Agrégation interne
Thèmes d'Analyse

par J.-P. Ferrier

Année 2001-2002

Préparation à l'agrégation interne 2001/2002
Analyse

Pour l'année en cours, la préparation sera principalement orientée vers l'écrit. Cependant, pour l'Analyse et de la même façon qu'en 2000/2001, la rentrée de septembre commencera par 19 semaines autour d'autant de thèmes eux-mêmes articulés autour d'autant de leçons d'oral. La liste suit avec un calendrier de passage actualisé et des notes inchangées. Les six semaines supplémentaires seront entièrement consacrées à l'oral.

Cela étant, on limitera le temps accordé aux leçons, en donnant plus d'importance aux questions, lesquelles seront d'ailleurs associées aux petits exercices pour l'écrit.

Pour gagner un peu de temps, le plan et le développement, chacun présentés sur une page, seront photocopiés et distribués en début de séance, de façon centrer le travail sur les points à éclaircir.

Par ailleurs, chaque semaine on choisira aussi un titre dans la seconde liste de l'oral, et chacun devra préparer un ou plusieurs exercices de son choix correspondant à ce titre.

Ainsi sera constituée la première moitié de chaque séance. En gros on aura accordé une petite heure à la leçon et une demi-heure à quelques exercices résolus.

Toutes les deux semaines environ, on disposera d'une nouvelle feuille d'exercices, dont la fonction ne sera pas de constituer une base pour la seconde épreuve de l'oral mais de préparer directement l'écrit. Lesdits exercices pourront donc n'avoir aucun intérêt en temps que tels, et seront seulement une base d'entraînement.

L'un des exercices de chaque feuille sera à préparer chez soi et à rendre, en respectant un temps de 1h30, rédaction comprise, correspondant en gros au quart d'une épreuve écrite.

L'ensemble du travail, en direct, sur les exercices et éventuellement d'un retour rapide sur l'exercice à rendre occupera la seconde moitié de la séance.

Enfin, on organisera en Analyse, certains samedis et au cours d'une période bloquée pendant les congés de la Toussaint, des séances de 3 heures de préparation à l'écrit avec assistance.

On s'attachera, autant qu'il est possible, à dégager une méthodologie à l'occasion des exercices d'entrainement: analyse et appropriation de l'énoncé, appel et esquisse d'une stratégie, critique du travail partiel réalisé ... jusqu'à la rédaction finale.

Envoyer propositions et commentaires à
ferrier@iecn.u-nancy.fr

Topologie des espaces normés (mercredi 12 septembre 2001)

Exposé: espaces vectoriels normés de dimension fine ...

Exemples. En dimension finie, les espaces **R**, **C** ainsi que $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ avec les normes

$\max(|x_1|, \ldots, |x_n| = \|x\|_\infty$,

$|x_1| + \cdots + |x_n| = \|x\|_1$,

$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|x\|_2$,

qui sont *évidemment* équivalentes: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

En dimension infinie, l'espace $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur le *segment* $[a,b]$, avec

la norme *uniforme* $\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = \|f\|_\infty$,

la norme de la *convergence en moyenne* $\int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_1$,

la norme de la *convergence en moyenne quadratique* $\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \|f\|_2$,

lesquelles *ne sont pas équivalentes*, ce qui donne *trois* espaces normés.

Retenir l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\int fg\right| \leq \|f\|_2\|g\|_2$$

d'où $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$ en prenant $g = 1$, alors que $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$ directement.

Métrique et topologie. Un espace normé est muni de la distance

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

qui en fait un espace métrique. On peut restreindre la distance à une *partie* d'un espace normé, une boule par exemple, pour en faire encore un espace métrique.

Parler d'espace métrique permet de raisonner *sans se soucier* d'un espace plus grand qui le contiendrait. C'est très important: si l'on se place dans un espace métrique, rien n'existe en dehors.

Définitions. Dans un espace métrique M, la **boule ouverte** $B(a,r)$ de centre a et de rayon r est définie par $d(a,x) < r$ et la **boule fermée** $B'(a,r)$ de centre a et de rayon r est définie par $d(a,x) \leq r$.

Une partie U de M est ouverte si pour tout **point a de U**(1), il existe une **boule $B(a,r)$ avec $r > 0$ incluse dans U**(2) .

Une partie F de M est fermée si son complémentaire F^c est ouvert; cela revient à dire que toute **suite (x_n) de F qui converge vers x**(1) a sa **limite x dans F**(2).

Une partie V de M est un **voisinage** de a s'il existe une **boule $B(a,r)$ avec $r > 0$ incluse dans V**.

Caractérisation de la continuité. Une application $f : M \to M'$ est continue si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes:

(i) L'image réciproque d'une **partie ouverte** (1) est **ouverte** (2).

(ii) L'image réciproque d'une **partie fermée** (1) est **fermée** (2).

(iii) L'image d'une **suite qui converge vers x** (1) **converge vers $f(x)$** (2).

(iv) Pour tout a dans M (1) et tout voisinage V de $f(a)$ (1), il existe un voisinage U de a (2) tel que $f(U) \subset V$.

(v) Pour tout a dans M (1) et tout $\epsilon > 0$ (1), il existe $\eta > 0$ (2) tel que $d(a,x) < \eta$ implique $d(f(a), f(x)) < \epsilon$.

(1) à se donner; (2) à chercher ou à vérifier.

Compacité (mercredi 19 septembre 2001)

Exposé: Parties compactes de **R**, fonctions continues ...

Définition. Un espace métrique M est dit **compact** s'il possède l'une des propriétés équivalents suivantes:

(i) (Borel-Lebesgue) De toute famille (U_i) de parties ouvertes telle que $M = \bigcup_i U_i$ ([1]), on peut extraire une sous-famille $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ ([2]) telle que $M = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

(ii) (Bolzano-Weierstraß) De toute suite (x_n) ([1]) **(de** M**)** on peut extraire une suite convergente ([2]) **(dans** M**)**.

C'est la propriété de Bolzano-Weierstraß qu'on utilise le plus souvent. Celle de Borel-Lebesgue rédigée comme plus haut suppose que l'on travaille avec des parties ouvertes **de** M, et non pas celles d'un espace plus grand.

Théorème de caractérisation. Dans $\mathbf{R}^n$, les parties compactes sont exactement les parties fermées bornées.

Enoncés fondamentaux. Ce sont les

Théorème de la borne supérieure. Si K est un espace métrique **compact** et si $f : K \to \mathbf{R}$ est **continue**, alors f est **bornée et atteint ses bornes.**

Théorème de Heine ou de l'uniforme continuité. Si K est un espace métrique **compact**, M un espace métrique et $f : K \to M$ **continue**, alors f est **uniformément continue.**

Encore bon à savoir.

- Une *partie* compacte est fermée dans n'importe quoi.
- L'image d'un espace métrique **compact** par une application **continue** est **compacte.**
- Un produit fini (infini aussi c'est hors programme) d'espaces métriques compacts est compact.
- Une *partie* fermée d'un espace compact est compacte.

Pour **démontrer la compacité**, on pourra

- s'appuyer sur le théorème de caractérisation,
- ou les propriétés bonnes à savoir,
- ou chercher à montrer la propriété de Bolzano-Weierstraß. *Se donner* une suite (x_n) et *essayer de trouver* une sous-suite convergente.

Pour **utiliser la compacité**, on peut passer par les énoncés fondamentaux.

Sinon commencer par *attendre* le bon moment! *Ne pas se donner* de suite ou de famille de parties ouvertes. Attendre que le raisonnement (direct ou par l'absurde) amène à considérer une suite et embrayer avec la propriété de Bolzano-Weierstraß.

Connexité (mercredi 26 septembre 2001)

Exposé: parties connexes de **R**: fonctions continues ...

Définition. Un espace métrique M est dit **connexe** s'il vérifie une des propriétés équivalentes suivantes.

(i) Il n'existe pas de partition de M en deux parties ouvertes non vides.
(ii) Il n'existe pas de partition de M en deux parties fermées non vides.
(iii) Il n'existe pas de partie ouverte et fermée de M autre que $\emptyset$ et M.

L'idée est qu'un espace connexe est d'un seul tenant; il ne peut pas être coupé en deux parties séparées l'une de l'autre.

Attention! Lorsque M est un sous-espace d'un autre espace, il s'agit de parties ouvertes et fermées de M; ce sont les traces sur M de parties ouvertes ou fermées du grand espace. on évite cet écueil avec (i) lorsque M est un sous-espace ouvert ou avec (ii) lorsque c'est un sous-espace fermé.

Enoncés fondamentaux. Ce sont les

Théorème. Un intervalle de la droite est connexe.

De fait les intervalles sont exactement les parties connexes de **R**: si I n'est pas un intervalle, il existe a tel que $I = (I \cap]-\infty, a[) \cup (I \cap]a, +\infty[)$ où chacun des termes de la réunion est non vide.

Théorème des valeurs intermédiaires. Une fonction continue sur un intervalle qui prend des valeurs $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$ prend entre α et β toutes les valeurs comprises entre a et b.

On peut prendre ici les inégalités au sens large.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'un intervalle est connexe: si on pouvait écrire I comme réunion de deux parties U, V disjointes non vides et ouvertes (dans I), la fonction valant 0 sur U et 1 sur V serait continue sans posséder la propriété des valeurs intermédiaires.

Inversement, sachant qu'un intervalle $[a, b]$ est connexe, on en déduit le théorème des valeurs intermédiaires, grâce à la propriété facile qui suit.

Proposition. L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe.

Pour montrer la connexité, on évite la définition qui est négative, et on utilise si possible la propriété suivante (de connexité par arcs):

une condition *suffisante* de connexité est que l'on puisse joindre deux points a, b quelconques de M par un arc continu de M, image d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ par une application continue de $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ telle que $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$.

Pour utiliser la connexité, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires qui vaut aussi pour une application définie sur un espace connexe.

On peut aussi utiliser la propriété (iii), mais dite *sous forme positive*: si A est une partie non vide, ouverte et fermée (dans M) alors $A = M$.

Continuité, continuité uniforme (mercredi 3 octobre 2001)

Exposé: Fonctions numériques définies sur un intervalle: continuité ...

La continuité uniforme d'une application $f : M \to M'$ se définit comme suit:

Pour tout $\epsilon > 0$ ([1]) il existe $\eta > 0$ ([2]) tel que $d(x, y) < \eta$ implique $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Pour la montrer on ne se donne plus un point, mais seulement $\epsilon > 0$.

Une fonction continue n'est pas toujours uniformément continue. C'est le cas lorsque l'espace de départ est compact, par le théorème de Heine.

Pour montrer la continuité on a plusieurs options.

- La continuité est souvent automatique: la fonction s'obtient en combinant des fonctions continues; attention seulement aux dénominateurs.
- En une variable et en un point, on peut calculer une limite par développement limité.
- Dans un exercice théorique, on peut recourir à la définition.

La notion de **limite** recoupe largement celle de continuité. Si M, M' sont des espaces métriques, si A est une partie de M et a un point adhérent à A (i.e. limite d'une suite de points de A), une application $f : A \to M'$ est dite **admettre l comme limite quand x tend vers a en restant dans A** si

pour tout voisinage V de l il existe un voisinage U de a tel que $f(A \cap U) \subset V$.

Si a est dans A, la propriété exprime le fait que $l = f(a)$ et la continuité en a.

Si a est adhérent à A sans être dans A, la propriété exprime qu'on obtient une application continue en a en donnant à f la valeur l en ce point.

Noter qu'on toujours unicité de la limite.

Attention! Ne jamais débuter la démonstration d'une limite par quelque chose du genre

$$\lim_{x \to \cdots} f(x) = \cdots$$

mais simplement par

$$f(x) = \cdots$$

et, le moment venu, dire: lorsque $x \to \cdots$, on obtient à la limite $\cdots$ Après cela seulement, on peut résumer le résultat avec le symbole lim.

En deux variables, ou plusieurs, pour montrer la continuité ou une limite en (a, b), on ne peut se contenter de continuité ou de limite séparées: *il ne suffit pas* de faire $x \to a$ pour $y = b$ fixé et $y \to b$ pour $x = a$ fixé!

On retiendra que l'on doit laisser $x \to a$ et $y \to b$ "indépendamment". En pratique, on se donnera $\epsilon > 0$ et on cherchera $\eta > 0$ tel que les conditions $d(a, x) < \eta$ et $d(b, y) < \eta$ (on peut prendre le même η) impliquent ...

On rappelle enfin les **notations de Landau**. Si f est une fonction à valeurs complexes ou vectorielles et si g est une fonction à valeurs positive sur a, en un point a adhérent à A on écrit

$f = o(g)$ si $f = hg$ où $h(x) \to 0$ quand $x \to a$,

$f = O(g)$ si $f = hg$ où h est bornée au voisinage de a.

Retenir qu'un $o(g)$ est un $O(g)$ (à ne pas lire de droite à gauche!) et qu'un $o(g_1)O(g_2)$ est un $o(g_1 g_2)$.

Complétion, point fixe et méthode de Newton (mercredi 10 octobre 2001)
Exposé: théorème du point fixe ...

Définition. Une suite (x_n) d'un espace métrique est dite **de Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N tel que
$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \epsilon$$
pour tous $n \geq N$ et $p \geq 0$.

Un espace métrique M est dit **complet** si toute suite de Cauchy (de M) est convergente (dans M).

Théorème du point fixe. Soit M un espace métrique **complet** non vide et f une application de M **dans lui-même** pour laquelle il existe une constante positive $k < 1$ telle que
$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$
pour tous x, y dans M (on dit que f est contractante).

Dans ces conditions, il existe un unique point a tel que $f(a) = a$ (dit point fixe).

De plus, si a est un point quelconque de M et on définit par récurrence une suite (x_n) par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, alors (x_n) converge vers le point fixe a; plus précisément
$$d(a, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(a, x_1)$$
majore l'erreur commise en s'arrêtant au rang n.

Théorème (méthode de Newton). Soit f une fonction réelle de classe C^2 définie sur l'intervalle fermé I. On suppose que
$$|f''(x)| \leq C$$
pour tout x dans I; on pose
$$\alpha(x) = \frac{1}{|f'(x)|} \quad , \quad \beta(x) = |f(x)/f'(x)| \quad , \quad \mu = 2\alpha\beta C \quad \text{et} \quad \rho(x) = d(x, I^c)$$
et on suppose *en un point x_0 de I* que $f' \neq 0$ et que $\beta \leq \frac{1}{2} \min(\frac{1}{\alpha C}, \rho)$ (*).

Dans ce cas, on peut définir par récurrence une (x_n) de I partant de x_0 et vérifiant
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
et cette suite converge vers un point ξ de I tel que $f(\xi) = 0$. On montre en effet que l'hypothèse (*) se transmet de proche en proche. On posera $\alpha_n = \alpha(x_n) \ldots$ pour simplifier.

De plus
$$|x_n - \xi| \leq \frac{\mu^{2^n - 1}}{2^{n-1}} \beta_0$$
contrôle la convergence de x_n vers ξ. Enfin il y a unicité dans l'intervalle $[x_0 - r, x_0 + r]$ où $r = \min(1/\alpha_0 C, \rho_0)$.

Les hypothèses signifient que l'on part d'un point x_0 tel que $f'(x_0) \neq 0$ et que $f(x_0)$ est suffisamment petit. On a $|x_n - \xi| = O(\mu_0^{2^n})$, ce qui, pour $\mu_0 < 1$, montre que la méthode est d'ordre 2. L'énoncé est optimal: considérer $x^2/2$ sur $[0, 2x_0]$.

Pour cela adapter le problème de Calcul différentiel sur la méthode de Newton: remplacer "convexe" ou "boule" par "intervalle", $\| \ \|$ par $| \ |$ et les différentielles par des dérivées.

Séries entières (mercredi 17 octobre 2001)

Exposé: séries entières ...

Lemme d'Abel. Si $|a_n z_0^n]$ est borné, alors la série de terme général $a_n z^n$ converge en un point z tel que $|z| < |z_0|$, et normalement sur un disque $|z| \leq A$ avec $0 \leq A < |z_0|$.

Rayon de convergence. Il est défini comme l'unique nombre R de $[0, +\infty]$ tel que

- si $|z| < R$, la série converge absolument,
- si $|z| > R$, son terme général n'est pas borné.

On peut aussi le définir comme la borne supérieure des $r \geq 0$ tels que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty$ ou $\sup_n |a_n| r^n < +\infty$.

Le **disque de convergence** esr le disque *ouvert* de centre 0 et de rayon R . La série y converge absolument. Elle converge *normalement* dans tout disque de rayon *strictement* plus petit.

Exemples.

La série $z^n/n!$ a un rayon de convergence infini,
la série $n!z^n$ a un rayon de convergence nul,
la série z^n a pour rayon de convergence 1, et ne converge en aucun point du bord,
la série z^n/n a pour rayon de convergence 1, et converge au bord sauf en 1,
la série z^n/n^2 a pour rayon de convergence 1, et converge en tout point du bord.

Dérivabilité de la somme. La série dérivée $(n+1)a_{n+1}z^n$ a le même rayon de convergence R que la série $a_n z^n$. La somme de la série initiale est dérivable sur $]-R, R[$ et admet pour dérivée la somme de la série dérivée.

La démonstration de la seconde propriété repose sur le théorème de dérivation terme à terme. En effet

- la série converge en 0,
- et la série dérivée converge uniformément sur tout segment $[-A, A]$ avec $0 \leq A < R$.

Le dernier point résulte du lemme d'Abel appliqué à la série dérivée dont on sait que son rayon de convergence est R. Sinon on prend B tel que $A < B < R$ et on écrit

$$|na_n x^{n-1}| \leq |a_n| B^n n \left(\frac{A}{B}\right)^{n-1} \leq Mn \left(\frac{A}{B}\right)^{n-1}$$

ce qui montre la converge normale.

Théorème d'Abel. Si la série converge en z_0 au bord, elle est continue sur le rayon fermé, voire sur un secteur angulaire "non tangentiel".

Exponentielle (mercredi 24 octobre 2001)

Exposé: définition de l'exponentielle complexe ...

Définition. La série entière de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini: elle converge pour z quelconque. Sa somme

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

définit la fonction exponentielle, notée aussi $\exp z$.

Propriété fondamentale. On a

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

et en particulier $e^z e^{-z} = 1$ et $e^z \neq 0$. Ainsi la fonction exponentielle définit un homomorphisme du groupe addidif $\mathbf{C}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$.

En particulier $|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = 1$ pour y réel et

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

où e^x représente le module.

Dérivée. La fonction qui à x associe $e^{\alpha x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et vérifie

$$(e^{\alpha x})' = \alpha e^x$$

pour α complexe fixé.

Trigonométrie. On définit les fonctions trigonométriques cosinus et sinus comme les partie réelle et imaginaire de la fonction e^{ix}. Ainsi

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \ .$$

On vérifie aussitôt la relatin $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, les relations d'addition $\cos(a+b) = \ldots$ et les formules de dérivation $(\sin x)' = \cos x$ ...

Nombre π. On définit $\pi/2$ comme le *plus petit* $x \geq 0$ tel que $\cos x = 0$.

La première étape consiste à montrer que $\cos x$ s'annule. Pour cela on dispose de deux manières (au moins), sachant que $\cos 0 = 1$ et appliquant le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit on écrit $\cos 2 \leq 1 - 2^2/2 + 2^4/24 = -1 + 16/24 < 0$.

Soit on raisonne par l'absurde: si $\cos x > 0$ pour $x \geq 0$ alors $\sin x$ croît sur $[0, +\infty[$, d'où $\sin x \to a > 0$ quand $x \to +\infty$, et $\cos x \to -\infty$.

Montrer que $\cos x$ ne s'annule qu'une fois entre 0 et 2 est possible. Il est cependant plus élégant de noter que la borne inférieure des $x \geq 0$ tels $\cos x = 0$ est atteinte parce que leur ensemble est fermé par continuité de la fonction cosinus.

De $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$ (puisque $\sin x$ croît tant que $\cos x \geq 0$) on passe à l'intervalle $[\pi/2, \pi]$ par $\cos(x + \pi/2) = \ldots$ puis à $[\pi/2\pi]$ par $\cos(x+\pi) = \cdots$ et on tombe sur la périodicité.

En conclusion, l'homomorphisme du groupe additif $\mathbf{R}$ dans le groupe multiplicatif U des nombres complexes de module 1 qui à x associe e^{ix} est surjectif et a pour noyau le sous-groupe $2\pi\mathbf{Z}$.

Même chose pour l'homomorphisme du groupe additif $\mathbf{C}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ qui à z associe e^z.

Séries de Fourier: propriétés (mercredi 7 novembre 2001)

Exposé: séries de Fourier

Problématique. On se donne un nombre $T > 0$ et pose $\omega = 2\pi/T$. Il s'agit de décomposer une fonction T-périodique f, i.e. une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ telle que $f(x+T) = f(x)$ pour tout x, sous la forme d'une série (ou plutôt de deux)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} .$$

Si la série converge normalement, on a $c_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} e^{-in\omega t} f(t)dt$ en intervertissant intégration et sommation, pour α réel quelconque.

Coefficients de Fourier. On définit, pour n entier relatif, le coefficient de Fourier $c_n(f)$ d'une fonction T-périodique **continue par morceaux** par

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} e^{in\omega t} f(t)dt$$

où α est réel quelconque; en pratique on choisit souvent $\alpha = 0$ ou $\alpha = -T/2$ suivant la façon dont on a défini f; faire un dessin sommaire dans tous les cas.

On pose $a_n(f) = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} \cos(n\omega t) f(t)dt$ et $b_n(f) = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} \sin(n\omega t) f(t)dt$, pour $n \geq 0$ et pour $n > 0$. On passe facilement des c_n aux a_n et b_n et inversement. Les derniers sont liés à une décomposition $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$.

Dans tous les cas il s'agit de savoir si la série converge et représente f.

Convergence en moyenne quadratique. On met sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_m$ des fonctions continues par morceaux T-périodiques le produit hermitien

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} \overline{f(t)} g(t)dt$$

et on y considère le système orthonormé des e_n, où $e_n(x) = e^{in\omega x}$ et où n varie dans $\mathbf{Z}$. Alors $c_n(f) = \langle e_n, f\rangle$ et $\sum_{n=-p}^{q} c_n e_n$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace engendré par $e_{-p}, \ldots, e_q$.

On démontre que les polynômes trigonométriques, définis comme des combinaisons linéaires des e_n permettent d'approcher toute fonction de $\mathcal{C}_m$ pour la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ de la convergence en moyenne quadratique sur une période.

De là résulte la convergence en moyenne quadratique de la série vers f, au sens que

$$\lim_{p,q\to\infty} \int_\alpha^{\alpha+T} \left| f - \sum_{n=-p}^{q} c_n e_n \right|^2 dt = 0$$

avec, au passage, le fait que les c_n caractérisent f et l'égalité de Bessel-Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} |f(t)|^2 dt .$$

Dérivation, convergence normale. Si f est à la fois continue et continûment dérivable par morceaux, alors $c_n(f') = in\omega c_n(f)$. De plus $|c_n(f)| \leq \frac{1}{2n^2\omega^2} + \frac{|c_n(f')|^2}{2}$ et la série de Fourier de f est normalement convergente, de somme f.

Convergence ponctuelle, théorème de Dirichlet. Si f est continûment dérivable par morceaux, sa série de Fourier converge uniformément, avec f pour somme, sur tout segment sans point de discontinuité; les sommes symétriques convergent vers $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ en un point x de saut.

Séries de Fourier: applications (mercredi 14 novembre 2001)

Exposé: exemples d'emploi de séries entières ou trigonométriques ...

Retour sur la dérivation. Etant donné le rôle central des hypothèses, il convient de savoir justifier l'intégration

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} e^{-in\omega t} f'(t)dt = -\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} -in\omega e^{-in\omega t} f(t)dt = in\omega c_n(f)$$

par parties. On décompose l'intervalle de période en intervalles sur lesquels f est continûment dérivable. Les termes tout intégrés intermédiaires s'annulent si f est supposée *continue*, et les termes extrêmes par périodicité, si le raccordement est lui aussi *continu*.

Retour sur les discontinuités. Considérons une fonction f continûment dérivable par morceaux 2π-périodique, discontinue seulement aux points $2k\pi$; on pose $c_n = c_n(f)$.

La fonction g définie par $g(x) = (1-\cos x)f(x)$ est continue; sa série de Fourier est normalement convergente. On obtient $\sum_{n=-p}^{q} c_n(g)e^{inx}$ par projection orthogonale de $(1-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ sur le sous-espace $e_{-q},\ldots,e_p$. Cela donne

$$(1-\cos x)\sum_{n=-p}^{q} c_n e^{inx} + \frac{c_{-q}}{2}e^{i(-q-1)x} + \frac{c_p}{2}e^{i(p+1)x} - \frac{c_{-q-1}}{2}e^{-iqx} - \frac{c_{p+1}}{2}e^{ipx} .$$

Comme $c_n \to 0$ par Bessel-Parseval, chacun des quatre termes correcteurs de droite converge uniformément vers zéro. La suite double $(1-\cos x)\sum_{n=-p}^{q} c_n e^{inx}$ converge donc uniformément lorsque $p, q \to \infty$. En divisant, on obtient encore la convergence uniforme sur tout segment où $1-\cos x$ est minoré, du type $[\epsilon, 2\pi-\epsilon]$ où $0<\epsilon\leq\pi$.

Sommation de séries. Si la série u_n représente la valeur en un point a de la série de Fourier de la fonction périodique f, sa somme sera $f(a)$, *à condition* que la série représente bien f en ce point. Si l'on invoque le théorème de Dirichlet il convient de vérifier que f est bien continue au point en question; faire attention aux raccordements; rien ne remplace un dessin.

Si la série u_n est la série $|c_n(f)|^2$ des carrés des modules d'une fonction périodique f, la formule de Bessel-Parseval sera utilisée.

Solutions périodiques d'équation différentielles. La période T est donnée ici. La méthode de résolution procède en deux temps.

D'abord on suppose le problème résolu, se donnant une solution T-périodique f. Pour une équation du second ordre avec second membre continu cela implique que f est de classe $\mathcal{C}^2$. On prend les coefficients de Fourier des deux membres en appliquant le théorème de dérivation. On en déduit $c_n(f)$. De cette façon on a établi l'unicité.

Ensuite on montre que l'on peut sommer la série de Fourier obtenue et que la somme est bien solution de l'équation donnée. Pour cela on appliquera le nombre de fois qu'il faut le théorème de dérivation terme à terme des séries, en vérifiant chaque la convergence normale des séries dérivées.

Parallèlement, on peut chercher à attaquer directement le problème, ce qui donnera lieu par identification à une relation intéressante.

On cherche parmi les solutions générales celles qui sont sont T-périodiques. Pour une équation du second ordre, ces solutions dépendent de deux paramètres. Pour obtenir une solution f soit T-périodique on demandera par exemple $f(0) = f(T)$ et $f'(0) = f'(T)$; le raccordement de f'' sera automatiquement réalisé par l'équation.

Suites et séries de fonctions: convergence, continuité (mercredi 21 nov. 2001)

Exposé: suites de fonctions: divers modes ...

On considère un intervalle I et une suite (f_n) ou une série (u_n) de fonctions définies sur I.

Convergence simple. On dit que la suite (f_n) converge **simplement** vers une fonction f sur I si pour tout point x de I la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

De même on dit que la série (u_n) converge simplement (resp. simplement absolument) sur I si pour tout point x de I la série $(u_n(x))$ converge (resp. converge absolument).

Malheureusement la convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions ne fournit pas d'information sur les propriétés de la limite.

L'exemple de la suite (x^n) sur $[0, 1]$ montre que les u_n peuvent être continues sans que leur limite le soit.

L'exemple de la suite (nx^n) sur $[0, 1[$ montre que l'intégrale de la limite n'est pas toujours la limite des intégrables, sachant que l'une ou l'autre peut ne pas exister.

Convergence uniforme. On dit que la suite (f_n) converge **uniformément** vers f sur I si, étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver N tel que $n \geq N$ implique $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ pour tout point x de I.

On peut aussi dire que la suite de terme général

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

tend vers 0.

On peut encore dire qu'il existe une suite (ϵ_n) positive et tendant vers 0 telle que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon_n$$

pour tout point x de I.

Si les f_n sont *continues* sur I et si la suite (f_n) converge *uniformément* vers f sur I, alors f est *continue.*

Puisque la continuité est une propriété locale, on notera que la convergence *uniforme sur tout segment* de I suffit. On se sert souvent de l'énoncé sous cette forme.

De plus, lorsque I est un segment $[a, b]$, la suite $\int_a^b f(t)dt$ converge vers $\int_a^b f(t)dt$.

Convergence normale. Pour les séries, la convergence uniforme est celle de la suite des sommes partielles. La propriété qui suit est plus forte mais plus pratique.

On dit que la série (u_n) converge **normalement** sur I signifie que la série de terme général

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |u_n(x)|$$

est convergente.

On peut aussi dire qu'il existe une série (α_n) positive convergente telle que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

pour tout point x de I.

Suites et séries de fonctions: dérivation (mercredi 28 novembre 2001)

Exposé: dérivation de la somme ...

On considère un intervalle I et une suite (f_n) de fonctions *dérivables* sur I.

Théorème de dérivation terme à terme. Si
- la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I,
- la suite (f_n') converge **uniformément** vers une fonction g sur I,

alors f est dérivable sur I et $f' = g$.

Remarques.

1) L'existence d'une limite simple f a lieu dès que la suite converge en un point, grâce à la seconde hypothèse, laquelle montre alors que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle borné inclus dans I. En pratique c'est de peu d'intérêt.

2) Puisque la dérivation est une opération locale, la seconce hypothèse peut être remplacée par la convergence *uniforme sur tout segment* de I. On se sert souvent de l'énoncé sous cette forme.

Application aux séries. Considérons une série (u_n) de fonctions dérivables sur I. Si
- la série (u_n) converge simplement sur I,
- la série (u_n') converge normalement sur I,

alors la somme $\sum u_n$ est dérivable et $(\sum u_n)' = \sum u_n'$.

Les remarques précédentes s'appliquent.

Il faut savoir démontrer le théorème de dérivation dans le cas de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On écrit

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n(t)dt$$

et on passe à la limite uniforme sur $[a, b]$. Il vient

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt$$

ce qui montrer que f est dérivable et que $f' = g$.

Intégrale sur un segment (mercredi 5 décembre 2001)

Exposé: Définition de l'intégrale sur un intervalle compact ...

Soit $S = [a, b]$ un segment, c'est-à-dire un intervalle compact. On définit l'intégrale $\int_S f(t)dt$ d'une fonction **continue** f sur $[a, b]$ comme la valeur commune

$$\max_{g \leq f} \int_S g = \min_{f \leq h} \int_S h$$

où g et h sont des fonctions en escalier sur I.

Si l'on se donne une suite $a = c_{n,0} \leq c_{n,1} \leq \cdots \leq c_{n,i} \leq \cdots \leq c_{n,i_n} = b$ de subdivisions de $[a, b]$, dont le pas $p_n = \max_{1 \leq i \leq i_n}(c_{n,i} - c_{n,i-1})$ tend vers 0, et si, pour $1 \leq i \leq i_n$, on choisit un point $t_{n,i}$ de $[c_{n,i-1}, c_{n,i}]$, l'intégrale est encore la limite quand $n \to \infty$ des sommes de Riemann

$$\sum_{i=1}^{i_n} (c_{n,i} - c_{n,i-1}) f(t_{n,i}) .$$

L'énonce s'aplique notamment pour $c_{n,i} = a + i\frac{b-a}{n}$ et $i_n = n$.

Si f est **continue**, alors $\int_a^x f(t)dt$ est **dérivable** et admet $f'(x)$ pour dérivée en x.

On étend l'intégrale au cas d'une fonction continue par morceaux sur I, par subdivision de l'intervalle.

Théorème de continuité sous l'intégrale. Soient $[a, b]$ un segment et X un intervalle. Si f est une fonction **continue** sur $[a, b] \times X$, alors

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)dt$$

définit une fonction F continue sur X.

Noter qu'on suppose f continue du couple (t, x) et non séparément continue.

Théorème de dérivation sous l'intégrale. On reprend les notations ci-dessus, avec $X =]\alpha, \beta[$. Si

- la fonction f est continue sur $[a, b] \times X$,
- elle admet une dérivée partielle $\partial f / \partial x$ continue sur $[a, b] \times X$,

alors F est dérivable sur X et

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt .$$

Intégrale absolument convergente (mercredi 12 décembre 2001)

Exposé: Intégrales dépendant d'un paramètre.

Exercices: Dsi4, Dsi5, Dsi6, Dsi7

Soit I un intervalle *non compact* et f une fonction définie sur I que nous supposerons *continue.* On pourrait étendre la suite au cas de fonctions continues par morceaux sur tout segment, mais l'utilité pratique en est faible.

On dit que f est **intégrable** sur I si son intégrale converge absolument en toute extrémité de I qui n'est pas dans I. Cela comprend *toujours* les extrémités infinies.

Par exemple, si $I =]0, +\infty[$, cela signifie que

$$I_x = \int_0^x |f(t)|dt$$

a une limite finie quand $x \to +\infty$, ou encore que les I_x sont majorées.

Pour $I =]0, 1]$, on considèrera la convergence des intégrales $\int_y^1 |f(t)|dt$ quand $y \to 0$ par valeurs > 0; pour $I =]0, +\infty[$, on considèrera la convergence des intégrales $\int_a^x |f(t)|dt$ quand $x \to +\infty$ et $\int_y^a |f(t)|dt$ quand $y \to 0$ par valeurs > 0.

En pratique, on pourra utiliser des **majorations** ou des **équivalents** pour $|f(t)|$, ainsi que la règle de Riemann:

$\int^{+\infty} dt/t^\alpha$ converge si $\alpha > 1$ et $\int_0 dt/t^\alpha$ converge si $\alpha < 1$.

On ramène à 0 le cas d'une extrémité a finie non nulle par le changement de variable $t = a + u$.

Théorème de la convergence monotone. Si la suite *croissante* (resp. *décroissante*) (f_n) de fonctions continues intégrables converge simplement sur I vers la fonction continue f et si

les $\int f_n(t)dt$ sont majorées (resp. minorées),

alors f est intégrable sur I et $\int_I f_n(t)dt \to \int f(t)dt$.

Théorème de la convergence dominée. Si la suite (f_n) de fonctions continues intégrables converge simplement sur I vers la fonction continue f et si

$|f_n(t)| \leq g(t)$ pour tout n et t dans I,

où g est continue intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et $\int_I f_n(t)dt \to \int f(t)dt$.

Théorème de continuité sous l'intégrale. On reprend les notations déjà utilisées. Si f est continue sur $I \times X$, et si

$|f(t, x)| \leq g(t)$ pour tout x dans X et tout t dans I,

où g est continue intégrable sur I, alors F est continue sur I.

Théorème de dérivation sous l'intégrale. On conserve les mêmes notations. Si

- la fonction f est continue sur $I \times X$, intégrable en t pour tout x,
- elle admet une dérivée partielle $\partial f/\partial x$ continue sur $I \times X$,
- vérifiant $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leq g(t)$ pour tout x et tout t,

où g est continue intégrable sur I, alors F est dérivable sur I et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$.

Attention! Dans les trois derniers énoncés, il convient de vérifier que $g(t)$ ne dépend que t, et non pas de n ou de x.

Intégrale semi-convergente (mercredi 19 décembre 2001)

Exposé: Intégrale impropre ...

On considère un intervalle I non compact; et on se place en une extrémité de I qui n'est pas dans I.

Si l'intégrale de f y est convergente sans être absolument convergente on parle d'intégrale **semi-convergente**.

Dans un tel cas, **il n'est pas question** de parler de fonction intégrable pour f!

L'exemple de

$$\int^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

est emblématique.

En pratique on retiendra **qu'on n'a plus droit aux équivalents**, et qu'on ramène souvent à une intégrale absolument convergente par **intégration par parties**. Ainsi

$$\int_a^x \frac{\sin t}{t} dt = \left.\frac{-\cos t}{t}\right|_{t=a}^{x} - \int_a^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

où l'intégrale de droite est absolument convergente. Ici $a > 0$; pour choisir $a = 0$, remplacer $-\cos t$ par $1 - \cos t$.

Pour la continuité ou la dérivation sous le signe intégrale, ou bien on se ramène au cas absolument convergent, ou bien on considère d'abord des intégrales définies telles que

$$F_N(x) = \int_0^N f(t,x)dt$$

dans le cas où $I = [0, +\infty[$, et on applique ensuite les théorèmes sur les limites de fonctions, ce qui revient à majorer

$$|F_N(x) - F(x)| = \left|\int_N^{+\infty} f(t,x)dt\right|$$

par suite tendant vers 0 indépendante de x.

Fonctions convexes (mercredi 9 janvier 2002)

Exposé: fonctions convexes ...

Définition. Soit I un intervalle. La fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite convexe si

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

pour tous x, y dans I et $0 \leq \lambda \leq 1$.

On peut imposer $x < y$ et $0 < \lambda < 1$.

Interprétation géométrique. Dire que f est convexe revient à dire que sur chaque $[x, y]$ la courbe entièrement sous la corde; faire un dessin.

Exemples

- de fonction convexe non continue sur $[0, 1)$: $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x > 0$.
- de fonction convexe continue non dérivable sur $\mathbf{R}$: $|x|$.
- de fonction convexe dérivable non deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$: $|x|^{3/2}$.

Théorème 1. La fonction f est convexe ssi pour tout x_0, la pente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est une fonction croissante de x (sur I privé de x_0).

Proposition. On suppose I ouvert. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est convexe alors f est continue et dérivable à droite. De plus

$$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$

pour $x < y$ dans I.

Théorème 2. La fonction f est supposée dérivable; alors f est convexe ssi f' est croissante.

Théorème 2bis. La fonction f est supposée continue et dérivable à droite (resp. gauche); alors f est convexe ssi f'_d (resp. f'_g) est croissante.

Théorème 3. La fonction f est supposée 2 fois dérivable; alors f est convexe ssi $f'' \geq 0$.

Remarque. Pour dériver, il vaut mieux supposer I ouvert pour éviter les difficultés; sinon, en une extrémité, la dérivabilité peut se limiter à une dérivabilité à gauche ou à droite, et la dérivabilité à gauche ou à droite à rien du tout.

Inégalités de convexité.

- l'inégalité arithmético-géométrique

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$$

- l'inégalité de Hölder

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} (b_1^q + \cdots + b_n^q)^{1/q}$$

- l'inégalité de Minkowski

$$((a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p)^{1/p} \leq (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} + (b_1^p + \cdots + b_n^p)^{1/p}$$

Accroissements finis (mercredi 16 janvier 2002)

Exposé: Fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$ ...

Dérivée. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0. La dérivée en x_0 de f est la limite, si elle existe, du quotient

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

quand x tend vers x_0 en restant dans I.

Dire que f est dérivable en x_0 et y admet l pour dérivée signifie encore que

$$f(x_0+h)=f(x_0)+lh+o(|h|)$$

quand $h \to O$.

Si x_0 est une extrémité on définit de cette façon une dérivée à droite ou à gauche.

Théorème de Rolle. Si $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ est continue, dérivable dans $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$ alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Accroissements finis.

Il y a la **formule**, valable *exclusivement* pour des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$: si $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ est continue, et dérivable dans $]a,b[$, alors on a

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

pour (au moins) un c dans $]a,b[$.

Si f est dérivable sur I et a, b des points de I (sans supposer $a<b$), on peut remplacer c par $a+\theta(b-a)$ pour un θ tel que $0<\theta<1$.

Il y a l'**inégalité**, qui s'exprime pour f à valeurs dans $\mathbf{R}$ avec des $|\ |$, et pour f à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ avec des $\|\ \|$: ..., et si $\|f'(x)\|\le M$ pour $a<x<b$, alors

$$\|f'(b)-f'(a)\|\le M(b-a)$$

dans le cas de $\mathbf{R}^n$.

Il y a aussi **l'inégalité généralisée** sous les mêmes conditions et hypothèses pour f scalaire ou vectorielle et g scalaire: ..., et si $\|f'(x)\|\le g'(x)$ pour $a<x<b$, alors

$$\|f'(b)-f'(a)\|\le g(b)-g(a)\ .$$

Enfin, pour f continûment dérivable sur $[a,b]$, la formule

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)dt$$

est liée aux accroissements finis, et valable pour $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$.

L'erreur à éviter est d'appliquer la formule avec $f'(c)$ en dimension >1, notamment pour des fonctions complexes. Penser à $f(x)=e^{ix}$ sur $[0,2\pi]$; on a $e^0=e^{2\pi i}=1$ et pourtant la dérivée ie^{ix}, qui reste de module 1 ne s'annule pas!

La première formule se déduit du théorème de Rolle. Pour démontrer la dernière formule, on remplace b par x et on dérive chaque membre pour constater l'égalité des dérivées. Il faut savoir qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante, ce qui résulte de la première formule, appliquée à chaque composante pour une fonction vectorielle. Enfin les inégalités se déduisent de la formule intégrale pour une fonction continûment dérivable. On écrit $\|f(b)-f(a)\|\le\int\|f'(t)\|dt$ sachant que la majoration de la norme d'une intégrale s'établit en approchant par des fonctions en escalier.

Formule de Taylor (mercredi 23 janvier 2002)

Exposé: différentes formules de Taylor ...

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et des points a, b de I. La formule de Taylor s'écrit

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_n$$

sous des hypothèses convenables et avec un reste R_n à préciser suivant les cas.

Formule classique. Pour f *à valeurs réelles exclusivement*, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et possédant une dérivée $(n+1)$-ème sur $]a,b[$, on a

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \ .$$

Formule de Taylor-Lagrange. Pour f à valeurs dans $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{R}^n$, les mêmes hypothèses et $\|f^{(n+1)}\| \leq M$, on a

$$\|R_n\| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \ .$$

Formule avec reste intégral. Pour f à valeurs dans $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, on a

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \ .$$

Formule de Taylor-Young. Pour f à valeurs dans $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{R}^n$, définie au voisinage de a, possédant au voisinage de ce point des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ et en ce point une dérivée d'ordre n, on a $f(x) = \cdots$ avec

$$R_n = o(|x-a|^n)$$

quand $x \longrightarrow a$.

Remarques. Noter que pour $n = 1$ la formule de Taylor-Young n'est que la définition de la dérivée. Noter que la formule de Taylor-Lagrange se déduit de la formule classique si f est à valeurs dans $\mathbf{R}$, et de la formule avec reste intégral si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Pour f de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a, on peut déduire la formule de Taylor-Young de celle avec reste intégral au rang $n-1$, écrivant

$$R_{n-1} = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt = \frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}[f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)]dt$$

d'où, pour $\epsilon > 0$ donné et x suffisamment proche de a, la majoration

$$\|R_n\| \leq \epsilon \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \epsilon \frac{(x-a)^n}{n!} \ .$$

Conditions d'extremum local. Pour f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a, une condition nécessaire de maximum (resp. minimum) local est:

$f'(a) = 0$, $f''(a) \leq 0$ (resp. $f''(a) \geq 0$),

et une condition suffisante est:

$f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$ (resp. $f''(a) > 0$).

Différentiabilité en dimension 2 (mercredi 30 janvier 2002)

Exposé: formule de Taylor-Young ...

Définition de la différentielle. Soient U une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$, a un point de U et $f : U \to \mathbf{R}^n$. On dit que f est *différentiable* en a et admet l'application linéaire $l : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^n$ comme *différentielle* en ce point si

$$f(a+h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|)$$

quand $h \to 0$.

Par $o(\|h\|)$ on entend que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|h\| < \eta$ implique $\|f(a+h) - f(a) - l(h)\| \leq \epsilon \|h\|$.

Il y a **unicité** de la différentielle au point a; on la note note $df(a)$ ou $f'(a)$. On écrit souvent $df(a).h$ ou $f'(a).h$ pour $l(h)$.

Si on remplace $\mathbf{R}^2$ par $\mathbf{R}$, on retrouve la dérivabilité, et $l(h) = hf'(a)$ où $f'(a)$ est la dérivée.

Dérivées partielles. Soit $a = (a_1, a_2)$. Les dérivées partielles$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ sont les dérivées, si elles existent, des fonctions partielles $f(x_1, a_2)$ en a_1 et $f(a_1, x_2)$ en a_2.

Si f est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en ce point et

$$df(a).(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2$$

caractérise la différentielle. Noter qu'il suffit d'écrire $(h_1, h_2) = (h_1, 0) + (0, h_2)$. On a $\partial f/\partial x_1 = df.(1,0)$ et $\partial f/\partial x_2 = df.(0,1)$.

Théorème de composition. Soient n, p des entiers égaux à 1 ou 2, U, V des parties ouvertes de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$, et $f : U \to V$, $g : V \to \mathbf{R}^q$. On considère $a \in U$ et $b = f(a)$. Si f est différentiable en a et g en b, alors $g \circ f$ l'est en a, avec

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a) .$$

Théorème fondamental. Si f possède des dérivées partielles continues (*en* (x, y)) dans U, alors f est différentiable dans U.

On passe par la formule des accroissements finis avec reste intégral, laquelle se déduit de la formule en une variable. On applique cette dernière à

$$g(t) = f(a + th, b + tk)$$

entre 0 et 1. Alors $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt$ donne

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk)dt + k \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk)dt$$

soit encore $h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(|h| + |k|)$; raisonner comme indiqué plus loin.

Formule de Taylor. La version Taylor-Young qui développe $f(a + th, b + tk)$ en

$$f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{1}{2}\Big(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\Big) + R(h,k)$$

avec $R(h,k) = o(|h|+|k|)^2$, pour f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de (a,b), est piégeuse. La formule en deux variables ne se déduit pas de celle en une variable: en effet le o doit être uniforme par rapport à la direction de dérivation.

On passe donc par la formule avec reste intégral qui, elle, se déduit de la formule en une variable. On applique cette dernière à

$$g(t) = f(a+th, b+tk)$$

entre 0 et 1. Alors

$$g(1) = f(a+h, b+k)$$

s'écrit comme la somme de

$$g(0) + g'(0) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

et d'un reste

$$\int_0^1 (1-t)g''(t)dt = \int_0^1 \Big(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th,b+k) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+th,b+tk) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th,b+tk)\Big)dt$$

dont on fait sortir

$$\frac{1}{2}\Big(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\Big)$$

pour laisser un $o(|h|+|k|)^2$.

Précisément on se donne $\epsilon > 0$; on choisit $\eta > 0$ assez petit pour que le carré $[a-\eta, a+\eta] \times [b-\eta, b+\eta]$ soit dans le voisinage considéré et que la valeur de $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x\partial y$, $\partial^2 f/\partial y^2$ y diffère de moins de ϵ de la valeur prise en (a,b).

On applique ce qui précède à un accroissement (h,k) tel que $|h| \leq \eta$, $|k| \leq \eta$. Le reste diffère de sa valeur en (a,b) de moins de $\epsilon(|h|+|k|)^2$. QED.

Condition suffisante d'extremum local. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de (a,b), vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. On pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \ .$$

Si $s^2 - rt < 0$, alors f admet en (a,b) un minimum ou maximum relatif strict suivant que $r > 0$ ou $r < 0$.

Pour cela, supposant par exemple $r > 0$, on note que le rapport

$$\rho = \frac{rh^2 + 2shk + tk^2}{|h|^2 + |k|^2}$$

ne s'annule pas sur la sphère unité; par compacité il y est donc minoré par $c > 0$. La minoration $rh^2 + 2shk + tk^2 \geq c(|h|^2 + |k|^2)$ vaut alors partout par homogénéité. Il ne reste plus qu'à prendre $\epsilon < c$ et choisit un $\eta > 0$ donné par le o.

On peut aussi donner des minorations explicites, écrivant $rh^2 - 2s|hk| + tk^2$ comme

$$r(|h| - \frac{s}{r}|k|)^2 + \frac{rt-s^2}{r}k^2 = t(|k| - \frac{s}{t}|h|)^2 + \frac{rt-s^2}{t}h^2 = (\sqrt{r}|h| - \sqrt{t}|k|)^2 + (\sqrt{rt} - s)|hk|$$

Equations différentielles d'ordre 2 et systèmes (mercredi 6 février 2002)
Exposé: systèmes différentiels à coefficients constants ...

On se contente ici d'expliquer la méthode de Lagrange pour une équation linéaire du second ordre à coefficients variables

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = b \ .$$

Le système associé. L'équation se ramène au système

$$\dot{X} = AX + B$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \ .$$

L'équation résolvante. Pour un système homogène quelconque

$$\dot{X} = AX$$

dont on connait deux solutions indépendantes

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

la matrice

$$R = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

vérifie l'équation résolvante

$$\dot{R} = AR \ .$$

La méthode de Lagrange. Elle consiste à chercher des solutions du système homogène $\dot{X} = AX + B$ de la forme $X = RK$; si K a pour composantes λ, μ, cela revient à faire varier les constantes dans l'expression $\lambda Y + \mu Z$ de la solution générale. Comme

$$\dot{X} = \dot{R}K + R\dot{K} = ARK + R\dot{K}$$

on obtient en reportant

$$R\dot{K} = B \ .$$

Retour à l'équation du second ordre. On suppose que l'on connait deux solutions y, z indépendantes de l'équation homogène. Ici

$$R = \begin{pmatrix} y & z \\ \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

et l'équation $R\dot{W} = B$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} y & z \\ \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

ce qui impose

$$\dot{\lambda} y + \dot{\mu} z = 0 \qquad (*)$$

en particulier. En ajoutant $\dot{\lambda}\dot{y} + \dot{\mu}\dot{z} = g$, on obtient un système d'où on peut tirer $\dot{\lambda}$ et μ: il ne reste plus qu'à primitiver.

En pratique, on part de la solution générale $\lambda y + \mu z$ de l'équation homogène qu'on reporte, avec λ, μ variables respectant (*), dans l'équation inhomogène.

Exercices sur les thèmes 1 et 2: parties ouvertes, fermées, continuité, suites extraites, compacité

Exercice 1.

☛ *On désigne par A le sous-espace de $\mathbf{R}$ constitué des nombres algébriques. L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels est-il ouvert (resp. fermé) dans A ?* ∎

Exercice 2a.

☛ *On considère une fonction numérique f définie sur $\mathbf{R}^2$. On suppose que chacune des restrictions de f aus demi-plans $x \geq 0$ et $x \leq 0$ est continue. Montrer, en considérant des suites, que f est continue.* ∎

Exercice 2b.

☛ *Reprendre l'exercice précédent en considérant les images réciproques de parties fermées.* ∎

Exercice 2c.

☛ *Qu'advient-il si on remplace l'un des demi-plans fermés par un demi-plan ouvert?* ∎

Exercice 3a.

☛ *Dans l'espace $M_2(\mathbf{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels, la partie $GL_2(\mathbf{R})$ constituée des matrices inversibles est-elle ouverte, fermée, constitue-t-elle un sous -espace compact?* ∎

Exercice 3b.

☛ *Même question pour la partie $SL_2(\mathbf{R})$ constituée des matrices de déterminant 1.* ∎

Exercice 3c.

☛ *Même question pour la partie $O_2(\mathbf{R})$ constituée des matrices orthogonales.* ∎

Exercice 4a.

☛ *Soient A et B deux parties fermées de $\mathbf{R}^2$. On suppose l'une compacte. Montrer que la partie $A+B$ constituée des sommes $x+y$, où x varie dans A et y dans B, est compacte.* ∎

Exercice 4b.

☛ *Que faut-il penser de l'exemple où A est définie par $xy = 1$ et B par $x = 0$?* ∎

Exercice 4c.

☛ *Que faut-il penser de l'exemple où A est définie par $y \geq x^2$ et B par $x \geq y^2$?* ∎

Exercice 5.

☛ *On considère des nombres réels a, b, c, d telq que $ad - bc \neq 0$ et la transformation homographique f définie par*

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

pour x telq que $cx + d \neq 0$.

On considère une suite (x_n) telle que $cx_n + d \neq 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$. On suppose qu'elle admet une limite (finie) x.

Montrer que $cx + d \neq 0$ et que $f(x) = x$. ∎

Exercice 6.

☛ *Soit A une partie de $\mathbf{R}$. On suppose que pour tout segment $[a, b]$ rencontrent A, les bornes $\inf A \cap [a, b]$ et $\sup A \cap [a, b]$ de $A \cap [a, b]$ appartiennent à A. Montrer que la partie A est fermée.*

Y a-t-il une réciproque? ∎

Exercice 7.

☛ *Montrer, par un argument direct et sans considération géométrique, que parmi les triangles de côtés a, b, c de périmètre $2p = a+b+c$ donné, il en est au moins un de surface maximum.*

On rappelle que

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donne la surface en fonction du demi-périmètre. ∎

Exercice 8 (à rendre).

☛ *On considère un nombre réel p tel que $p > 1$.*

a) Montrer que la fonction qui à x associe $|x|^p$ est continûment dérivable sur $\mathbf{R}$ et strictement convexe.

b) En déduire que

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p < \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$$

si x, y sont des nombres réels distincts.

c) On fixe $\eta > 0$ et on considère la partie A de $\mathbf{R}^2$ définie par $|x-y|^p \geq \eta$ et $|x|^p + |y|^p = 2$. Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ pour laquelle

$$|x-y|^p \leq C\Big[1 - \left|\frac{x+y}{2}\right|^p\Big]$$

sur A. On pourra considérer la fonction

$$\phi(x) = |x-y|^p.\Big[1 - \left|\frac{x+y}{2}\right|^p\Big]^{-1}$$

sur cette même partie.

d) Déduire du c) que pour tout $\eta > 0$ fixé, il existe $C \geq 0$ tel que

$$|x-y|^p \leq (C+\eta)\frac{|x|^p + |y|^p}{2} - C\left|\frac{x+y}{2}\right|^p$$

pour tous x, y réels.

On pourra supposer $|x|^p + |y|^p \neq 0$ et se ramener au cas où cette somme vaut 2.

e) Y a-t-il moyen de trouver simplement une telle inégalité lorsqur $p = 2$? ∎

Exercices sur les thèmes 1 et 2: parties ouvertes, fermées, continuité, suites extraites, compacité

Exercice 1.

☛ *On désigne par A le sous-espace de $\mathbf{R}$ constitué des nombres algébriques. L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels est-il ouvert (resp. fermé) dans A ?* ■

Exercice 2a.

☛ *On considère une fonction numérique f définie sur $\mathbf{R}^2$. On suppose que chacune des restrictions de f aus demi-plans $x \geq 0$ et $x \leq 0$ est continue. Montrer, en considérant des suites, que f est continue.* ■

Exercice 2b.

☛ *Reprendre l'exercice précédent en considérant les images réciproques de parties fermées.* ■

Exercice 2c.

☛ *Qu'advient-il si on remplace l'un des demi-plans fermés par un demi-plan ouvert?* ■

Exercice 3a.

☛ *Dans l'espace $M_2(\mathbf{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels, la partie $GL_2(\mathbf{R})$ constituée des matrices inversibles est-elle ouverte, fermée, constitue-t-elle un sous -espace compact?* ■

Exercice 3b.

☛ *Même question pour la partie $SL_2(\mathbf{R})$ constituée des matrices de déterminant 1.* ■

Exercice 3c.

☛ *Même question pour la partie $O_2(\mathbf{R})$ constituée des matrices orthogonales.* ■

Exercice 4a.

☛ *Soient A et B deux parties fermées de $\mathbf{R}^2$. On suppose l'une compacte. Montrer que la partie $A+B$ constituée des sommes $x+y$, où x varie dans A et y dans B, est compacte.* ■

Exercice 4b.

☛ *Que faut-il penser de l'exemple où A est définie par $xy = 1$ et B par $x = 0$?* ■

Exercice 4c.

☛ *Que faut-il penser de l'exemple où A est définie par $y \geq x^2$ et B par $x \geq y^2$?* ■

Exercice 5.

☛ *On considère des nombres réels a, b, c, d telq que $ad - bc \neq 0$ et la transformation homographique f définie par*

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

pour x telq que $cx + d \neq 0$.

On considère une suite (x_n) telle que $cx_n + d \neq 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$. On suppose qu'elle admet une limite (finie) x.

Montrer que $cx + d \neq 0$ et que $f(x) = x$. ■

Exercice 6.

☛ *Soit A une partie de $\mathbf{R}$. On suppose que pour tout segment $[a, b]$ rencontrent A, les bornes $\inf A \cap [a, b]$ et $\sup A \cap [a, b]$ de $A \cap [a, b]$ appartiennent à A. Montrer que la partie A est fermée.*

Y a-t-il une réciproque? ■

Exercice 7.

☛ *Montrer, par un argument direct et sans considération géométrique, que parmi les triangles de côtés a, b, c de périmètre $2p = a + b + c$ donné, il en est au moins un de surface maximum.*

On rappelle que

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donne la surface en fonction du demi-périmètre. ■

Exercice 8.

☛ *Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous x, y. Montrer que $f(x) = xf(1)$.* ■

Exercice 9 (à rendre).

☛ *On considère un nombre réel p tel que $p > 1$.*

a) Montrer que la fonction qui à x associe $|x|^p$ est continûment dérivable sur $\mathbf{R}$ et strictement convexe.

b) En déduire que

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p < \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$$

si x, y sont des nombres réels distincts.

c) On fixe $\eta > 0$ et on considère la partie A de $\mathbf{R}^2$ définie par $|x - y|^p \geq \eta$ et $|x|^p + |y|^p = 2$. Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ pour laquelle

$$|x-y|^p \leq C\left[1 - \left|\frac{x+y}{2}\right|^p\right]$$

sur A. On pourra considérer la fonction

$$\phi(x) = |x-y|^p . \left[1 - \left|\frac{x+y}{2}\right|^p\right]^{-1}$$

sur cette même partie.

d) Déduire du c) que pour tout $\eta > 0$ fixé, il existe $C \geq 0$ tel que

$$|x-y|^p \leq (C+\eta)\frac{|x|^p + |y|^p}{2} - C\left|\frac{x+y}{2}\right|^p$$

pour tous x, y réels.

On pourra supposer $|x|^p + |y|^p \neq 0$ et se ramener au cas où cette somme vaut 2.

e) Y a-t-il moyen de trouver simplement une telle inégalité lorsqur $p = 2$? ■

Exercices sur les thèmes 3 et 4: connexité, continuité uniforme ... et toujours la compacité

Exercice 1.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle. Montrer que la dérivée f' y possède la propriété des valeurs intermédiaires: si $a < b$ et si γ est entre $\alpha = f'(a)$ et $\beta = f'(b)$, il existe c entre a et b tel que $f'(c) = \gamma$.

On se ramènera au cas où $\gamma = 0$ et où $\alpha > 0$ et $\beta < 0$ par exemple. ■

Exercice 2a.

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, la couronne définie par

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$$

est-elle connexe? ■

Exercice 2b.

Même question pour

$$(x^2-1)^2 \leq 1/2 .$$

■

Exercice 3a.

Montrer que

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \int_0^{y-x} \frac{dt}{2\sqrt{x+t}} \leq \sqrt{y-x}$$

pour $0 \leq x \leq y$. En déduire que la fonction qui à x associe $\sqrt{x}$ est alors uniformément continue sur $[0, +\infty[$. ■

Exercice 3b.

Montrer que la fonction du 1a est uniformément continue sur $[0,2]$ et sur $[1,+\infty[$. Cela permet-il de conclure? ■

Exercice 4.

Quels sont les polynômes qui définissent des fonctions uniformément continues sur $\mathbf{R}$? On pouura considérer le comportement de $P(x+\alpha) - P(x)$ quand $x \to \pm\infty$. ■

Exercice 5.

Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur $[0,1]$. Pour chaque entier p on décompose $[0,1]$ en 2^n intervalles égaux et on désigne par L_n la somme des longueurs des images par f des sous-intervalles sur lesquels la dérivée f' s'annule au moins une fois.

Montrer que L_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. ■

Exercice 6.

Soit f une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$. On suppose f intégrable. Montrer que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. On pourra raisonner par l'absurde. ■

Exercice 7.

Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$, nulle en dehors de $[-A, A]$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{n dx}{n^2(x-y)^2+1}$$

converge vers $\pi f(y)$ pour tout y. On pourra distinguer les cas $|x-y| \leq \alpha$ et $|x-y| \geq \alpha$ dans l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(y)) \frac{n dx}{n^2(x-y)^2+1}$$

pour y donné. ■

Exercice 8 (à rendre).

On considère un nombre entier n et on désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré $\leq n$, muni de la norme

$$\|a_n X^n + \cdots + a_O\| = |a_n| + \cdots + |a_O|$$

par $\mathcal{P}_n$.

On considère un polynôme P de degré n unitaire, dont les racines complexes sont $z_1, \ldots, z_k$, la racine z_i ayant la multiplicité m_i.

a) On veut montrer que pour tout $\alpha > 0$ il existe $\beta > 0$ tel que si Q est un polynôme de degré n unitaire tel que $\|Q - P\| < \beta$ alors les racines de Q sont dans la réunion des disques ouverts de centre z_i et de rayon α.

Pour cela, supposant $\beta \leq 1$, on pourra d'abord étudier Q pour $|z| > R = \|P\|$.

b) On fixe une racine z_i de P. Pour simplifier les calculs on suppose que $z_i = 0$ et on pose $m = m_i$. On veut montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que si Q est un polynôme unitaire de degré n vérifiant $\|Q - P\| < \beta$, alors Q possède au plus m racines, multiplicités comptées, dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon α.

Raisonnant par l'absurde, on montrera l'existence d'une suite

$$Q_n = (X - t_1) \cdots (X - t_{m+1}) R_n$$

telle que $Q_n \to P$ et $t_i \to 0$ pour tout i.

On montrera que la suite R_n converge vers un polynôme R.

On en déduira une contradiction.

c) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que si Q est un polynôme unitaire de degré n vérifiant $\|Q - P\| < \beta$, alors Q admet exactement m_i racines, multiplicités comptées, dans le disque ouvert de centre z_i et de rayon α. ■