves au moment où ils n'ont pas encore les outils théoriques pour les résoudre. C'est par l'activité ludique et l'expérimentation qu'ils chercheront à apporter des éléments de solution : les notions visées (et en particulier celle d'espérance mathématique, presque partout sous-jacente) s'imprégneront peu à peu chez les élèves, avant que l'enseignant – beaucoup plus tard – n'institutionnalise les notions étudiées.

1. En Espagne

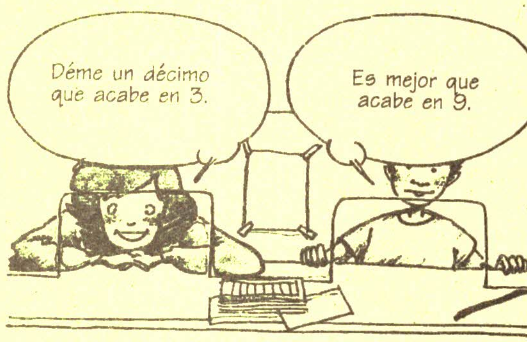
Manuel de 1ère année E.S.O. (correspondant à la 5ème française)

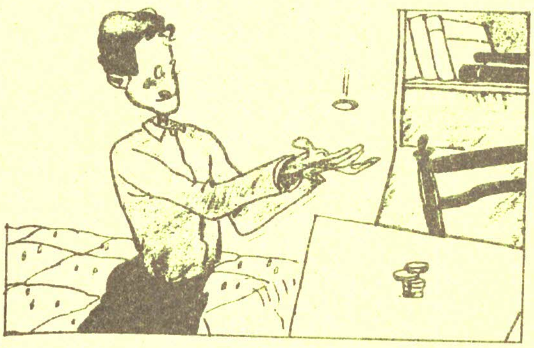
Chapitre « HASARD et PROBABILITÉS »

Activités préparatoires

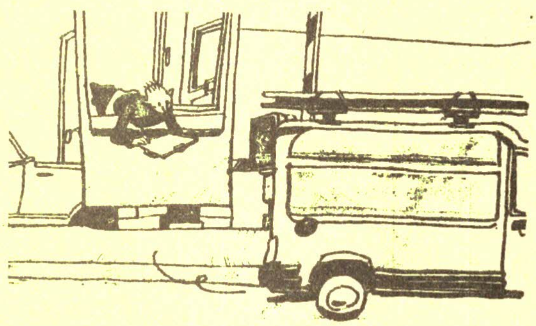
Experiencias de azar

1. Ana y Pedro fueron a comprar un décimo de lotería. Ana dijo: «Déme un décimo que acabe en 3», y Pedro dijo: «Es mejor que acabe en 9». ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Podemos predecir en qué número acabará el primer premio?

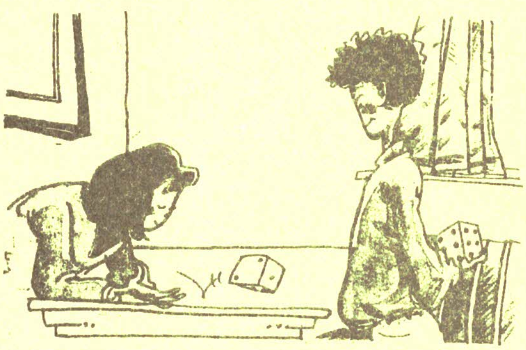




2. Juan está tirando una moneda y ha obtenido 5 caras. Vuelve a tirar la moneda. ¿Podemos predecir si saldrá cara o cruz?



3. En la caseta de peaje de una autopista un empleado está anotando la última cifra de las matrículas de los coches que pasan. A pesar de llevar ya tres horas haciéndolo y tener mucha información acumulada, ¿podrá predecir cuál será el último número de la matrícula del próximo coche?



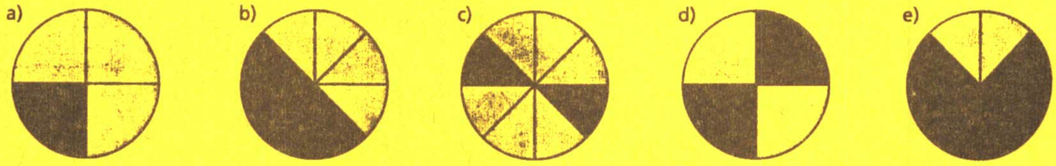
4. Yolanda y Alberto están jugando con un dado cuyas caras están numeradas del **1** al **6**. Pero Alberto es un poco tramposo y ha cambiado el dado por otro que tiene en todas las caras el 6. Cuando lance Yolanda su dado, ¿podremos predecir qué número saldrá? Cuando lance Alberto su dado, ¿podremos predecir qué número saldrá?

El experimento de Yolanda es de azar porque no podemos predecir el resultado, pero el de Alberto no es de azar, ya que de antemano sabemos el resultado.

Una experiencia es de azar si no se puede predecir su resultado.
Se llaman experimentos aleatorios los que dan lugar a experiencias de azar.

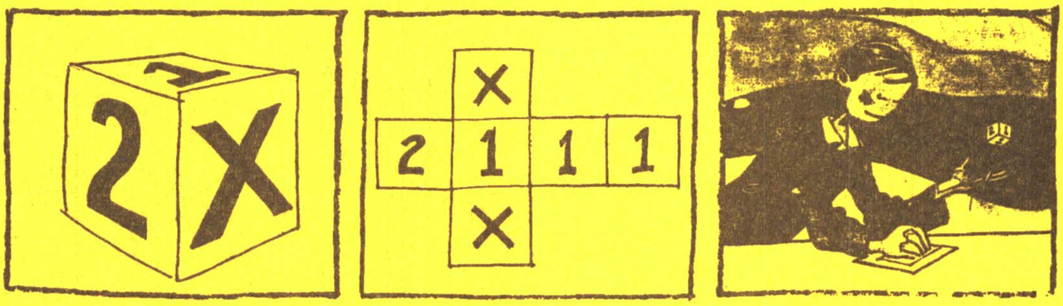
Para practicar

1 Observa las siguientes ruletas:



¿En cuáles de ellas los colores rojo y verde tienen la misma probabilidad de salir?

2 Un dado de quinielas tiene tres caras con un 1, dos caras con una X y una cara con un 2. Si lanzamos el dado, ¿son equiprobables todos los resultados? ¿Qué cara será más fácil obtener? ¿Qué cara será más difícil obtener?



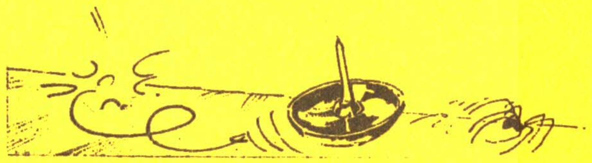
3 Asigna una de estas etiquetas IMPOSIBLE | POCO PROBABLE | BASTANTE PROBABLE | SEGURO a cada uno de los siguientes sucesos.

Traduction :

1. Observe les roulettes suivantes : dans lesquelles d'entre elles le rouge et le vert ont la même probabilité de sortir ?
2. Un dé pour parier a trois faces avec un 1, deux faces avec un X et une face avec un 2. Si on le lance, est-ce que tous les résultats sont équiprobables ? qu'est-ce qui sera le plus facile à obtenir ? qu'est-ce qui sera le moins facile à obtenir ?
3. Attribue une de ces étiquettes « Impossible », « Peu probable », « Fort probable » ou « Certain » à chacun des événements suivants :
   - Cet été à Séville, on dépassera les 20°C.
   - Lancer une pièce 10 fois et obtenir au moins une fois Pile.
   - Lancer un dé 10 fois et obtenir 6 à chaque fois.
   - Voir un bœuf voler.
   - Il neigera cet hiver dans la Sierra Nevada.
   - Obtenir 3 bons numéros au Loto.

3 LA FRECUENCIA RELATIVA Y LA PROBABILIDAD

Si lanzamos una chincheta puede ocurrir que quede con *la punta hacia arriba*, o con *la punta hacia abajo*.

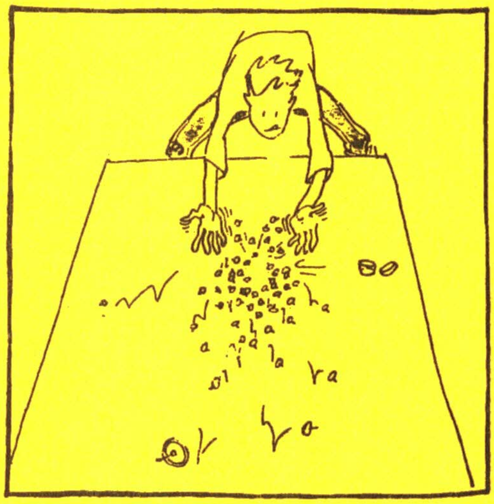


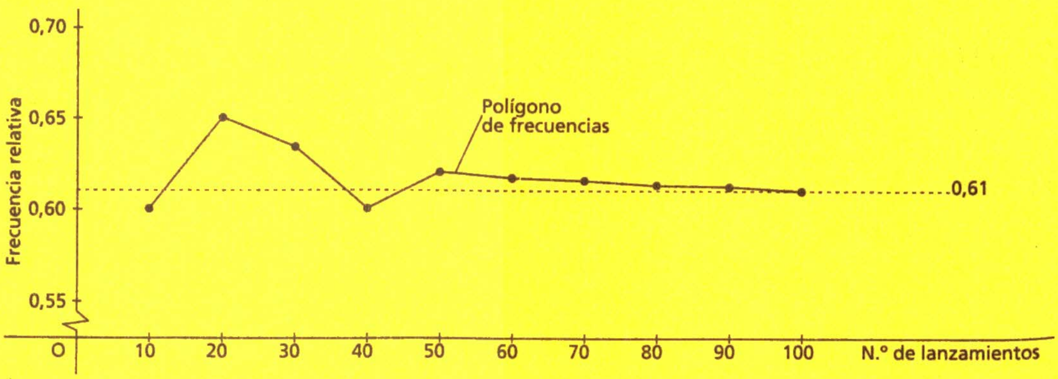
Punta hacia arriba

Punta hacia abajo

Efectuamos 10, 20, 30, ..., 100 lanzamientos de una chincheta y obtenemos:

N.° de lanzamientos	N.° de chinchetas con la punta hacia arriba	Frecuencia relativa de la punta hacia arriba
10	6	$\frac{6}{10} = 0.6$
20	13	$\frac{13}{20} = 0.65$
30	19	$\frac{19}{30} = 0.633$
40	24	$\frac{24}{40} = 0.6$
50	31	$\frac{31}{50} = 0.62$
60	37	$\frac{37}{60} = 0.617$
70	43	$\frac{43}{70} = 0.614$
80	49	$\frac{49}{80} = 0.612$
90	55	$\frac{55}{90} = 0.611$
100	61	$\frac{61}{100} = 0.61$





Representamos en un diagrama el polígono de frecuencias.

Si repites el mismo experimento y dibujas el polígono de frecuencias correspondiente, observarás que las frecuencias relativas del suceso *punta hacia arriba* toman valores aproximados, por exceso o por defecto, en torno a 0,61, con oscilaciones cada vez más pequeñas.

Este número al que se acerca la frecuencia relativa, cuando se realiza un número de pruebas muy grande lo llamamos **probabilidad del suceso**.

Traduction :
Si on lance une punaise, il peut se passer deux choses : elle retombe la pointe vers le haut, ou elle retombe la pointe vers le bas.
Effectuons 10, 20, 30... 100 lancers de la punaise. Nous obtenons :

Nb. de lancers	Nb. de punaises avec la pointe en haut	Fréquence relative de la pointe en haut

(...)
Représentons sur un diagramme le polygone des fréquences.
Si tu répètes la même expérience et si tu représentes le polygone des fréquences correspondant, tu observes que les fréquences relatives de l'événement pointe vers le bas prennent des valeurs approchées, par excès ou par défaut, aux alentour de 0,61, avec des oscillations à chaque fois plus petites.
Ce nombre, vers lequel s'approche la fréquence relative, quand on réalise un très grand nombre d'épreuves, s'appelle la probabilité de l'événement
La fréquence relative d'un événement et sa probabilité tendent à se rapprocher au fur et à mesure que le nombre d'épreuves réalisées est très grand.

5 LA ESCALA DE PROBABILIDAD

■ **¿Qué valores puede tomar la probabilidad de un suceso?**

El menor valor posible de la frecuencia relativa es 0 y el mayor valor posible es 1.

Lo mismo ocurre para cualquier suceso de un experimento aleatorio. Y como la probabilidad de un suceso se aproxima a su frecuencia relativa, se tiene que:

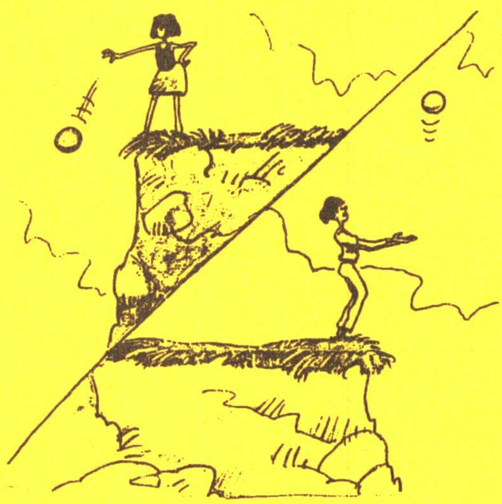
La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.

■ **Probabilidad del suceso seguro**

Tienes un balón entre las manos y lo sueltas. Si lo haces 1 000 veces, ¿cuántas veces caerá al suelo? Evidentemente, las 1 000 veces. La frecuencia relativa de este suceso, que es seguro, es:

$$\frac{1\,000}{1\,000} = 1$$

La probabilidad del suceso seguro es 1.



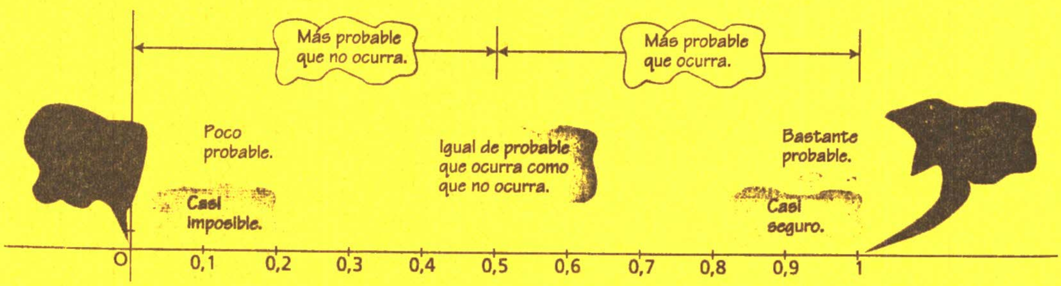
■ **Probabilidad del suceso imposible**

Tienes un balón entre las manos y lo sueltas. Si lo haces 1 000 veces, ¿cuántas veces subirá al techo? Evidentemente, 0 veces. La frecuencia relativa de este suceso, que es imposible, es:

$$\frac{0}{1\,000} = 0$$

La probabilidad del suceso imposible es 0.

■ **Escala de probabilidad**



Traduction :

(...)

La plus petite valeur possible pour la fréquence relative est 0, est la plus grande est 1.

La même chose se passe pour n'importe quel événement dans une expérience aléatoire. Et comme la probabilité d'un événement est proche de sa fréquence relative, on a :

La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1

Probabilité de l'événement certain :

Tu es un ballon entre les mains et tu le lâches. Si tu le fais 1 000 fois, combien de fois tombera-t-il sur le sol ? **Évidemment 1 000 fois. La fréquence relative de cet événement, qui est certain, et : 1 000/1 000 = 1.**

La probabilité de l'événement certain est 1.

Probabilité de l'événement impossible :

Tu es un ballon entre les mains et tu le lâches. Si tu le fais 1 000 fois, combien de fois s'envolera-t-il vers le ciel ? Évidemment zéro fois. La fréquence relative de cet événement, qui est impossible, et : 0/1 000 = 0.

La probabilité de l'événement impossible est 0.

TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS

Para resolver un problema de probabilidad: HAY QUE CONTAR

PROBLEMA

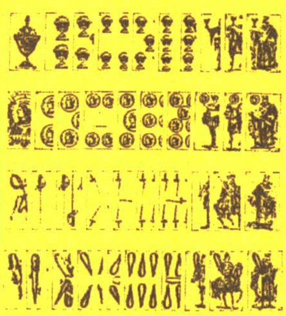
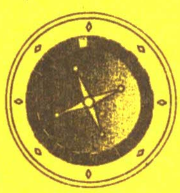
Cuando tengas que resolver un problema de probabilidad tienes que:

1.° Ver si **todos los resultados posibles** del experimento **son equiprobables**.

2.° **Contar** cuántos **resultados posibles** tiene el experimento.

3.° **Contar** cuántos **resultados** son **favorables** al suceso que queremos hallar su probabilidad.

Fíjate en los siguientes ejemplos:

Experimento	Resultados posibles	Algún suceso	Probabilidad
 Se hace girar la aguja.	1, 2, 3, 4 4 resultados posibles.	A = «salir par» = $\{2, 4\}$ B = «salir múltiplo de 3» = $\{3\}$ C = «salir menor que 4» = $\{1, 2, 3\}$	$p(A) = \frac{2}{4}$ $p(B) = \frac{1}{4}$ $p(C) = \frac{3}{4}$
 Se extrae una carta de una baraja española.	 40 resultados posibles.	R = «salir rey» = $\{R_O, R_E, R_C, R_B\}$ O = «salir oros» = $\{A_O, 2_O, \ldots, R_O\}$ A_C = «salir as de copas» = $\{A_C\}$	$p(R) = \frac{4}{40}$ $p(O) = \frac{10}{40}$ $p(A) = \frac{1}{40}$
 Se lanza una bola en una ruleta.	0, 1, 2, ..., 35, 36 37 resultados posibles.	P = «salir par» = $\{2, 4, \ldots, 36\}$ I = «salir impar» = $\{1, 3, \ldots, 35\}$ B = Banca = «salir 0» = $\{0\}$ D = «salir del 10 al 19» = = $\{10, 11, \ldots, 19\}$	$p(P) = \frac{18}{37}$ $p(I) = \frac{18}{37}$ $p(B) = \frac{1}{37}$ $p(D) = \frac{10}{37}$

Traduction :
Problème :
Quand on a à résoudre un problème de probabilité, il faut :

1. Voir si tous les résultats possibles de l'expérience sont équiprobables.
2. Compter combien il y a de résultats possibles à cette expérience.
3. Compter combien de résultats sont favorables à l'événement pour lequel on désire trouver la probabilité.

Note de la rédaction : on retrouvera ce même tableau (fiche « méthode ») dans les quatre manuels correspondant aux quatre années de l'E.S.O. : c'est le principe de l'enseignement **en spirale**.
Voir ci-après la version de la 4ème année.

Quelques exemples d'exercices (les n[os] 7 et 10 sont corrigés) :

Ejercicio resuelto

7 En una clase hay 14 chicos y 18 chicas. Se escribe el nombre de cada uno en un papel y se introducen todos en un sombrero. El profesor escoge uno sin mirar. ¿Qué es más probable que salga, el nombre de un chico o el de una chica?

Es más probable que salga el nombre de una chica, pues hay más chicas que chicos.

8 Una bolsa contiene 12 bolas verdes y 4 rojas y otra contiene 20 bolas verdes y 10 rojas. ¿En qué bolsa es más fácil obtener bola verde?

9 Realiza los siguientes experimentos aleatorios:

a) Lanza 100 veces una moneda.

b) Lanza 100 veces un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.

c) Lanza 100 veces un dado de quinielas.

Para cada experimento, construye una tabla con las siguientes columnas:

Resultados	Frec. absolutas	Frec. relativas

Ejercicio resuelto

10 Se lanza un dado de quinielas que tiene tres caras con un 1, dos caras con una X y una cara con un 2. ¿Qué cara es más probable que aparezca?

Es más probable que aparezca la cara 1, pues hay más caras con el 1 que con la X o el 2.

11 Contesta.

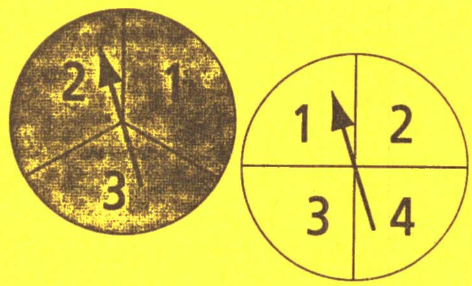
a) Se lanza un dado una vez. ¿Qué es más probable, que salga par o impar?

b) Se extrae una carta de una baraja española. ¿Qué es más probable?

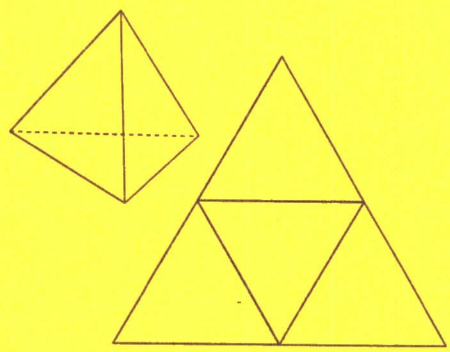
1. Que salga la sota de bastos o el rey de espadas.
2. Que salga un oro o una figura.
3. Que salga un oro o un no oro.
4. Que salga una figura o que no salga una figura.

12 Tres amigos han resuelto un problema de probabilidades y obtienen los siguientes resultados: Juan 0.7; Pedro −0,3, y Faustino 1,2. El profesor, nada más ver los resultados, dice: «Por lo menos, dos de vosotros han contestado mal el problema». Explica por qué.

13 En las dos ruletas de la figura se hace girar la flecha. Cuando se detiene señala un número. ¿En qué ruleta es más fácil obtener un 3, en la roja o en la azul?



14 Un tetraedro regular tiene 4 caras iguales que son triángulos equiláteros. Se han pintado 3 caras de color azul. Si hacemos rodar el tetraedro, ¿cuál es la probabilidad de que se apoye sobre una cara azul?



7. Exercice résolu. Dans une classe il y a 14 garçons et 16 filles. On écrit le nom de chacun d'entre eux sur un papier, et on les met dans un chapeau. Le professeur en choisit un sans regarder. Qu'est-ce qui est le plus probable : sortir le nom d'un garçon, ou celui d'une fille ? Réponse : c'est plus probable de sortir le nom d'une fille, puisqu'il y a plus de filles que de garçons.

8. Un sac contient 12 boules vertes et 4 rouges, et un autre contient 20 boules vertes et 10 rouges. Dans lequel est-il plus facile d'obtenir une boule verte ?

9. Réalise les expériences aléatoires suivantes :

a) Lancer 100 fois une pièce de monnaie

b) Lancer 100 fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

c) Lancer 100 fois un dé de Loto

Pour chacune de ces expériences, construis un tableau avec les colonnes suivantes :

RÉSULTATS	FRÉQUENCES ABSOLUES	FRÉQUENCES RELATIVES

(suite de la traduction des énoncés d'exercices)

10. Exercice résolu. On lance un dé de Loto (?) qui a trois faces avec un 1, deux faces avec un X, et une face avec un 2. Quelle face a la plus grande probabilité d'apparaître ? Réponse : c'est plus probable que la face 1 apparaisse, puisqu'il y a plus de faces avec 1 qu'avec X ou avec 2.

11. Réponds :

a) On lance un dé une fois. Qu'est-ce qui est le plus probable, que le nombre sorti soit pair ou impair ?

b) On tire une carte d'un jeu espagnol. Qu'est-ce qui est le plus probable ?
- que sorte le valet de bâtons, ou le roi d'épées ?
- que sorte un or, ou une figure ?
- que sorte un or, ou pas un or ?
- que sorte une figure, ou pas une figure ?

12. Trois amis ont résolu un exercice de probabilité, et obtenu les résultats suivants : 0,7 pour Jean ; -0,3 pour Pierre ; 1,2 pour Faustino. Le professeur, après avoir vu leurs résultats, dit « Au moins deux d'entre vous ont mal répondu au problème ». Explique pourquoi.

13. On fait tourner la flèche sur chacune des deux roulettes. Quand elle s'arrête, elle désigne un nombre. Sur quelle roulette est-il le plus facile d'obtenir 3, la rouge ou la bleue ?

14. Un tétraèdre régulier a 4 faces identiques, qui sont des triangles équilatéraux. On a peint trois faces en bleu. Si on fait rouler le tétraèdre, quelle est la probabilité qu'il repose sur une face bleue ?

PROBLEMAS PARA APLICAR

Problema resuelto

16 Si extraes una carta de una baraja española, calcula la probabilidad de:

a) que sea un rey,
b) que sea un oro,
c) que sea el rey de oros.

a) En la baraja española hay 40 cartas, de las cuales 4 son reyes; por tanto, la probabilidad de rey es $\frac{4}{40}$.

b) Como hay 10 oros de las 40 cartas, la probabilidad de oro es $\frac{10}{40}$.

c) Sólo hay una carta que sea el rey de oros; por tanto, la probabilidad de extraer el rey de oros es $\frac{1}{40}$.

Problema resuelto

22 En el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico y anotar el resultado de la cara superior, calcula la probabilidad de:

a) Salir par.
b) Salir impar.
c) Salir múltiplo de 3.
d) Salir múltiplo de 5.

a) Como hay tres caras con número par (2, 4, 6) de un total de seis, la probabilidad de salir par es $\frac{3}{6}$.

b) Como hay tres caras con número impar (1, 3, 5) de un total de seis, la probabilidad de salir impar es $\frac{3}{6}$.

c) Como sólo hay dos caras con números múltiplos de 3, (3,6), de un total de seis, la probabilidad de salir múltiplo de 3 es $\frac{2}{6}$.

d) Sólo hay un caso favorable; por tanto, $\frac{1}{6}$.

Nous n'avons donné ci que les deux problèmes corrigés, ce qui permet de se rendre compte ce qui est attendu des élèves comme types de réponses.

16. Problème résolu : Si tu extrais une carte d'un jeu espagnol, calcule la probabilité :

a) que ce soit un roi.
b) que ce soit un or.
c) que ce soit le roi d'or.

Réponses : a) Le jeu espagnol a 40 cartes, dont 4 sont des rois ; ainsi la probabilité d'avoir un roi est de 4/40.
b) Comme il y a 10 ors parmi les 40 cartes, la probabilité d'avoir un or est de 10/40.
c) Il n'y a qu'une seule carte qui soit le roi d'or ; ainsi, la probabilité de tirer le roi d'or est de 1/40.

22. Problème résolu : Dans une expérience consistant à lancer un dé cubique et à noter le résultat de la face supérieure, calculer la probabilité de :

a) Sortir un nombre pair
b) Sortir un nombre impair
c) Sortir un multiple de 3
d) Sortir un multiple de 5.

.../...

.../...

a) Comme il y a trois faces avec un numéro pair (2, 4 et 6) pour un total de 6, la probabilité de sortir un nombre pair est 3/6.
b) Comme il y a trois faces avec un numéro impair (1, 3 et 5) pour un total de 6, la probabilité de sortir un nombre impair est 3/6.
c) Comme il y a deux faces avec un multiple de 3 (3 et 6) pour un total de 6, la probabilité de sortir un multiple de 3 est 2/6.
d) Il y a un seul cas favorable ; par conséquent la probabilité est de 1/6.

PROBLEMES « POUR ALLER PLUS LOIN »

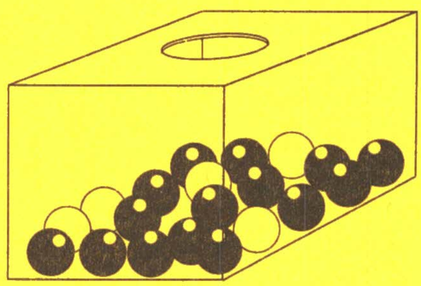
25 Una bolsa contiene 100 papeletas de una rifa numeradas del 1 al 100. Se extrae una papeleta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de:

a) que el número extraído tenga una sola cifra,
b) que el número extraído tenga dos cifras,
c) que el número extraído tenga tres cifras,
d) que el número extraído tenga cuatro cifras?

29 Conchita y Enrique lanzan dos dados cúbicos y calculan el producto de los números obtenidos. Si sale par gana Conchita y si sale impar gana Enrique. ¿Es el juego justo?

30 De la urna de la figura se extrae una bola al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Sea roja.
b) Sea verde.
c) Sea amarilla.
d) No sea roja.
e) No sea verde.
f) No sea amarilla.



25. Un sac contient 100 billets de tombola numérotés de 1 à 100. On tire un billet au hasard. Quelle est la probabilité :
a) que le nombre extrait ait un seul chiffre ?
b) que le nombre extrait ait deux chiffres ?
c) que le nombre extrait ait trois chiffres ?
d) que le nombre extrait ait quatre chiffres ?

30. De l'urne dessinée, on tire une boule au hasard. Calcule la probabilité que :
a) Elle soit rouge b) Elle soit verte c) Elle soit jaune
d) Elle ne soit pas rouge e) Elle ne soit pas verte f) Elle ne soit pas jaune

Manuel de 4ère année E.S.O. (correspondant à la 2nde française)

La partie PROBABILITÉS ET STATISTIQUES est composée de quatre chapitres, représentant environ 20 % du programme :

- Chapitre 19 : Statistiques doubles.
- Chapitre 20 : Techniques de dénombrement.
- Chapitre 21 : Calcul de probabilités.
- Chapitre 21 : Probabilité conditionnelle.

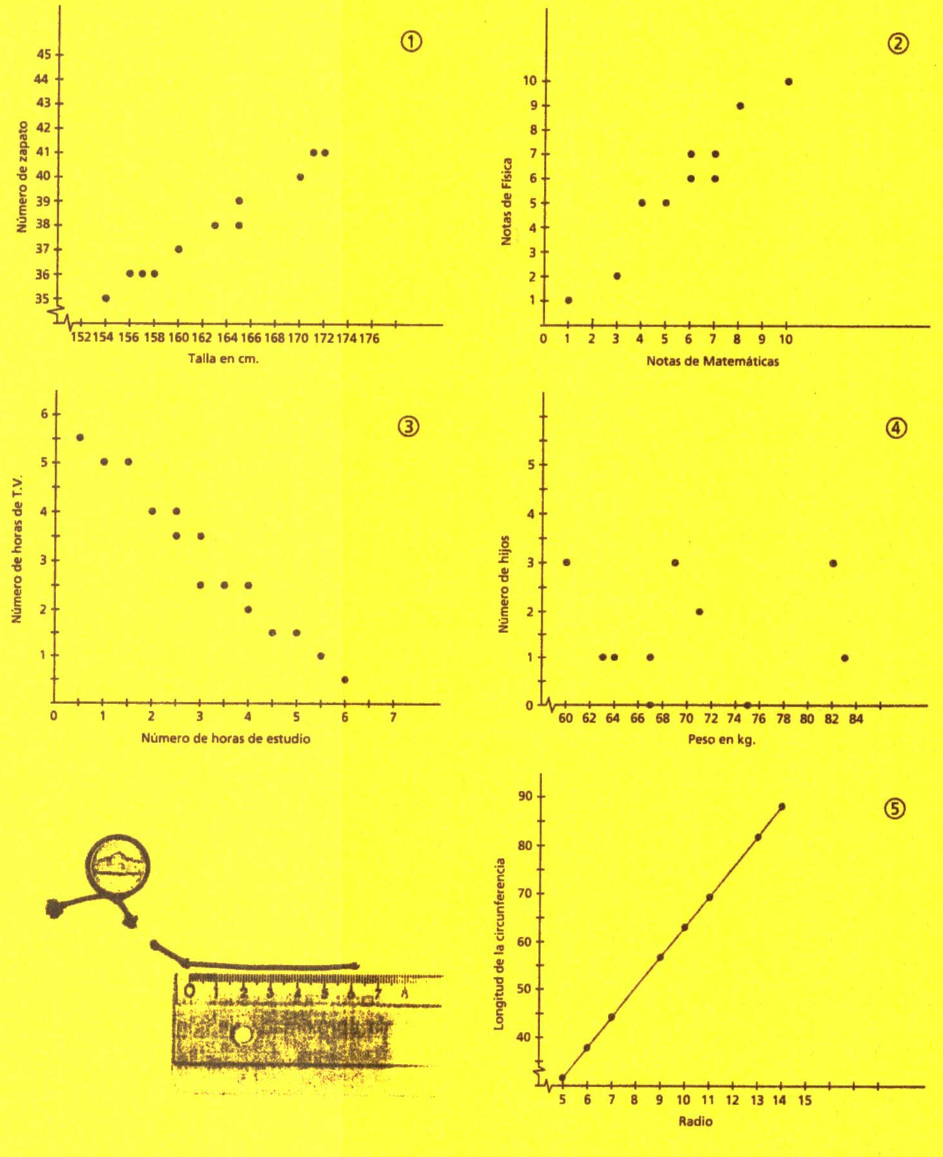
Le chapitre 19 traite des statistiques à deux variables : nuages de points, corrélation, ajustement linéaire, distinction entre corrélation et causalité... Toujours sur des exemples simples, tirés le plus souvent de la vie courante des élèves.
Nous reproduisons ci-dessous la quatrième page de ce chapitre, représentant graphiquement quelques données relevées chez les élèves : lien entre la taille et la pointure des chaussures, entre les notes de mathématiques et de physique, entre le nombre d'heures de travail et le nombre d'heures passées devant la télé, entre le poids de leurs parents et le nombre d'enfants de la famille (!), et lien entre le périmètre et la circonférence de 8 cercles (mesurés à la ficelle !).

Si representamos en un sistema de ejes cartesianos los pares de valores de la variable bidimensional (X, Y) como si fueran las coordenadas de un punto, se obtiene un conjunto de puntos sobre el plano que se denomina **diagrama de dispersión**.

Para saber si la mayoría de los puntos del diagrama están cerca de una recta vamos a dibujar un óvalo lo más estrecho posible alrededor de los puntos. A este óvalo lo llamaremos **nube de puntos**.

Cuanto más estrecha sea la nube de puntos más se aproximarán los puntos a una recta.

A continuación vamos a representar las nubes de puntos de los ejemplos del epígrafe anterior:



Le chapitre 20 traite des techniques de dénombrement : diagrammes en arbres, arrangements, permutations, combinaisons, triangle de Pascal, binôme de Newton.

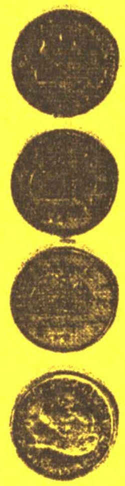
Nous vous proposons en exemple la page correspondant aux arrangements avec répétitions :

3. VARIACIONES CON REPETICIÓN

Al lanzar cuatro veces consecutivas una moneda, ¿cuántos resultados distintos podemos obtener?

Si representamos por C salir cara y por X salir cruz, el diagrama de árbol correspondiente será:

Primer lanzamiento	Segundo lanzamiento	Tercer lanzamiento	Cuarto lanzamiento	Resultado
			C	CCCC
		C	X	CCCX
	C		C	CCXC
		X	X	CCXX
C			C	CXCC
		C	X	CXCX
	X		C	CXXC
		X	X	CXXX
			C	XCCC
		C	X	XCCX
	C		C	XCXC
		X	X	XCXX
X			C	XXCC
		C	X	XXCX
	X		C	XXXC
		X	X	XXXX



Por tanto, hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ resultados distintos.

A las distintas ordenaciones que acabamos de obtener se les llama **variaciones con repetición de dos elementos tomados de cuatro en cuatro**, y se escribe $VR_{2,4}$.

Ahora sigue influyendo el orden, pero además los elementos se pueden repetir.

Variaciones con repetición de m elementos tomados n a n son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo entren n elementos repetidos o no.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa por $VR_{m,n}$ y es igual a:

$$\mathbf{VR_{m,n} = m^n}$$

Fíjate que:

$VR_{m,0}$ no tiene sentido
$VR_{m,1} = m$
$VR_{m,2} = m^2$
$VR_{m,3} = m^3$
$VR_{m,4} = m^4$
$VR_{m,5} = m^5$
... ...
$VR_{m,n} = m^n$

Se lanzan dos dados de diferentes colores una vez. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener? ¿Y si se lanzan tres dados?

Para dos dados se obtiene $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$ resultados distintos.

Para tres dados se obtiene $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ resultados distintos.

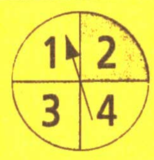
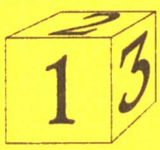
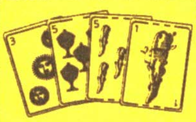
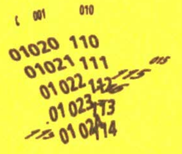
¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, pudiéndose repetir las cifras?

Serán $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$ números distintos.

Le chapitre 21 (calcul des probabilités) reprend tout ce qui a été fait dans les trois années précédentes. On y trouve le cours sur les événements compatibles et incompatibles, les événements contraires, la probabilité d'un événement calculée avec la règle de Laplace (nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles), l'union et l'intersection d'événements, etc.
Nous vous en proposons 3 pages, plus une page d'exercices.
On retrouve, ci-dessous, le tableau de la page **46**, dans sa version désormais complète.

3. APLICA LA REGLA DE LAPLACE

Cuando todos los resultados de un experimento son equiprobables, para calcular la probabilidad de un suceso contaremos los casos que son favorables al suceso y luego contaremos el número de casos posibles del experimento. El cociente de dichos números será la probabilidad.

Experimento	Espacio muestral	Algunos sucesos	Y sus probabilidades
 Se lanza una moneda	E = {cara, cruz}	A = {cara} B = {cruz} E = {cara, cruz} ø	p(A) = $\frac{1}{2}$ p(B) = $\frac{1}{2}$ p(E) = 1 p(ø) = 0
 Se hace girar la aguja	E = {1, 2, 3, 4}	A = {2, 3} B = {4} C = {1, 3, 5} E = {1, 2, 3, 4} ø	p(A) = $\frac{2}{4}$ p(B) = $\frac{1}{4}$ p(C) = $\frac{3}{4}$ p(E) = 1 p(ø) = 0
 Se lanza un dado cúbico	E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	A = {1, 3, 5} B = {2, 6} C = {3, 4, 5, 6} E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ø	p(A) = $\frac{3}{6}$ p(B) = $\frac{2}{6}$ p(C) = $\frac{4}{6}$ p(E) = 1 p(ø) = 0
 Se extrae una carta de una baraja española	E = {todas las cartas de la baraja española}	A = {salir rey} B = {salir oro} E = {cualquier carta de la baraja} ø	p(A) = $\frac{4}{40}$ p(B) = $\frac{10}{40}$ p(E) = 1 p(ø) = 0
 Se lanza una bola en una ruleta	E = {0, 1, 2, 3, ..., 36}	A = {salir par} B = {salir rojo} C = {salir múltiplo de 5} E = {0, 1, 2, 3, ..., 36} ø	p(A) = $\frac{18}{37}$ p(B) = $\frac{18}{37}$ p(C) = $\frac{7}{37}$ p(E) = 1 p(ø) = 0
 Se extrae un boleto en una rifa de 100 boletos	E = {1, 2, 3, ..., 100}	A = {salir el 56} B = {salir un número que empiece por 7} C = {salir el 22, 33, 44} E = {1, 2, 3, ..., 100} ø	p(A) = $\frac{1}{100}$ p(B) = $\frac{10}{100}$ p(C) = $\frac{3}{100}$ p(E) = 1 p(ø) = 0

(suite du chapitre 21) : probabilité d'un événement et règle de Laplace

2. Probabilidad de un suceso. Regla de Laplace

La frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad tienden a aproximarse cuando el número de pruebas realizadas crece indefinidamente. Entonces, para calcular la probabilidad de un suceso sería necesario realizar un gran número de pruebas y ver hacia qué valor tiende la frecuencia relativa. Como esto es incómodo, vamos a ver otro método para asignar probabilidades cuando todos los resultados del experimento son equiprobables.

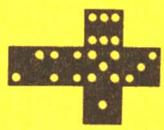
- *Imagínate una rifa en la que se han vendido 320 papeletas con los números 1 al 320. Tú has comprado una que tiene el número 75. Como sólo tienes una papeleta de las 320 vendidas, tienes una oportunidad de 320 de ganar; por tanto, la probabilidad de ganar es* $\frac{1}{320} = 0{,}003125$.

  Si hubieras comprado cinco papeletas tendrías cinco oportunidades de 320; por tanto, la probabilidad de ganar sería $\frac{5}{320}$.

- *Las caras de un dado ordinario se han coloreado como se muestra en la figura.*

  Si lanzamos el dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener?:

  a) Un 5. *b) Una cara negra.* *c) Una cara roja.*



  a) Como hay seis casos igualmente posibles, la probabilidad de sacar el 5 es $\frac{1}{6}$.

  b) Como hay dos caras negras de un total de seis, la probabilidad de obtener cara negra es $\frac{2}{6}$.

  c) Como hay cuatro caras rojas de un total de seis, la probabilidad de obtener cara roja es $\frac{4}{6}$.

Pierre Simon Laplace (1749-1827) publicó en 1812 un libro titulado *Teoría analítica de las probabilidades*, en el que dio la primera definición de probabilidad, que es la siguiente:

> Si todos los resultados de un experimento aleatorio son equiprobables, se tiene que:

$$\text{Probabilidad del suceso seguro} = \frac{\text{núm. de casos favorables al suceso}}{\text{núm. de casos posibles}}$$

Probabilidad del suceso seguro y del suceso imposible

Como el suceso seguro se verifica siempre, el número de casos favorables al suceso seguro es igual al número de casos posibles. Por tanto, el cociente es igual a la unidad.

Como el suceso imposible nunca se verifica, el número de casos favorables al suceso imposible es 0. Por tanto, al dividir 0 entre el número de casos posibles del experimento se obtiene que la probabilidad del suceso imposible es 0.

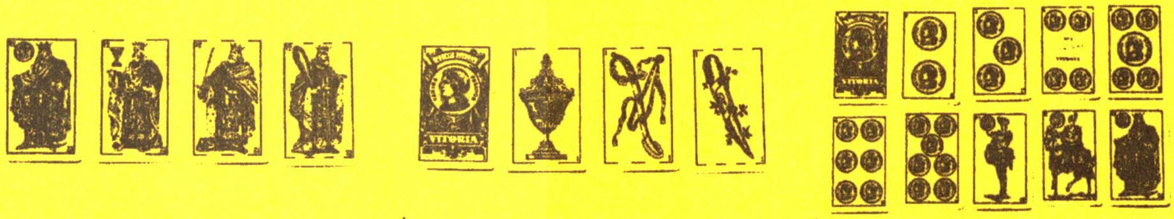
> La probabilidad del suceso seguro es 1.
>
> La probabilidad del suceso imposible es 0.
>
> La probabilidad de un suceso cualquiera toma valores comprendidos entre 0 y 1.

(suite du chapitre 21) : probabilité de la réunion.

5. PROBABILIDAD DE LA UNIÓN

Realizamos un experimento que consiste en extraer una carta de una baraja española y consideramos los siguientes sucesos:

A = «salir rey» *B = «salir as»* *C = «salir oro»*



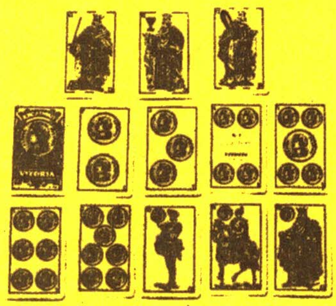
Vamos a hallar las probabilidades de los sucesos A ∪ B y A ∪ C.

A ∪ B = «salir rey o as». Hay ocho cartas favorables a este suceso, 4 reyes y 4 ases, de las 40 posibles.

$$\text{Por tanto, } p(A \cup B) = \frac{8}{40}$$

En este caso, los sucesos A y B son incompatibles, pues no pueden verificarse a la vez. Observa que

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{40} + \frac{4}{40}$$



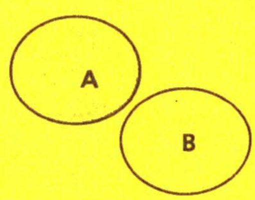
A ∪ C = «salir rey u oro». Hay 13 cartas favorables a este suceso, los 4 reyes y los 9 oros, ya que tenemos que descontar el rey de oros, que ya estaba contado.

$$\text{Por tanto, } p(A \cup C) = \frac{13}{40}$$

En este caso, los sucesos A y B son compatibles, pues pueden verificarse a la vez; por ejemplo, cuando sale el rey de oros. Observa que

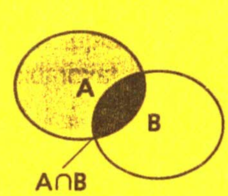
$$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

Si A y B son dos **sucesos incompatibles** de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la probabilidad de la unión de A y B es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, es decir:



Si A y B incompatibles ⇒ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Si A y B son dos **sucesos compatibles** de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la probabilidad de la unión de A y B es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, menos la probabilidad del suceso intersección de A y B, es decir:



Si A y B compatibles ⇒

⇒ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

(suite du chapitre 21) : Exercices d'entraînement

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ejercicio resuelto

1 En el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico y anotar el resultado de la cara superior, calcula la probabilidad de:

a) Salir par.
b) Salir impar.
c) Salir múltiplo de 3.
d) Salir múltiplo de 5.

a) Como hay tres caras con número par {2, 4, 6} de un total de seis, la probabilidad de salir par es $\frac{3}{6}$.

b) Como hay tres caras con número impar {1, 3, 5} de un total de seis, la probabilidad de salir impar es $\frac{3}{6}$.

c) Como sólo hay dos caras con números múltiplos de 3, {3,6}, de un total de seis, la probabilidad de salir múltiplo de 3 es $\frac{2}{6}$.

d) Sólo hay un caso favorable, {5}; por tanto, $\frac{1}{6}$.

2 Tengo en la mano seis cartas con los números 1, 2, 3, 5, 6, 7. Mi amigo toma una al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número menor a 4?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número que obtenga sea divisible por 2?

3 Dos amigos están jugando a las cartas. Jaime dice que «la próxima carta que se extraiga será un rey» y Alfredo dice que «será figura». ¿Cuál de los dos tiene mayor probabilidad de acertar?

Ejercicio resuelto

4 Si extraes una carta de una baraja española, calcula la probabilidad de:

a) Que sea un caballo.
b) Que sea una copa.
c) Que sea el caballo de copas.
d) Que sea un caballo o una copa.

a) En la baraja española hay 40 cartas, de las cuales 4 son caballos; por tanto, la probabilidad de caballo es $\frac{4}{40}$.

b) Como hay 10 copas de las 40 cartas, la probabilidad de copa es $\frac{10}{40}$.

c) Sólo hay una carta que sea el caballo de copas; por tanto, la probabilidad de extraer el caballo de copas es $\frac{1}{40}$.

d) Hay 4 caballos y 10 copas, pero hay que descontar el caballo de copas, pues lo hemos contado dos veces; por tanto:

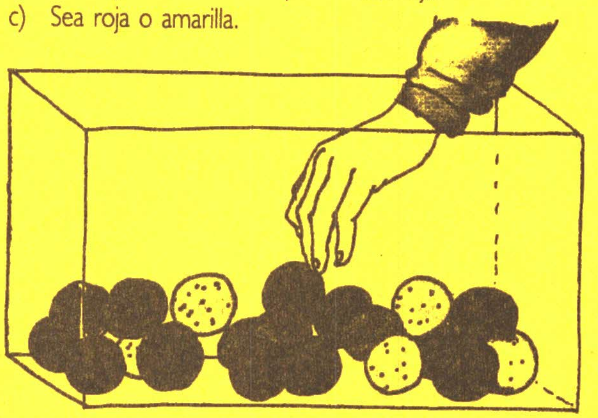
$$p(\text{caballo o copa}) = p(\text{caballo}) + p(\text{copa}) - p(\text{caballo de copas}) = \frac{13}{40}$$

5 Extraemos una carta de una baraja española. Halla las siguientes probabilidades:

a) Que sea un rey o un as.
b) Que sea un rey o una copa.

6 Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Sea roja o verde. b) No sea roja.
c) Sea roja o amarilla.



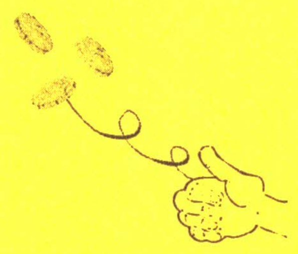
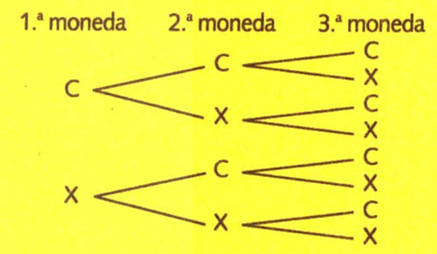
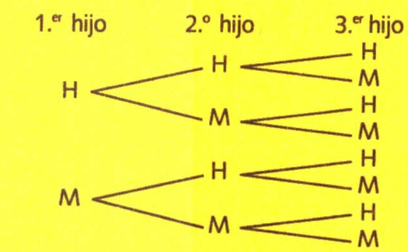
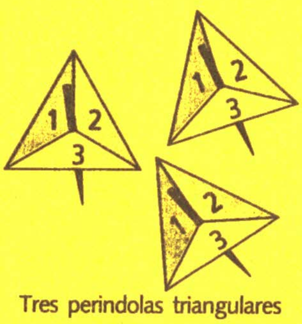
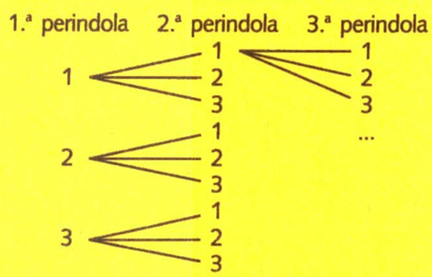
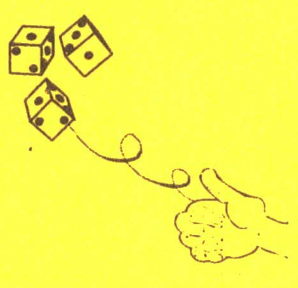
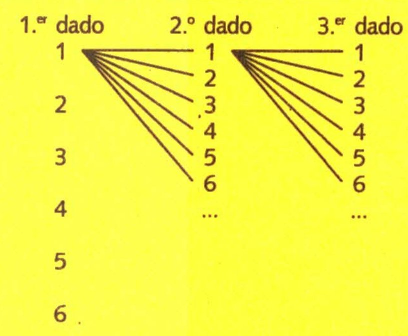
7 Una bolsa contiene 100 papeletas de una rifa numeradas del 1 al 100. Se extrae una papeleta al azar. Cuál es la probabilidad de:

a) Que el número extraído tenga una sola cifra.
b) Que el número extraído tenga dos cifras.
c) Que el número extraído tenga tres cifras.
d) Que el número extraído tenga cuatro cifras.

Le chapitre 22 traite de la probabilité conditionnelle : expériences aléatoires 'composées', probabilités associées, tirages successifs avec ou sans remises, événements dépendants ou indépendants. Nous vous proposons quelques pages de ce chapitre :

2. EXPERIMENTOS COMPUESTOS (II)

Cuando un experimento compuesto está formado por tres o más experimentos simples, utilizaremos diagramas de árbol para obtener el conjunto de resultados posibles, es decir, el espacio muestral.

Experimento	Diagrama de árbol	Espacio muestral	N.º de resultados
 Se lanzan tres monedas		CCC CCX CXC CXX XCC XCX XXC XXX	$2^3 = 8$
 Familias con tres hijos		HHH HHM HMH HMM MHH MHM MMH MMM	$2^3 = 8$
 Tres perindolas triangulares		111 112 113 121 333	$3^3 = 27$
 Se lanzan tres dados		111 112 113 114 666	$6^3 = 216$

(suite du chapitre 22). Calcul de la probabilité d'un événement dans une expérience aléatoire 'composée' :

3. PROBABILIDAD DE SUCESOS EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Veamos cómo hallar la probabilidad de un suceso de un experimento compuesto, a partir de las probabilidades de los sucesos de los experimentos simples que lo componen.

Para ello resolveremos los siguientes ejemplos, primero aplicando directamente la regla de Laplace y, posteriormente, como producto de probabilidades de los sucesos de los experimentos simples:

Lanzamos tres veces una moneda. Halla la probabilidad de obtener tres caras.

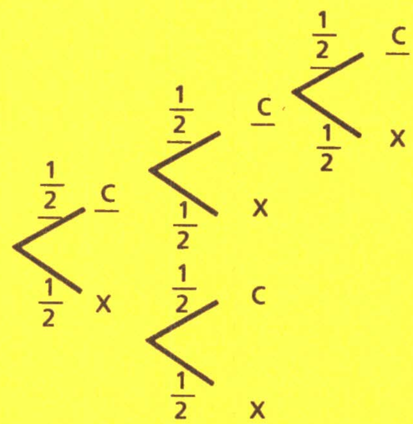
El espacio muestral es:

E = {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX}

Casos favorables: 1.

Casos posibles: 8.

$$p(C \text{ y } C \text{ y } C) = p(CCC) = \frac{1}{8}$$



Observa el diagrama de árbol. Podíamos haber obtenido la probabilidad pedida sin más que calcular el producto de las probabilidades de cada suceso:

$$p(C \text{ y } C \text{ y } C) = p(C) \cdot p(C) \cdot p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de obtener un cinco en cada dado.

El espacio muestral es:

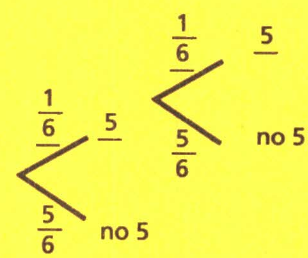
E = {(1,1), (1,2), ... , (1,6), ... , (6,1), (6,2), ... , (6,6)}

Sea A = «obtener un cinco en cada dado» = {(5,5)}:

Casos favorables al suceso A: 1.

Casos posibles del experimento: 36.

$$p(\text{cinco y cinco}) = \frac{1}{36}$$



Con el diagrama de árbol obtenemos:

$$p(\text{cinco y cinco}) = p(\text{cinco}) \cdot p(\text{cinco}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

En los experimentos compuestos cada resultado viene dado por un camino del diagrama de árbol, si indicamos sobre cada rama del camino su probabilidad.

Como acabamos de ver por los ejemplos anteriores, la probabilidad del camino la podemos obtener multiplicando las probabilidades de las ramas del camino. Es éste un importante resultado que se conoce como *regla del producto*, y dice así:

La probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino.

(suite du chapitre 22). Tirages avec ou sans remises :

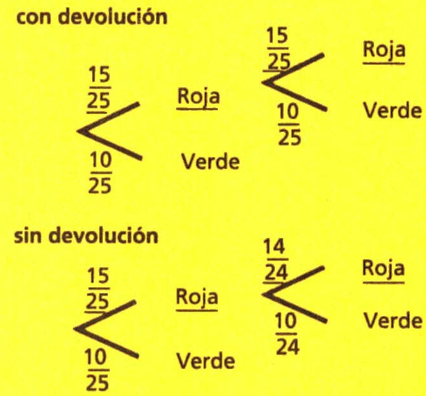
4. EXTRACCIONES CON DEVOLUCIÓN Y SIN DEVOLUCIÓN

Con lo que acabamos de ver, trata de resolver los siguientes ejercicios:

En una bolsa hay 15 bolas rojas y 10 verdes. Extraemos dos bolas de la bolsa. Halla la probabilidad de que ambas sean rojas.

a) Devolviendo la bola después de la primera extracción.

b) Sin devolverla.



a) **Con devolución**. Formamos el diagrama de árbol:

$$p(\text{roja y roja}) = \frac{15}{25} \cdot \frac{15}{25} = \frac{9}{25}$$

b) **Sin devolución**. Formamos el diagrama de árbol:

$$p(\text{roja y roja}) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{7}{20}$$

Extraemos de una baraja tres cartas. Halla la probabilidad de que sean tres ases.

a) Con devolución.

b) Sin devolución.

a) **Con devolución**. Formamos el diagrama de árbol:

$$p(\text{as y as y as}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{1\,000}$$

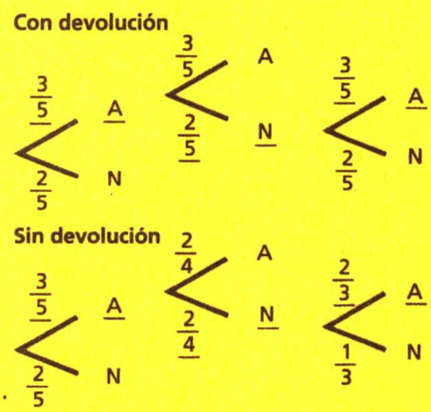
b) **Sin devolución**. Formamos el diagrama de árbol:

$$p(\text{as y as y as}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$$

En una urna hay 5 letras: 3 A y 2 N. Se extrae una letra, se anota y se repite el mismo proceso dos veces más. ¿Cuál es la probabilidad de obtener las letras de la palabra ANA y en ese orden?

a) Con devolución.

b) Sin devolución.



a) **Con devolución**. Formamos el diagrama de árbol:

$$p(ANA) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125}$$

b) **Sin devolución**. Formamos el diagrama de árbol:

$$p(ANA) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

En las **extracciones con devolución** el resultado de la primera extracción no influye o condiciona el resultado de la segunda.

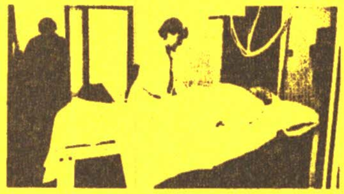
En las **extracciones sin devolución** el resultado de la primera extracción influye o condiciona el resultado de la segunda.

(suite et fin du chapitre 22). Exemple d'utilisation d'un tableau de contingence, et quelques exercices.

Las tablas de contingencia: Una herramienta muy útil

Para tratar de curar una enfermedad se ha aplicado un nuevo tratamiento a una serie de individuos, obteniéndose los resultados reflejados en la siguiente tabla:

	Curados	*No curados*	*Totales*
Tratamiento nuevo	*60*	*21*	*81*
Tratamiento antiguo	*43*	*36*	*79*
	103	*57*	*160*



Elegido un individuo al azar, halla las siguientes probabilidades:

a) Que se haya curado.
b) No se haya curado.
c) Que se haya curado con el nuevo tratamiento.
d) Que no se haya curado con el nuevo tratamiento.
e) Que se haya curado con el tratamiento antiguo.
f) Que no se haya curado con el tratamiento antiguo.

Estas tablas se conocen con el nombre de *tablas de contingencia.*

a) p(que se haya curado) $= \frac{103}{160}$

b) p(no se haya curado) $= \frac{57}{160}$

c) p(que se haya curado/con el nuevo tratamiento) $= \frac{60}{81}$

d) p(que no se haya curado/con el nuevo tratamiento) $= \frac{21}{81}$

e) p(que se haya curado/con el tratamiento antiguo) $= \frac{43}{79}$

f) p(que no se haya curado/ con el tratamiento antiguo) $= \frac{36}{79}$

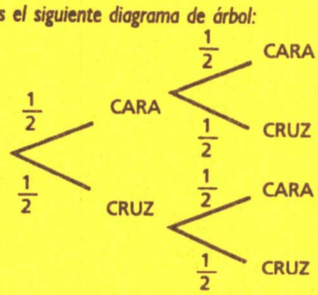
EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ejercicio resuelto

1 Se lanzan dos monedas. Halla las siguientes probabilidades:

a) Obtener dos caras.
b) Obtener dos cruces.
c) Obtener al menos una cara.

Formamos el siguiente diagrama de árbol:



a) $p(\text{dos caras}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

b) $p(\text{dos cruces}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

c) $p(\text{al menos una cara}) = 1 - p(\text{ninguna cara}) =$
$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

5 ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados salga por suma, o bien 3, o bien 4, o bien 5?

6 De una urna que contiene nueve bolas negras y cinco rojas se extraen sucesivamente dos bolas. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Que las dos bolas sean negras.
b) Que las dos bolas sean rojas.
c) Que la primera sea roja y la segunda negra.
d) Que una sea roja y la otra negra.

7 Se lanzan simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea menor que 7.

8 Se lanza un dado diez veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo números pares?

9 Un producto está formado por tres partes: A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de un defecto en A es 0,03, de un defecto en B es 0,04 y de un defecto en C es 0,08. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?

Voilà jusqu'où va l'enseignement des probabilités dans l'Enseignement Secondaire Obligatoire en Espagne, ce qui correspond approximativement à l'âge de 16 ans (fin de la scolarité obligatoire) et au niveau de fin de seconde en France.

2. Dans le canton de Neuchâtel (CH)

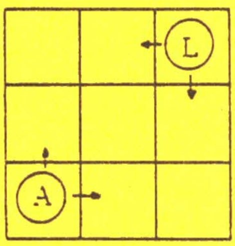
En septième année (équivalente à la 5ème française) :

1. Le loup et l'agneau

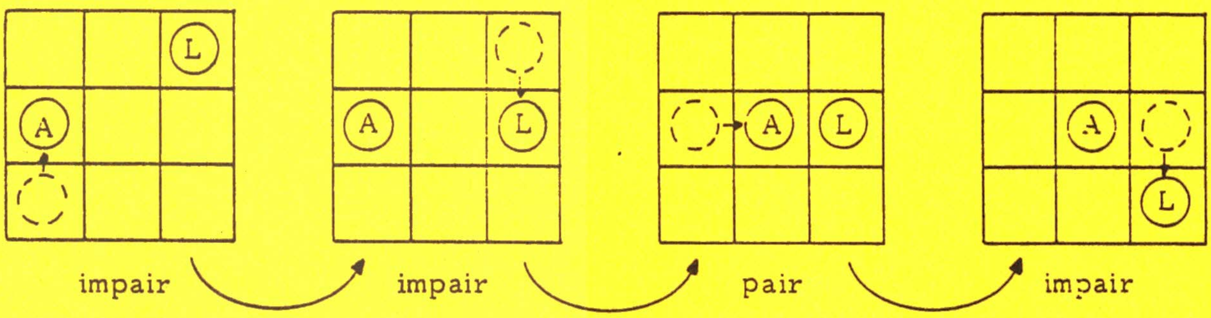
Un agneau (A) et un loup (L) sont placés à deux angles opposés d'un quadrillage. En commençant par l'agneau, ils avancent à tour de rôle d'une case en suivant les flèches (vers la droite et vers le haut pour l'agneau, vers la gauche et vers le bas pour le loup). Pour décider de la direction à prendre, on joue avec un dé :

- l'agneau avance d'une case vers la droite si le dé indique un nombre pair, et d'une case vers le haut si le dé indique un nombre impair.
- le loup avance d'une case vers la gauche si le dé indique un nombre pair, et d'une case vers le bas si le dé indique un nombre impair.

Si le loup et l'agneau arrivent dans la même case, le loup capture l'agneau.



Voici le déroulement d'une partie (où l'agneau échappe au loup) :



Joue avec ton camarade, en adoptant la règle suivante :

- le loup marque deux points s'il capture l'agneau
- l'agneau marque un point s'il échappe au loup.

Le jeu est-il équitable, ou favorise-t-il l'un des joueurs ?

En huitième année (équivalente à la 4ème française) :

2. Deux ou trois dés ?

On lance un dé à tour de rôle.
Si la somme est supérieure à 9, tu marques un point ; si cette somme est inférieure à 4, je marque deux points.
Le jeu est-il équilibré ?

La conclusion serait-elle la même en jouant avec trois dés (dans les mêmes conditions ?)

3. Avec 2 dés

On lance deux dés. Si le total est un nombre premier, tu marques 10 points. Si le total est une puissance de 2, je marque X points.
Indique la valeur à donner à X pour que
a) le jeu te favorise
b) le jeu te défavorise
c) le jeu soit équitable.

4. Paris et monnaie

Tu disposes de cinq pièces de monnaie : une pièce de 5 F, deux pièces de 2 F, une pièce de 1 F et une pièce de 50 centimes.
Tu lances les cinq pièces de monnaie. Si la somme des valeurs des pièces apparues côté pile est supérieure à 5,25 F, tu gagnes, sinon c'est moi.
Acceptes-tu de jouer ?

En neuvième année (équivalente à la 3ème française) :

5. Pile ou face ?

Deux joueurs lancent une pièce de monnaie, à tour de rôle.
L'objectif est d'obtenir 'PILE'. Dès qu'un des joueurs atteint 'PILE', il a gagné.
Bien sur, le premier qui lance la pièce semble avoir plus de chances que le second. Mais saurais-tu dire exactement les chances de chacun ?

6. Quelle couleur ?

Voici deux sacs (apparemment identiques) contenant des boules qui ne diffèrent que par leur couleur.

Le sac A contient :
- 8 boules bleues
- 3 boules noires
- 5 boules rouges

Le sac B contient :
- 3 boules rouges
- 5 boules noires

Toutes les boules sont identiques.

On jette un dé à 6 faces. Si c'est 3 ou 6 qui apparaît, on tire une boule dans le sac B ; sinon on tire une boule dans le sac A.

a) sur quelle couleur de boule parierais-tu ? (quelle est la couleur qui a le plus de chances d'apparaître ?)
b) une boule bleue est sortie au premier tirage ; elle n'est pas remise dans le jeu. Sur quelle couleur parierais-tu avant de rejouer une nouvelle fois le dé ?

REPRESENTATIONS ET RAISONNEMENTS DES ELEVES CONCERNANT L'ALEATOIRE ET LES PROBABILITES

1. Au collège

Nous avons demandé à un certain nombre de professeurs de collège de faire « passer » à leurs élèves les tests décrits ci-après, dans leurs classes de collège.
Nous remercions tout particulièrement, pour leur collaboration, Alain CASTAGNETTO du Collège Victor Prouvé de Laxou (54), Bernadette LE GUERNIC du Collège Robert Géant de Vézelise (54), François LEMIRE, du Collège Saint-Pierre de Courpière (63), Guy OYARCABAL du Collège de Lamarche (88), Pascale POMBOURCQ du Collège René Cassin de Vielmur-sur-Agout (81), et Bernard VIALANEIX du collège Lafayette du Puy-en-Velay (43).

Les conditions de passation étaient les suivantes :

(...) nous avons besoin de connaître les « représentations » que se font les élèves d'un certain nombre de concepts. Nous avons donc conçu les activités ci-jointes, que nous vous demandons d'expérimenter avec vos classes. Les élèves concernés sont vos élèves de 6ème, de 5ème et de 4ème.
Les modalités de passation sont les suivantes :

- Vous pouvez faire passer un seul et même test à toute une classe, ou répartir les trois tests de façon aléatoire dans cette classe. Chaque élève ne fait qu'une page.
- Compter 15 à 20 minutes pour une feuille.
- L'élève répond directement sur la feuille sans utiliser de brouillon.
- Le travail est individuel, sans aucune aide de l'enseignant.
- Il faut demander aux élèves de bien justifier leurs réponses.

Il est très important que ces tests ne soient pas notés, et n'entrent pas dans votre évaluation : cela pourrait modifier les comportements « spontanés » de certains. Ils ne nous serviront qu'à mettre en évidence d'éventuelles représentations erronées (que n'ont plus les élèves de lycée), pour que nous puissions concevoir des « activités » sur le hasard et l'aléatoire tenant compte de ces représentations.

Il y avait trois questionnaires différents, que nous reproduisons ci-dessous, en ôtant les espaces blancs nécessaires aux réponses des élèves :

QUESTIONNAIRE A

1. Anne et Pierre décident d'acheter un billet à la loterie. Anne dit « Donnez-moi un billet qui termine par 3 ». Pierre dit : « Ce serait mieux qu'il se termine par 9 ». Le quel des deux a raison ? Pourquoi ? Peut-on prévoir à l'avance par quel chiffe se terminera le numéro gagnant le gros lot ?

2. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer : pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?

3. Au péage d'une autoroute, un employé note le 1er chiffre de la plaque de toutes les voitures françaises qui passent (par exemple, pour le numéro 758 TB 88, il note 7). Il a fait cela pendant plus de trois heures, et possède énormément de données. Peut-il prévoir quel sera le 1er chiffre du numéro de la prochaine voiture qui passera ? Pourquoi ?

4. Céline et Paul jouent aux dés, chacun avec son dé. Mais Paul est un peu tricheur, et a échangé son dé avec un autre qui n'a que des 6 sur toutes les faces. Quand Céline lance son dé, peut-on prévoir quel numéro sortira ? Et quand Paul lance le sien ? Pourquoi ?

QUESTIONNAIRE B

1. En lançant une pièce, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : PILE ou FACE ? Pourquoi ?
2. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : un **2** ou un **6** ? Pourquoi ?
3. On a fabriqué un dé spécial pour faire des paris. Il a trois faces avec un **1**, deux faces avec un **X**, et une face avec un **2**. Si on le lance, qu'est-ce qui sera le plus facile à obtenir ? Et qu'est-ce qui sera le moins facile ? Pourquoi ?

QUESTIONNAIRE C

1. Dans un jeu de société, tu dois faire un **total** de **six** pour commencer à jouer. Tu peux lancer au choix un seul dé, ou deux dés. Que choisis-tu ?
   Et s'il fallait faire un total de **cinq** ?
2. On lance deux dés. Si le total des deux est supérieur à 9, tu marques un point ; si cette somme est inférieure à 4, c'est moi qui marque un point. Qui a le plus de chances de gagner ?
3. On lance deux dés. Si le total des deux est un nombre impair, tu marques **10** points. Si c'est un double six qui est sorti, je marque **100** points. Qui a le plus de chance de gagner ?
4. On joue avec deux dés, en les lançant chacun notre tour. Je prétends que c'est plus difficile pour moi de faire un double six que pour toi de faire un double trois. Ai-je raison ?

Les deux premiers questionnaires sont très fortement inspirés d'exercices et d'activités d'un manuel espagnol [JRV], et le troisième d'un fichier d'activités en usage dans le canton de Neuchâtel (CH)[1].

Dans le dernier questionnaire, nous n'avons pu exploiter que les questions 2 et 4. En effet, les élèves n'ont manifestement pas du tout compris la question 1, et, en ce qui concerne la question 3, il fallait y lire implicitement « *Qui a le plus de chance de gagner (ou qui gagnera le plus d'argent) si on répète ce jeu pendant très longtemps ?* ». Pratiquement tous les élèves ont répondu qu'ils avaient beaucoup plus de chances de marquer leurs 10 points (sous-entendu en un coup) que moi de marquer mes 100 points.

Analyse des réponses aux questionnaires

Pour chaque question, nous avons recensé les réponses exactes (qu'elles soient justifiées ou non), puis les réponses pour lesquelles il y avait une justification.
Parmi ces dernières, nous avons également comptabilisé les élèves pour lesquels la justification donnée nous semblait « valable » (bien sûr, il y a là une part de subjectivité, certaines réponses étant très difficiles à interpréter)

[1] Voir d'autres exemples dans les pages en couleur qui précèdent cette seconde partie.

Analyse des réponses au questionnaire A

Question A1

Anne et Pierre décident d'acheter un billet à la loterie. Anne dit "donnez-moi un billet qui se termine par 3". Pierre dit : "Ce serait mieux qu'il se termine par 9". Lequel des deux a raison ? Pourquoi ? Peut-on prévoir à l'avance par quel chiffre se terminera le numéro gagnant le gros lot ?

Résultats :

1. Lequel des deux a raison ?

74 élèves (**28 %**) sur **263** ne répondent pas à cette question et parmi les 189 qui répondent il y en a encore 19 qui n'accompagnent pas leur réponse d'une justification : au total il y a donc 170 élèves **(65 %)** qui ont répondu "complètement" et 104 (**40 %**) ont fourni la bonne réponse accompagnée d'une justification correcte.

Les fréquences données ci-dessous concernent l'ensembles des 263 élèves.

28 % de non réponse et 2 % de réponses incompréhensibles
48 % de réponses exactes (aucun des deux n'a raison)
8 % des élèves ont répondu que les deux avaient raison, pour 7 % c'est Pierre qui a raison et 6 % pensent que c'est Anne.

65 % des élèves ont fourni une justification à leur réponse, les deux tiers d'entre elles ont été considérées comme satisfaisantes.

Exemples de réponses données par les élèves :

- Je dis que c'est Pierre qui a raison parce que c'est mon chiffre porte-bonheur.
- C'est Anne qui a raison car le 9 porte bonheur pour les tables de multiplication.
- Ni l'un, ni l'autre car on ne connaît pas le nombre de lots
- C'est Pierre, je crois car 9 est 3 fois plus grand que 3, mais je ne pense pas qu'on peut prévoir ça.
- C'est le hasard, donc au hasard on va dire que c'est Pierre car le chiffre 9 me plaît bien.
- Je pense que c'est Anne qui a raison, car 3 est dans la table de 9.
- Ni l'un ni l'autre car ils sont tous les deux dans la table de 3.
- Les deux peuvent gagner mais Pierre a plus de chance car c'est le nombre le plus élevé.
- Ils ont tous les 2 raisons parce qu'il peut y avoir des billets qui se terminent par 3 et par 9.
- Ils ont tous les 2 tort parce qu'il peut y avoir un billet qui se termine par 6, par hasard.
- Il vaut mieux que ce soit 3 car si les numéros de la loterie vont jusqu'à 157 (exemple) on a une chance de moins.

2. Peut-on prévoir ?

62 élèves (**24 %**) sur 263 ne répondent pas à cette question et parmi les 201 qui répondent il y en a plus de la moitié (106) qui n'accompagnent pas leur réponse d'une justification : au total il y a donc 97 élèves (**37 %**) qui ont répondu "complètement" et 84 (**32 %**) ont fourni la bonne réponse accompagnée d'une justification correcte.

Les fréquences données ci-dessous concernent l'ensembles des 263 élèves.

24 % de non réponse et 1 % de réponses incompréhensibles
70 % de réponses exactes (il n'est pas possible de prévoir)
6 % des élèves ont donné une mauvaise réponse (il est possible de prévoir)

Seuls 37 % des élèves ont fourni une justification à leur réponse, près des neuf dixièmes d'entre elles ont été considérées comme satisfaisantes.

Remarque : le fort taux de non justification est probablement lié au fait que pour cette partie de la question A1 il n'était pas explicitement demandé "pourquoi ?"

Exemples de réponses données par les élèves :

- Peut-être bien qu'on peut prévoir, mais il faut faire un calcul super compliqué.
- Oui si l'une de boules est plus lourde ; non s'ils sont tous pareils.
- Non car je ne suis pas madame Irma.

Question A2

Jean a lancé une pièce de monnaie et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer : pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?

Résultats :

Seuls 3 élèves sur 263 ne répondent pas à cette question et parmi les 260 qui répondent il y en a 33 qui n'accompagnent pas leur réponse d'une justification compréhensible : au total il y a donc 227 élèves **(86 %)** qui ont répondu "complètement" et 180 **(68 %)** ont fourni la bonne réponse accompagnée d'une justification correcte.

Les fréquences données ci-dessous concernent l'ensembles des 263 élèves.

1 % de non réponse et 1 % de réponses incompréhensibles
79 % de réponses exactes (il n'est pas possible de prévoir)
19 % des élèves ont donné une mauvaise réponse (il y en a autant qui disent Face que Pile) **

86 % des élèves ont fourni une justification à leur réponse, les huit dixièmes d'entre elles ont été considérées comme satisfaisantes.

Exemples de réponses données par les élèves :

- oui quand on veut PILE il faut poser la pièce sur le pouce sur FACE.
- non car ça dépend comment il la jette
- ce sera FACE car la pièce est identique des 2 côtés
- non parce que ça dépend de la vitesse et du moment où elle va taper sur la main.
- on peut prévoir que ce sera PILE car face on l'obtient 5 fois de suite.
- ce sera FACE car il a obtenu 5 fois de suite FACE.
- non car si Jean a de la chance on ne peut pas savoir si nous aussi on aura autant de chance.
- oui il peut peut-être prévoir s'il a un truc ; car c'est un miracle 5 fois de suite FACE, c'est qu'il a un truc.
- la pièce tombera sur PILE car c'est qu'à la sixième fois on perd toujours.

Question A3

A un péage d'autoroute, un employé note le premier chiffre de la plaque de toutes les voitures françaises qui passent (par exemple, pour le numéro 758 TB 88, il note 7). Il a fait cela pendant plus de trois heures, et possède énormément de données. Peut-il prévoir quel sera le premier chiffre du numéro e la prochaine voiture qui passera ? Pourquoi ?

Résultats :

23 élèves (9 %) sur 263 ne répondent pas à cette question et parmi les 240 qui répondent il y en a 48 qui n'accompagnent pas leur réponse d'une justification compréhensible : au total il y a donc 192 élèves **(73 %)** qui ont répondu "complètement" et 180 **(68 %)** ont fourni la bonne réponse accompagnée d'une justification correcte.

Les fréquences données ci-dessous concernent l'ensembles des 263 élèves.

9 % de non réponse et 1 % de réponses incompréhensibles
83 % de réponses exactes (il n'est pas possible de prévoir)
7 % des élèves ont donné une mauvaise réponse (il est possible de prévoir)

86 % des élèves ont fourni une justification à leur réponse, les huit dixièmes d'entre elles ont été considérées comme satisfaisantes.

Exemples de réponses données par les élèves :

- non car il a une chance sur un milliard de savoir le numéro.
- non et oui car il peut trouver le bon chiffre par chance ; mais il a très peu de chances car sur 80 voitures il y aura plus de voitures qui auront un autre numéro.
- Oui peut-être avec son ordinateur portable.
- il me semble que non mais par contre il pourrait faire des statistiques.
- non on ne peut pas prévoir, à part s'il y a un chiffre qui est souvent sur sa feuille ; par ex si le 3 est marqué le plus souvent il y a plus de chance que la prochaine voiture aura le numéro 3 comme premier chiffre.

Question A4 :

Céline et Paul jouent aux dés, chacun avec son dé. Mais Paul est un peu tricheur, et a échangé son dé avec un autre qui n'a que des 6 sur toutes les faces. Quand Céline lance son dé, peut-on prévoir quel numéro sortira ? Et quand Paul lance le sien ? Pourquoi ?

Résultats :

1. Peut-on prévoir pour Céline ?

15 élèves (6 %) sur 263 ne répondent pas à cette question et parmi les 248 qui répondent il y en a 65 qui n'accompagnent pas leur réponse d'une justification compréhensible : au total il y a donc 193 élèves **(73 %)** qui ont répondu "complètement" et 183 **(70 %)** ont fourni la bonne réponse accompagnée d'une justification correcte.

Les fréquences données ci-dessous concernent l'ensembles des 263 élèves.

5 % de non réponse et 1 % de réponses incompréhensibles
91 % de réponses exactes (il n'est pas possible de prévoir)
3 % des élèves ont donné une mauvaise réponse (il est possible de prévoir)

86 %des élèves ont fourni une justification à leur réponse, les huit dixièmes d'entre elles ont été considérées comme satisfaisantes.

2. Peut-on prévoir pour Paul ?

12 élèves (5 %) sur 263 ne répondent pas à cette question et parmi les 251 qui répondent il y en a 63 qui n'accompagnent pas leur réponse d'une justification compréhensible : au total il y a donc 188 élèves **(71 %)** qui ont fourni la bonne réponse accompagnée d'une justification correcte.

Les fréquences données ci-dessous concernent l'ensembles des 263 élèves.

5 % de non réponse
92 % de réponses exactes (il est possible de prévoir)
3 % des élèves ont donné une mauvaise réponse (il n'est pas possible de prévoir)

86 %des élèves ont fourni une justification à leur réponse, les huit dixièmes d'entre elles ont été considérées comme satisfaisantes.

Remarque : il n'a pas été possible de distinguer les justifications pour Céline de celles données pour Paul.

Exemples de réponses données par les élèves

Ici peu de réponses "originales" ; les élèves qui ont répondu ont clairement dit que pour Céline il était impossible de prévoir mais que comme Paul avait triché c'était évidemment possible.

Analyse des réponses au questionnaire B

Question B1

En lançant une pièce, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : PILE ou FACE ? Pourquoi ?

Résultats :
34 élèves sur les 235 testés sur le questionnaire B ne répondent pas à cette première question.
19 élèves (**12 %** de l'effectif total) répondent 'PILE'
40 élèves (**17 %** de l'effectif total) répondent 'FACE'
132 élèves (**56 %** de l'effectif) donnent la réponse correcte.

Justifications :
121 élèves (**51 %** de l'effectif total) justifient correctement.
75 élèves (**32 %**) ne justifient pas correctement.
39 élèves (**17 %**) ne justifient pas du tout.

Remarques :
De nombreux élèves ayant privilégié 'PILE' ou 'FACE' se fient à l'aspect matériel de la pièce.
Par exemple, Nicolas (4ème) écrit : « *On peut tomber sur FACE car la pièce est plus lourde de ce côté, comme le dessus est plus gros* ».
De même, Sylvain (6ème) pense que « *le plus facile à obtenir c'est FACE, car FACE est plus lourd que PILE* ».

Question B2

En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : un 2 ou un 6 ? Pourquoi ?

Réponses :
26 élèves sur 235 ne répondent pas à cette question.
81 élèves (**35 %** de l'effectif total) répondent 'un 2'.
29 élèves (**12 %** de l'effectif total) répondent 'un 6'.
99 élèves (**42 %** de l'effectif total) répondent correctement.

Justifications :
71 élèves (**30 %** de l'effectif total) justifient correctement.
117 élèves (**50 %**) ne justifient pas correctement.
47 élèves (**20 %**) ne donnent pas du tout de justification.

Remarques :
Contrairement à la pièce, le dé fait davantage partie de l'expérience personnelle de l'élève dans le cadre de différents jeux. Cette « expérimentation » semble brouiller l'analyse de la situation.
Ainsi Éric (6ème) écrit « *A mon avis, on a plus de chance sur le 2, car je tombe toujours sur un 2* ».
Bruno (5ème) répond aussi « *C'est le 2, car c'est rare qu'on tombe sur le 6* ».
Autre explication pour Alison (4ème) : « *C'est plus facile d'obtenir un 2 car 6 est le plus grand chiffre qu'il y a sur un dé* ».

Question B3

On a fabriqué un dé spécial pour faire des paris. Il a trois faces avec un 1, deux faces avec un X, et une face avec un 2. Si on le lance, qu'est-ce qui sera ...
a) le plus facile à obtenir ? Pourquoi ?
b) le moins facile ? Pourquoi ?

Réponses et justifications :
a) qu'est-ce qui sera le plus facile ?
30 élèves sur 235 ne répondent pas à la question.
5 élèves répondent 'un 2'.
22 élèves répondent 'un X.'
178 (**76 %** de l'effectif total) répondent correctement : un '1'.
169 élèves (72 % de l'effectif total) justifient correctement.

On peut considérer que cette question est, dans l'ensemble, bien traitée par les élèves, avec des justifications claires.

b) qu'est-ce qui sera le moins facile ?
56 élèves sur 235 ne répondent pas à la question.
4 élèves répondent 'un 1'.
16 élèves répondent 'un X.'
159 élèves (**67 %** de l'effectif total) répondent correctement : un '2'.
152 élèves (65 % de l'effectif total) justifient correctement.

Au sujet de ce questionnaire, lire également [BP]

Analyse des réponses au questionnaire C

Question C2 :

On lance deux dés. Si le total des deux est supérieur à 9, tu marques un point ; si cette somme est inférieure à 4, c'est moi qui marque un point. Qui a le plus de chances de gagner ?

Ont été comptées comme correctes les réponses du type « c'est moi qui ai le plus de chances » ; « c'est celui qui fait >9 » ; etc. ; parmi les réponses fausses, nous avons comptabilisé à part les élèves pour lesquels il y avait égalité de chances.

Résultats :
Sur les 204 élèves testés, **107**, soit **52 %** répondent correctement.
32 élèves ont répondu qu'il y avait égalité de chances (soit un tiers des réponses fausses).
113 élèves ont fourni une justification à leurs réponses.
Parmi ceux-ci, **22** (soit **19 %** des 113) ont fourni une justification considérée comme satisfaisante.

Exemples de réponses données par les élèves :

- Celui qui a le plus de chance c'est celui qui aura fait plus de 9. Parce que comme il y a deux dés, on a plus de chances que le résultat soit supérieur à 9, mais il se peut que le nombre soit inférieur à 4, seul le hasard peut décider des choses (6ème).
- Moi, parce que avec deux dés il est plus facile de faire un gros chiffre qu'un petit (6ème).
- On a les mêmes chances de gagner, car après 9 il y a 10, 11, 12 ; et avant 4 il y a 3, 2, 1. Il y a donc 3 chiffres possibles dans chaques cas. (6ème).
- On a autant de chances de gagner, puisqu'il y a trois nombres qui permettent de gagner et 3 nombres qui permettent de perdre. (4ème).
- C'est toi qui as le plus de chance car le maximum est de 12 et le minimum de 2. Donc tu as l'écart le plus petit avec le nombre maximum que tu dois faire. (3ème).
- Nous avons autant de chances de gagner, car 9 + 3 = 12 et 4 – 3 = 1. Si ça tombe les deux sur six : 6 + 6 = 12. *(les deux 12 sont encerclés et reliés par une flèche)* (6ème).
- C'est moi qui ai le plus de chances : 9 + 2 = 11, moi j'ai 11 chances ; 4 + 2 = 6 vous en avez 6. (4ème).
- C'est moi car avec 2 dés tu additionnes les chiffres : pour faire inférieur à quatre tu peux faire 2 + 1 = 3, 1 + 1 = 2, que moi j'ai plus de chance. (4ème).
- Moi, car il y a deux dés, s'il n'y en avait qu'un c'est l'autre qui pourrait gagner (6ème).
- Il n'y a ni l'un ni l'autre. Parce que 9 = 1 point et 4 = 1 point. C'est égal (6ème).
- Nous avons le même nombre de chances, car 4 – 1 = 3 et 12 – 9 = 3 (12 est le maximum avec les deux dés). (4ème).
- C'est moi, parce que pour 9 il faut deux dés. (6ème).
- Ils ont tous les deux des chances de gagner car ils ont tous les deux 4 chances de gagner (5ème).
- C'est moi qui ai le plus de chances de gagner, car si son adversaire fait plusieurs [*fois ?*] un nombre inférieur il s'en sort avec un bon nombre de points (5ème).

- C'est celui qui est supérieur à 9 ; car sur les dés il y a 1, 2, 3 … 6 donc il ne faut pas que les dés dépassent 4. (5ème).
- On ne peut pas savoir car c'est un jeu de hasard (5ème).
- Cela dépend, comment les joueurs vont lancer leurs dés et donc du nombre de rotations des dés mais pour cela il faut que les joueurs aient le même chiffre de départ sur les dés. (5ème).
- Je pense que l'on a tous les deux la même chance de gagner, car si les dés font 2 et 1 *(il a dessiné les dés)* tu gagnes. Si les dés font 5 et 6 je gagne, mais si par exemple les dés font 5 et 1 on perd tous les deux. (5ème).
- Ni l'un ni l'autre, car chacun ont (*sic*) une chance sur 4. (5ème).
- Le 9 a plus de chance ; car avec 2 dés, moi, j'obtiens toujours plus de 4. Mais c'est moi, c'est du hasard. (5ème).
- C'est toi, car il est possible de faire 4 avec un double, tandis que 9 non. (4ème).
- Aucun des deux, car le plus souvent le total des deux dés sera compris entre 4 et 9. (4ème).
- Je pense que les probabilités sont quasiment égales. Je ne sais que répondre. (4ème).
- Cela dépend du hasard, de la probabilité et de la chance, mais « l'espace » de séparation entre 4 et 9 est trop grand. Si c'était entre 5 et 6, le score pencherait sur moi. (3ème).

Question C4 :

On joue avec deux dés, en les lançant chacun notre tour. Je prétends que c'est plus difficile pour moi de faire un double six que pour toi de faire un double trois. Ai-je raison ?

Exemples de réponses correctes : « *Non ; vous avez tort* » ; « *Il y a autant de chances* » ; etc.

Résultats :
108 (soit **53 %** des 204 élèves testés) répondent exactement.
148 élèves (**73 %**) ont fourni une justification à leurs réponses.
Parmi ceux-ci, **51** (34 % des 148) ont fourni une justification considérée comme satisfaisante.

A signaler que seulement **6** élèves sur les 204 ont fourni une réponse exacte avec explication correcte aux deux questions à la fois.

Exemples de réponses fournies par les élèves :

- Non, car ce n'est pas des chiffres, c'est le HASARD (*en énormes caractères*) qui décide (6ème).
- Non, parce que ce sont les dés qui décident du chiffre, et en plus ce sont des doubles (6ème).
- Tu n'as pas raison car le jeu de dés est un jeu de hasard (5ème).
- Il n'y a pas de raison, c'est aussi dur de faire le double de six que le double de trois, parce que c'est deux doubles. (5ème).
- Tous les deux sont pareils, il faut juste avoir de la chance (5ème).
- Oui et non, car il faut que pour que les joueurs soient à chance égale, il faut que les dés aient les mêmes nombres de départ, là aussi c'est le hasard. (5ème).
- Non, cela est aussi difficile car 3 et 6 sont en face. (5ème).
- Oui-non c'est du hasard comme toutes les autres questions (5ème).
- Ça dépend (6ème).
- Non, car c'est la même chose sauf que les nombres sont différents, pour moi c'est de la chance. Ou alors les six sont plus grands que les trois donc c'est plus dur à faire. (4ème).
- Non, 3 ou 6 c'est pareil. Mais remarque, je trouve que faire 6 c'est plus dur, je ne sais pas pourquoi mais quand je joue je fais difficilement 6. (4ème).
- Non, car tous les deux ont autant de chances de faire un double de six qu'un double de trois. Mais c'est quand même plus difficile de faire un double de six. (6ème).
- Oui, il a raison, c'est plus facile de faire 3 que 6. (6ème).
- Oui, car un double trois sort souvent, et plus facilement que le double six (5ème).

- ~~Oui tu as raison si je fais un double~~ (*c'est barré sur la feuille*) moi je peux faire un double six car c'est possible de faire double six que de faire double trois (5$^{\text{ème}}$).
- Oui, parce que le six quand on joue à un jeu de société c'est plus dur à avoir (6$^{\text{ème}}$).
- Oui, c'est plus dur, parce qu'il faut avoir de la chance (6$^{\text{ème}}$).
- Non, car c'est rare de faire deux fois les mêmes chiffres. (6$^{\text{ème}}$).
- Oui et non parce qu'il y en a un qui a l'habitude de faire des doubles 3 et l'autre qui a l'habitude de faire des doubles 6. (6$^{\text{ème}}$).
- Oui, car si on avait 4 dés je pourrais faire 3 sur chacun des dés comme ça j'obtiendrais un double six. Et je serais à égalité. (6$^{\text{ème}}$).
- Pour moi, c'est le double six qui est le plus facile ; donc vous n'avez pas raison (5$^{\text{ème}}$).
- Oui, il a raison, parce que chiffre est plus petit donc. (5$^{\text{ème}}$).
- Non, car 6 c'est plus gros que 3 alors c'est plus difficile. Mais tu peux gagner aussi car double-trois c'est plus difficile. C'est un peu pareil mais c'est mieux de faire double-six. (5$^{\text{ème}}$).
- Oui vous avez raison car 3 est le milieu des nombres de 1 à 6 (4$^{\text{ème}}$).
- Oui car ça ne peut pas tomber du 1$^{\text{er}}$ coup et en plus moi c'est impair et vous c'est pair alors j'ai plus de chance (4$^{\text{ème}}$).
- Oui, j'ai raison, parce que c'est un nombre pair (même s'il ne tombe pas souvent). (4$^{\text{ème}}$).
- Oui. Car en tirant peu fort, on obtient facilement un double trois, mais on est obligé de jouer très très fort sans jamais obtenir de double six. (4$^{\text{ème}}$).

2. Au lycée

CLASSE DE 1ère
TEST INDIVIDUEL SUR LA NOTION DE PROBABILITÉ

Les questions posées s'inspirent très fortement d'un test individuel réalisé par Annie et Michel HENRY, publié dans le n°6 (janvier 1992) de la revue REPERES-IREM (page 38).
Elles sont posées à des élèves de première avant que le professeur ne commence quelque activité que ce soit dans le domaine des probabilités.

La synthèse ci-dessous porte sur six classes de première, soit au total 154 élèves.
La troisième question n'a été posée que dans 3 classes (78 élèves).

Les réponses des élèves permettent au professeur d'approcher (en partie) les représentations que se font les élèves des notions de hasard et de probabilités. Elles permettent également de se rendre compte de tout le travail qui aurait pu être fait « en amont », pour donner aux jeunes une ***culture*** de l'aléatoire[1].

Première question : Voici des informations sur les résultats du LOTO : nombre de sorties de chaque numéro depuis que ce jeu existe (premier tirage en 1976).

Boules	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Sorties	452	426	427	457	441	457	474	416	424	413	419	433	431	431	442	464

Boules	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Sorties	402	455	457	433	442	437	440	428	436	433	439	441	398	439	453	441

Boules	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Sorties	394	442	442	456	442	465	453	446	422	451	455	420	458	428	408	420	451

Ces informations peuvent-elles être utiles à un joueur pour jouer la prochaine fois, et en quoi ?

54 réponses « Ces informations sont **INUTILES** »

Raison la plus souvent évoquée : *c'est un jeu de hasard, c'est du pur hasard, ...*
Avec quelquefois des précisions fort pertinentes :
« Les tirages précédents n'influencent pas le prochain tirage »
« C'est du pur hasard, ce qui s'est passé avant n'intervient pas »
Notons deux fois la réponse : *« ce n'est pas utile, car les boules sont pratiquement autant sorties les unes que les autres »*

69 réponses « Ces informations sont **UTILES** »

53 disent qu'il faut choisir les numéros qui sont sortis **le plus souvent**
8 disent qu'il faut choisir les numéros qui sont sortis **le moins souvent**
Par exemple « *Je suppose que les boules qui sont le plus sorties ne sortiront plus une nouvelle fois* ».
Un élève précise « *que ça a tendance à s'égaliser* »
8 donnent une explication plus ou moins floue
(exemple : « grâce à ces chiffres, on va pouvoir calculer »)

29 réponses diverses

par exemple :
« *C'est inutile, les gens jouent des dates de naissance* »

[1] Que nous reprenons ci-après dans les propositions que nous formulons.

« *Ca dépend si on a de la chance ou si on en a pas* »
« *Chaque boule a une chance sur 49 de sortir* »
« *Il se peut que les mêmes boules ressortent plusieurs fois à plusieurs moments* »
dont **3** réponses **contradictoires**
du type « ces informations sont inutiles, mais on peut augmenter ses chances en jouant celles qui sortent le plus souvent »

2 non-réponse

Seconde question : Que penses-tu des affirmations suivantes (sont-elles vraies, sont-elles fausses, ...) ? Argumente ta réponse. Affirmation n°1 : « *Il y a **une chance sur deux** pour qu'il fasse beau demain matin à 10 heures* ».

95 réponses sur 154 (près des deux tiers) valident ce type de raisonnement :
88 réponses du type « OUI, car soit il fait beau, soit il ne fait pas beau »
4 réponses du type « NON, car il y a plus de deux sortes de temps »
exemple : « *Il peut faire beau ou pleuvoir ou neiger, donc une chance sur trois* »
3 réponses OUI, c'est vrai, sans plus de justification.

26 réponses infirment ce type de raisonnement
dont **20** réponses expliquant clairement qu'à cette saison, il y a beaucoup plus de chance qu'il fasse mauvais
Exemples :
« *On est en hiver, donc il y a plus de chances qu'il fasse mauvais* »
« *Il neige aujourd'hui, il fera sûrement mauvais demain* »
« *Il neige aujourd'hui. Demain il fera froid. Il y a une chance sur 1000 qu'il fasse beau* »

32 réponses sont parfois difficiles à interpréter
Mais parmi celles-ci, certaines parlent de la prévision météo en général :
« *le temps est imprévisible* »
« *trop de facteurs entrent en jeu* »
« *le temps qu'il fera n'a rien à voir avec la chance* »
« *il faut écouter ce que la météo prévoit pour demain* »
« *On ne peut pas estimer les chances probables du beau ou du mauvais temps : rien n'arrête la nature* »
« *On ne peut pas prévoir le temps : même la météo se trompe* »

1 non-réponse

Seconde question : Que penses-tu des affirmations suivantes (sont-elles vraies, sont-elles fausses, ...) ? Argumente ta réponse. Affirmation n°2 : « *Si je lance simultanément deux pièces de 1 F, il y a **une chance sur trois** de voir 1 pile et 1 face* ».

102 réponses '**VRAI**' (soit plus des deux tiers des élèves)
92 expliquent qu'il y a trois combinaisons possibles, que « *c'est soit 2 'PILE', soit 2 'FACE', soit un de chaque* », etc., **donc** il y a bien une chance sur trois.
4 disent que c'est vrai parce qu'il y a trois possibilités : 'PILE', 'FACE' et... 'sur la tranche'
2 parce qu'il y a 2 pièces
3 disent que c'est vrai, mais sans aucune justification
1 écrit « C'est possible, car je vous fais confiance » (!).

29 réponses '**FAUX**'

6 d'entre eux (en moyenne, un par classe) font le raisonnement correct amenant à 1/2, dont 3 doublants qui dont un arbre des possibilités. Un exemple d'argumentation : « *Non, on a une chance sur deux car la combinaison peut se faire deux fois : pile/face et face/pile* ».
6 écrivent qu'il y a une chance sur deux car il y a deux pièces
1 écrit qu'il y a une chance sur 2 car une pièce fait soit pile, soit face.
3 élèves écrivent qu'il y a une chance sur 4 car il y a en tout 2 piles et 2 faces
1 écrit qu'il y a une chance sur 4 « *car pour le premier lancer il y a une chance sur deux d'avoir pile, et pour le second il y a une chance sur deux d'avoir face. Donc la probabilité est de ½*½=1/4* ».
1 a calculé qu'il y avait une chance sur 4 car il y a 2 piles, 2 faces, et 2 'sur la tranche'
10 élèves écrivent qu'il y a une chance sur 2 ou une chance sur 4, mais sans aucune justification
1 a calculé qu'il y a « plus de possibilités »

18 réponses diverses, dont
6 élèves affirmant qu'il est impossible de le savoir
3 que cela dépend de la façon dont on lance les pièces
2 qu'il faut faire l'expérience pour pouvoir répondre,
et **7** réponses difficiles à classer ou à interpréter.

5 non-réponse

Troisième question : Fred joue à pile ou face et a déjà lancé trois fois sa pièce de 1 F ; il a obtenu ***Pile*** les trois fois. Qu'est-ce qui est le plus probable pour le prochain coup : ***Pile*** ou ***Face*** ? et pourquoi ?

22 réponses du type '**égale probabilité**', '**une chance sur deux**', '**50-50**', '**aucune n'est plus probable**' ...

22 réponses **ambiguës**, qui ne disent pas clairement ce qui est le plus probable, du type « *On ne peut pas savoir ce qui va sortir, car c'est le hasard* ; etc. »

9 réponses '**C'est FACE**'
avec des arguments du genre « *Car il ne peut pas tomber plus de 3 fois sur PILE* », « *car on a déjà eu 3 PILE* », « *car il y a autant de PILE que de FACE* »...

8 réponses '**C'est PILE**'
avec des arguments du genre « *S'il a de la chance* », « *car on a déjà eu 3 PILE* », « *C'est le plus probable, c'est déjà arrivé 3 fois* ».

6 réponses « **on ne peut pas le savoir** »
dont « *on ne peut pas le savoir, sauf si la pièce est truquée* », « *on ne peut pas savoir, ça dépend de la force émise, de la façon dont c'est fait : la probabilité n'est pas ici de mise* », « *on ne peut pas le savoir : PILE pourrait bien tomber une dizaine de fois de suite* »

13 réponses plus difficiles à interpréter
Exemples : « *Un des deux, c'est le hasard ; mais s'il lance la pièce de la même façon il obtiendra sûrement PILE* », « *Les deux sont possible, c'est un jeu de hasard où la probabilité est infime* »

7 non-réponse

PROPOSITIONS

1. Quel enseignement de l'aléatoire au collège ?

Voici ce que nous écrivions il y a trois ans, et qui nous a guidés dans nos recherches :

Le traitement de l'aléatoire au collège, objectifs généraux :

Donner une " culture " de l'aléatoire à tout citoyen, et faire en sorte que de très solides " intuitions " puissent se développer :

1. être capable de distinguer ce qui ressortit à l'expérience aléatoire (hasard " calculable ") de ce qui ressortit à la contingence fortuite, et être capable d'avoir un esprit critique devant certaines affirmations des media ;
2. être capable de déterminer a priori la probabilité de phénomènes aléatoires en utilisant diverses stratégies ;
3. " intégrer " le fait que la probabilité d'un événement est la limite des fréquences observées.

Le programme du collège devra fournir une assise solide pour l'enseignement des probabilités en seconde, et de la statistique inférentielle dans les classes scientifiques du lycée.

Objectifs :

1. Être capable de distinguer entre " le hasard de la contingence " (enchaînement fortuit de faits incontrôlables, non reproductibles...) et " l'aléatoire " (expériences définies par un certain protocole, reproductibles - au moins en pensée, quantifiables - même 'moyennisables' -, dont toutes les issues sont prévisibles ; par exemple : tirage au sort, urne de loto, roue de loterie, jet de dés, etc.). Écrire un *protocole* d'expérience aléatoire.

2. Réaliser des expériences aléatoires, et faire des statistiques correspondant à l'apparition de diverses issues (choisies à l'avance).
   a) Utiliser des informations diverses, connues a priori (symétries, croyances, observations préalables...) pour attribuer une probabilité à un événement dans une expérience aléatoire (au début, cette probabilité sera exprimée en termes de rapport de " chance ").
   b) Réaliser effectivement cette expérience aléatoire ; traiter statistiquement les résultats (en lien avec le programme de statistiques descriptives : diagrammes, fréquences relatives, médiane, moyennes, etc.)
   c) Comparer la statistique observée avec ce qui était attendu : " mesurer les écarts ".
   d) Critiquer le modèle construit a priori dans le cas d'un trop grand écart avec l'observation (exemple : jeter de deux pièces, et apparition des événements " *deux piles* ", " *deux faces* ", " *un de chaque* "). Se poser la question : un tel écart peut-il être dû au hasard ? Aborder la notion de risque (" je dis que tu as triché "...).

3. Simuler des expériences aléatoires. La simulation ne se fera au collège que sur des expériences déjà réalisées au préalable 'à la main' (le modèle aura donc été clairement identifié) : il ne doit s'agir que d'un gain de temps et d'échelle :
   a) simulations à l'ordinateur (faites par l'enseignant) : observation sur l'écran des fluctuations, etc.
   b) simulations faites par l'élève sur sa calculatrice, grâce à la touche RANDOM (en particulier l'instruction rand(n) simulant l'apparition d'un entier de la liste {1, 2, ..., n} avec équiprobabilité, et qui peut être utilisée pour simuler d'autres événements : jets de dés, etc.).

   Observer la fluctuation des fréquences lorsque n croît : représentations graphiques.
   Comparer ces fluctuations lorsqu'on répète la même expérience.
   Comparer cette fluctuation à la probabilité lorsque celle-ci était déterminée a priori.
   Idée d'estimation de la probabilité d'un événement (lorsque celle-ci n'est pas concevable a priori : exemple *la punaise*, ou *le jeu de franc-carreau*) par la fréquence observée.

4. Calculer de probabilités simples dans le cas de modèles discrets (où les événements élémentaires sont équiprobables) : symétries " géométriques " (dés), modèle de l'urne ou de la roulette, règle de Laplace, dénombrements très simples.

Voici ce que, pour nous, pourraient être les acquis des élèves en fin de collège :

Savoir ce qu'est une ***expérience aléatoire*** : c'est tout d'abord une expérience (au vrai sens du terme : on doit la réaliser) ; cette expérience peut être décrite par un « protocole », elle peut être répétée (au moins en théorie) autant de fois que l'on veut dans les mêmes conditions, on peut en déterminer à l'avance la liste des issues, on ne peut prévoir quelle en sera l'issue au moment où on la réalise[1]. L'idée étant « *le hasard n'a pas de mémoire* ».

Savoir qu'il y a « égale probabilité » (dite en termes de « chances ») dans un certain nombre de cas : lancer d'une pièce, lancer d'un dé, tirages de boules au loto, roulette à secteurs égaux, etc. Le raisonnement que doit faire l'élève étant du type « *Il n'y a pas plus de chances que ceci arrive plutôt que cela* », pour des raisons de symétrie, de régularité des objets... (ce qu'on appelait à la Renaissance la Géométrie du Hasard).

Savoir que ce n'est pas parce qu'il y a *k* possibilités qu'il y a « *une chance sur k* » que l'événement se produise. Exemples : une roulette dont les secteurs sont inégaux, une urne contenant des boules de couleurs en proportions différentes.
Les élèves devront avoir construit des « modèles mathématiques » correspondant à ces expériences : probabilités proportionnelles aux secteurs (aux arcs de circonférence, aux angles au centre) dans le premier cas, probabilités proportionnelles aux nombres de boules de chaque couleur dans le second cas.

Observer des « fluctuations d'échantillonnage » : sur des cas simples (comme pile/face, dés), avoir fait des statistiques sur un grand nombre de coups (une centaine), et comparer avec les résultats des autres (le professeur apportera l'information concernant d'autres classes, d'autres années...) ; traiter statistiquement ces fluctuations. Se rendre compte qu'on est peut-être **loin**[2] de la probabilité attendue (on pourra faire la comparaison en termes *d'espérance théorique*, calculée comme une moyenne : par exemple, si on lance 100 fois une pièce, *on espère théoriquement* 50 'PILE').

Un objectif final (dont nous ne savons pas s'il peut être atteint à ce stade) serait : savoir faire la différence **de nature** entre une fréquence observée (a posteriori), qui est du domaine de la statistique, d'une probabilité (déterminée a priori).

REMARQUE

La loi des grands nombres, qui s'exprime en termes usuels par « *la fréquence observée tend vers la probabilité* » converge de façon extrêmement lente, et pas du tout monotone[3] ; d'autre part, les résultats des expérimentations fluctuent de façon importante : on ne peut donc pas s'appuyer sur les seules observations et sur une loi des grands nombres intuitive pour déterminer des probabilités à ce niveau.
Certaines propriétés devront donc être affirmées comme vraies par le professeur (et non vérifiables), de la même façon que le professeur de géographie affirme au collège que la Terre est ronde et qu'elle tourne autour du Soleil.

[1] On l'aura vu dans les tests réalisés en classe de première, ainsi que dans [PL] : pour les élèves, la plupart du temps, seule la dernière condition suffit.
[2] Et parfois même très loin !
[3] Voir [PL].

2. Quel enseignement des probabilités au lycée ?

Il y a deux ans, nous avions commencé à travailler sur le scénario suivant (avec comme hypothèse que tout ce que nous avions construit pour le collège était réalisé) :
En classe de seconde : travail sur les probabilités (langage des événements, etc.), correspondant approximativement à ce qui était dans les programmes de première de 1991.
En classe de première : probabilités conditionnelles, variable aléatoire et espérance.
En classe de terminale : Travail plus poussé sur les fluctuations d'échantillonnage, les estimations et les tests d'hypothèse.

Voici un exemple de problèmes que nous imaginions possibles en fin de terminale (outre les problèmes déjà actuellement exigibles) :

> Je joue à « pile ou face » avec un ami ; pour gagner, il faut faire 'PILE'. Sur les 10 coups précédents, il a déjà fait 9 fois 'PILE'. Puis-je l'accuser de tricher ? Avec quelle « marge d'erreur » ?

> Notre canton compte 28 587 électeurs. Un institut de sondage en tire 850 au hasard, et leur demande pour qui ils vont voter demain. 53 % répondent « Pour Dubois » et 47 % « Pour Holzmann ». Le journal local peut-il titrer « Dubois sera élu » sans risque ?

> Je donne un énorme tas de croquettes à mon chat (il y a 50% de vertes et 50% d'oranges dans la boite). Mon chat mange 12 croquettes : 9 oranges et 3 vertes. Pensez-vous que le hasard puisse donner un tel écart ? Puis-je affirmer qu'il préfère les croquettes oranges ?

> A Liardtown, au Texas, il y a en moyenne chaque année 6 hold-up (c'est une moyenne des 10 dernières années). Cette année il y en a un 12. Le journal local titre : « Recrudescence de la délinquance : deux fois plus de hold-up que la normale cette année ». Commentez cette affirmation.

Cette même année, le G.T.D. (devenu par la suite le G.E.P.S.) de mathématique proposait un nouveau programme pour la classe de seconde (mis en application à la rentrée de septembre 2000), suivi de deux projets (A et B) pour la voie scientifique. Ces deux derniers projets ont été retirés, remplacés fin 2000 par de nouveaux projets pour la terminale S et la terminale ES, soumis à consultation au moment où nous écrivions ces lignes.

Le projet pour la série S reprenait grosso modo l'ancien programme, en lui ajoutant un nouveau chapitre : *Loi de Bernoulli, lois binomiales. Lois continues à densité : loi uniforme sur [0;1], loi de Gauss ; approche par simulation de quelques éléments du raisonnement statistique (problématique de l'adéquation de données expérimentales à une loi équirépartie)*. Sur ce dernier point, le document d'accompagnement précisait qu'il s'agissait de la distance du χ^2.
Le projet de terminale ES allait un peu plus loin : il ajoutait *Simulation et adéquation à une loi équirépartie, simulation et comparaison de deux pourcentages*. Et, dans la spécialité, tout un travail sur *les graphes probabilistes, les matrices de transition, et le calcul des états successifs à partir des produits de ces matrices, avec le théorème de convergence pour les graphes probabilistes à 2 sommets*. Le document d'accompagnement comprenait également une annexe sur la problématique des tests de dépistage.
Nous ne savons pas ce qu'il est advenu de cette consultation et de ces programmes.

Nous n'avons pas voulu travailler sur ces projets : notre problématique était de concevoir un enseignement de « l'aléatoire » s'échelonnant sur les 7 années de la scolarité secondaire.
Certes, nous trouvons quelques idées intéressantes dans les projets du G.E.P.S., mais nous y voyons surtout un **énorme défaut** : tout se fait en 3 ans, et cela va beaucoup trop vite.
Nous pensons qu'il faut bien les 4 années de collège pour amener les élèves à une « culture de l'aléatoire » (voir pages précédentes), permettant de mettre en place dès la première année de lycée le chapitre « probabilités ».

Ce que nous prônions pour la terminale correspondrait plutôt à une « culture » des statistiques inférentielles (problèmes d'estimations et tests d'hypothèses). Nous voudrions que les élèves comprennent la problématique sous-jacente (qui n'est pas simple du tout), et puissent essayer de résoudre (avec les outils à leur disposition) des exercices tels que ceux que nous présentons ci-dessus. Et nous laissons à l'enseignement post-bac le soin de mettre en place les théories mathématiques sous-jacentes et de donner les outils permettant de résoudre les problèmes de statistiques inférentielles

A titre d'exemple, reprenons le premier exercice ci-dessus :

Je joue à « pile ou face » avec un ami ; pour gagner, il faut faire 'PILE'. Sur les 10 coups précédents, il a déjà fait 9 fois 'PILE'. Puis-je l'accuser de tricher ? Avec quelle « marge d'erreur » ?

Si mon ami ne triche pas, je sais qu'il y a à chaque fois une chance sur deux pour que la pièce fasse 'PILE'. Sur 10 coups, il y a $2^{10} = 1024$ issues possibles (en considérant l'ordre d'arrivée des pièces).
Parmi celles-ci, une donne dix piles : PPPPPPPPPP, et dix donnent 9 piles : FPPPPPPPPP, PFPPPPPPPP, ... PPPPPPPPPF.
Il y a donc une probabilité de 11/1024 (environ 1 chance sur 100) que l'événement « *au moins 9 'PILE' apparaissent* » se réalise.
Par contre, si mon ami triche, je ne sais pas « comment » il triche, et je ne connais plus la loi de probabilité associée à la pièce (dans la mesure où on peut parler de probabilité, car on n'est certainement plus dans le domaine de l'aléatoire).
Je me place donc dans l'hypothèse où c'est le hasard seul qui régit la situation, et je me dis : il n'y a qu'une chance sur 100 que cet événement se produise ; c'est extrêmement peu. Je vais donc l'accuser de tricher. Mais il y a 1 chance sur 100 que je l'accuse à tort[1] (c'est à dire que le hasard ait pu donner 9 'PILE'). Tant pis, je prends ce risque, et je l'accuse.
Il est aussi important de savoir, pour la « formation du citoyen », que les probabilités et statistiques fournissent une information qui va **aider** à prendre une décision. Mais en aucun cas ce ne sont les statistiques (ni l'ordinateur) qui décident.

Cette démarche de risque ne se rencontre pas dans les autres chapitres mathématiques. C'est une démarche de penser nouvelle et inhabituelle, et il faut la manipuler sur des exemples simples (comme les élèves de collège du canton de Neuchâtel manipulent les situations où interviennent les probabilités), avant de pouvoir plus tard la modéliser et la théoriser.
Sinon on risque de donner aux élèves des « recettes » qu'ils appliqueront à des catégories d'exercices, sans comprendre du tout ce qu'ils font (c'est malheureusement le cas pour certains élèves de S.T.S.).

[1] Ce qui signifie, en présentant les choses autrement, que si cette situation se présentait 100 fois, on aurait accusé quelqu'un à tort une fois (en moyenne).

BIBLIOGRAPHIE

[BP] Bernard PARZYSZ, *Peut-on envisager un enseignement de l'aléatoire au collège ?*, in LE MÉTIER D'ENSEIGNANT DE MATHÉMATIQUES, actes de l'université d'été de Marseille 1999, brochure APMEP n°133, 2001, ISBN 2-912846-09-9.

[CII] Commission Inter-IREM Probabilités et Statistiques. ENSEIGNER LES PROBAILITÉS AU LYCÉE : ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques et idées d'activités. Publié par le réseau des IREM. 1997. I.S.B.N. 2-910076-11-3.
Ce livre est actuellement épuisé, et devrait être republié sous forme de deux tomes distincts :
« AUTOUR DE LA MODÉLISATION AU LYCÉE », édité par les Presses Universitaires de Besançon, et « PROBABILITÉS AU LYCÉE », édité par l'APMEP.

[EM1] ESPACE MATH 1, éditions De Boeck Wesmael, I.S.B.N. 2-8041-3158-0. Manuel scolaire utilisé en Belgique et au Luxembourg.

[EM5] ESPACE MATH 5, éditions De Boeck Wesmael. Manuel scolaire utilisé en Belgique et au Luxembourg.

[HP] PROGRAMMES 2000-2001 de l'enseignement secondaire. Publication du Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle et des Sports. Grand-Duché du Luxembourg.

[IR] IREM de Rouen. STATISTIQUES AU COLLEGE : LEUR ENSEIGNEMENT EN EUROPE. 1994. 62 pages A4. I.S.B.N. 2-86139-062-3. Disponible à l'IREM de Rouen, 1 rue Thomas Beckett, B.P. 153, 76155-MONT-SAINT-AIGNAN.

[JCG] Jean-Claude GIRARD, Michel HENRY, Bernard PARZYSZ, Jean-François PICHARD, *Quelle place pour l'aléatoire au collège ?*, in Repères-IREM n° 42 de janvier 2001. ISSN 1157-285X.

[JCG2] Jean-Claude GIRARD, *Pourquoi et comment développer l'esprit statistique au collège et au lycée ?*, in LE MÉTIER D'ENSEIGNANT DE MATHÉMATIQUES, actes de l'université d'été de Marseille 1999, brochure APMEP n°133, 2001, ISBN 2-912846-09-9.

[JPB] BARDOULAT, Jean-Paul, *Tour d'Europe des systèmes éducatifs*, in Bulletin A.P.M.E.P. n° 426 (janvier-février 2000), page 37.

[JRV] José R. VIZMANOS et Máximo ANZOLA, ARITMOS MATEMÁTICAS. Manuels du secondaire, 4 tomes (un tome par classe). Editions SM Madrid. I.S.B.N. 84-348-4334-1, 84-348-4387-0 et 84-348-4388-9.
En vente à CESMA S.A., C/ Aguacate 43, 28044-MADRID.

[MS] The leaving certificate, MATHEMATICS SYLLABUS. Deux tomes : 1. Foundation level ; 2. Higher level and ordinary level. Peut être acheté directement à *Government publication sale office, Sun alliance house, Molesworth street, DUBLIN-2*. Coût : 1,5 £ chaque.

[PL] I.R.E.M. de Lorraine. PROBABILITÉS AU LYCÉE. Publication du groupe 'Proba-Stat' de l'IREM, 1993. 98 pages A4. I.S.B.N. 2-85406-140-3.

[RC] CABASSUT, Richard, *Enseignement des mathématiques au Danemark*, in « L'Ouvert », Journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg, n°77, décembre 1994, ISSN 0290-0068.

TABLE DES MATIERES

« ENFIN ! Voici tout (ou presque) ce que nous avions toujours voulu savoir sur l'enseignement des probabilités et de la statistique en Europe, sans oser le demander (à qui le demander, d'ailleurs ?) » (Bernard PARZYSZ)

TITRE :L'enseignement des probabilités au collège et au lycée Exemples européens et propositions

AUTEURS : Farida CHAIBAI,
Bernard PARZYSZ,
Daniel VAGOST,
Jacques VERDIER.

PUBLIC VISÉ : Enseignants de mathématiques de collège et de lycée ; Formateurs (formation initiale et formation continue)

RÉSUMÉ : Après un tour d'horizon des programmes de quelques pays européens et une analyse des représentations que les élèves se font du hasard, les auteurs proposent quelques pistes pour un renouvellement de l'enseignement de l'aléatoire au collège et au lycée.

MOTS CLÉ : Aléatoire ; Allemagne ; Apprentissage en spirale ; Approche d'un concept ; Basque ; Belgique ; Collège ; Conception ; Construction des connaissances ; Curriculum ; Danemark ; Enseignement des probabilités ; Enseignement européen ; Espagne ; Europe ; Hasard ; Irlande ; Italie ; Jeu de hasard ; Lancer de dés ; Luxembourg ; Probabilité ; Programme ; Programme d'enseignement ; Représentation mentale ; Russie ; Scolarité obligatoire ; Sens des mots ; Statistique ; Suisse ; Tirage aléatoire.