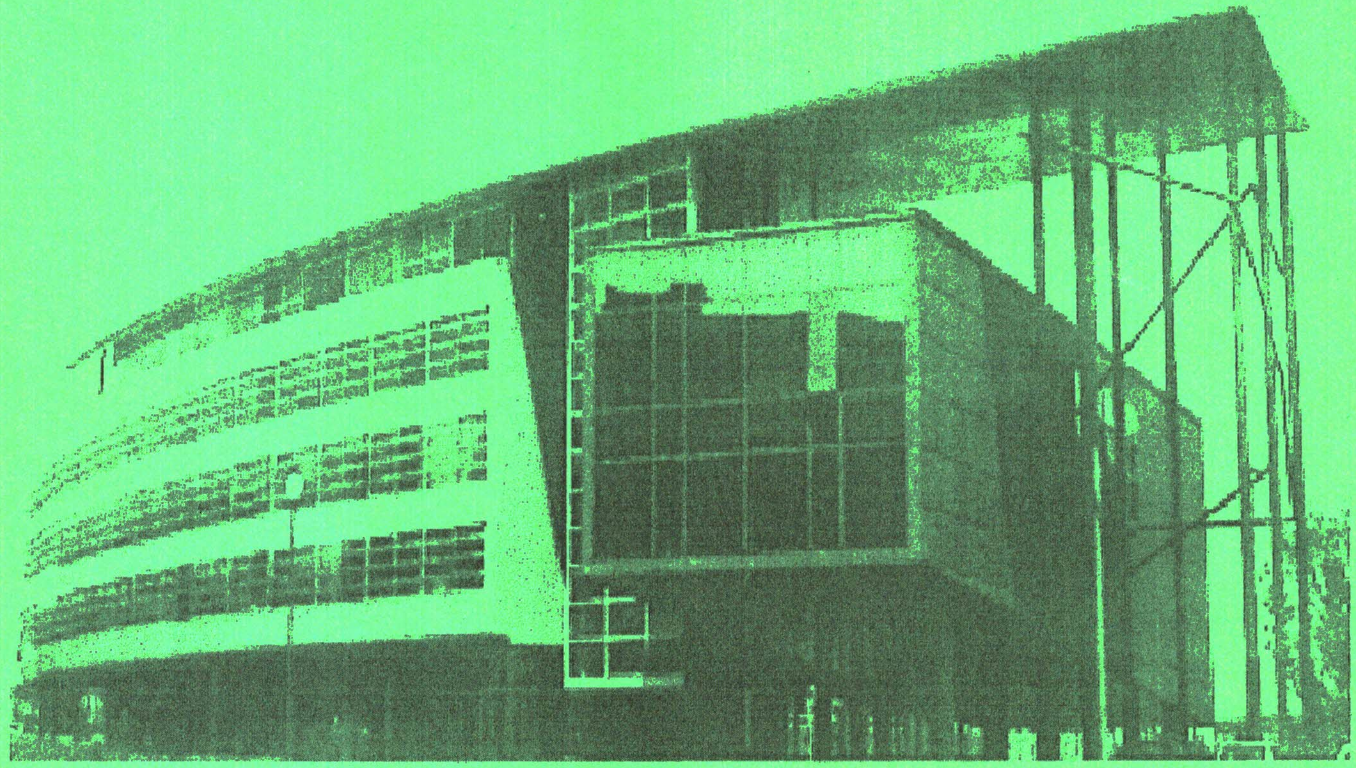
2 ✱

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES IREM de LORRAINE
UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ - NANCY



LICENCE DE MATHÉMATIQUES
AGRÉGATION externe et interne

CALCUL INTÉGRAL

Jean-Pierre FERRIER

N° 31 **ANNÉE 2003-2004**

Edité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (Université Henri Poincaré – Nancy 1 – Faculté des Sciences) – B.P. 239 – VANDOEUVRE –les-NANCY Cedex.
Dépôt légal : 3ème trimestre 2003.
n° de la publication : 2 – 85406 – 174-8
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Jean-Pierre FERRIER.

Introduction et résultats

1. La loi uniforme sur $\Omega = [0,1]$.

On part de la mesure d'un intervalle, définie comme sa longueur. On l'étend à l'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{A}[0,1]$ des réunions finies [disjointes] d'intervalles de $[0,1]$. Il possède les propriétés suivantes qui en font un **clan** ou **algèbre**.

(A1) il est stable par réunion finie (et contient la partie vide).
(A2) il est stable par passage au complémentaire.

Il en résulte qu'il est stable par intersection finie (et contient partie pleine).

La mesure $\mu(A)$ est la somme des longueurs des intervalles deux à deux disjoints composant A. Elle prend des valeurs ≥ 0 et vérifie:

(a) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si A, B sont disjoints.

De plus $\mu(\Omega) = 1$, ce qu'on exigera d'une mesure de probabilités.

Cependant, pour la théorie des probabilités, on exige de se placer sur une **tribu** ou **σ-algèbre**, ce qui revient à remplacer (A1) par

(B1) elle est stable par réunion de suite (d'où aussi par intersection).

Pour la **mesure** μ, on exige la **σ-additivité**, ce qui revient à remplacer (a) par
(σ) $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$ si les A_n sont deux à deux disjoints.

On peut aussi imposer (a) et la condition de **limite monotone**

(m) $\mu(\bigcup A_n)$ (ou $\mu(\bigcap A_n)$) $= \lim \mu(A_n)$ si la suite A_n est croissante (ou décroissante), dans laquelle il suffit encore de considérer une suite décroissante d'intersection vide.

Le problème est de prolonger μ, avec la σ-additivité, à la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par $\mathcal{A}$, plus petite tribu ou encore intersection des tribus contenant $\mathcal{A}$. C'est aussi la tribu engendrée par les intervalles $]-\infty, a]$. Elle est appelée **tribu borélienne**. On aura alors défini la *loi uniforme* sur $[0,1]$.

En fait on définira d'abord l'intégrale des fonctions, et on prolongera μ à un tribu plus large, celle des parties A dont la fonction indicatrice 1_A sera intégrable au sens de Lebesgue; on posera

$$\mu(A) = \int 1_A$$

où 1_A est la fonction indicatrice de A, qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs.

D'autre part on oublie $[0,1]$ et on se place sur $\mathbf{R}$, perdant provisoirement le lien avec les probabilités. La mesure μ peut prendre la valeur $+\infty$.

2. Parties négligeables.

Dans la théorie de Lebesgue on considère des parties sur lesquelles les fonctions peuvent ne pas être définies, dites **négligeables** parce que modifier les valeurs de f sur une telle partie n'affecte ni l'intégrabilité ni l'intégrale de f.

Une propriété sera dite vraie **presque partout** (en abrégé pp) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.

Définition. Une partie de $\mathbf{R}$ est *négligeable* si, étant donné $\epsilon > 0$, on peut l'inclure dans la réunion d'une suite (I_n) d'intervalles [ouverts, disjoints] vérifiant $\sum \mu(I_n) \leq \epsilon$.

On vérifie qu'un point est négligeable et il apparaîtra qu'intervalle non nul ne l'est pas pour la mesure considérée. De façon générale une réunion dénombrable de parties négligeables l'est aussi.

Proposition. Si A_n est une suite décroissante de parties de $\mathcal{A}$ de mesure finie d'intersection négligeable, alors $\mu(A_n)$ tend vers 0.

3. Fonctions intégrables.

Dans la suite toutes les intégrales sont prises sur $\mathbf{R}$. Une fonction f définie sur une partie convenable A sera étendue à $\mathbf{R}$ en la prolongeant par 0 hors de A.

Les fonctions considérées sont supposées à valeurs réelles. Cependant, pour une fonction ≥ 0, on admet la valeur $+\infty$ en certains points.

On part de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des combinaisons linéaires finies

$$f = \sum_i \lambda_i 1_{A_i}$$

de fonctions indicatrices d'intervalles de longueur finie. Pour une telle fonction on définit par

$$\int f = \sum_i \lambda_i \mu(A_i)$$

son intégrale. Ainsi l'intégrale est-elle une fonction linéaire sur $\mathcal{E}$ positive dans le sens que $\int f \geq 0$ pour $f \geq 0$.

De même qu'on cherchait à prolonger μ d'une algèbre vers une tribu, de même cherche-t-on à prolonger l'intégrale de l'espace $\mathcal{E}$ à un espace plus grand, qui vérifiera une propriété de stabilité par limite monotone, l'intégrale passant à ce genre de limite.

On pourrait noter que l'intégrale de Riemann n'a pas cette vertu, encore qu'un exemple parfaitement convaincant n'est pas aisé à donner.

Pour réaliser le prolongement on définit un espace vectoriel L^1, dont les éléments sont des **classes de fonctions définies presque partout** et presque partout égales. Les fonctions d'une telle classe sont les fonctions **intégrables au sens de Lebesgue**.

Si f est intégrable, alors $|f|$ l'est aussi. De plus $\|f\|_1 = \int |f|$ définit un norme sur L^1. De plus un ensemble est négligeable si et seulement s'il est de **mesure nulle**.

Deux propriétés pratiques importantes permettront de travailler avec les fonctions intégrables.

D'une part *une fonction continue sur un intervalle I est intégrable si et seulement si elle admet une intégrale absolument convergente en chaque extrémité de I qui n'est pas dans I.*

D'autre part *si g est intégrable positive et si $|f| \leq g$ alors f est intégrable.* En toute rigueur il faut exiger de f qu'elle soit *mesurable*, mais on verra que cette condition est toujours réalisée en pratique.

Enfin si f est ≥ 0, alors on peut toujours utiliser le symbole $\int f$. On lui donne la valeur $+\infty$ si f n'est pas intégrable. Ainsi une autre façon de dire que f est intégrable est $\int |f| < +\infty$.

4. Les théorèmes fondamentaux.

Théorème de la convergence monotone. Soit f_n une suite croissante (resp. décroissante) de fonctions intégrables; pour que $\lim f_n$ soit intégrable il faut et suffit que $\int f_n$ soit majorée (resp. minorée) et dans ces conditions

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n \, .$$

Remarque. Pour une suite *croissante* (f_n) de fonctions (mesurables) *positives*, intégrables ou non, le passage à la limite sous intégrale est toujours valide.

Théorème de la convergence dominée. Soit f_n une suite de fonctions intégrables [ou simplement mesurables]; si

(i) elle converge simplement pp vers une fonction f,

(ii) il existe g positive intégrable avec $|f_n| \leq g$ pp pour tout n,

alors f est intégrable et

$$\int f = \lim \int f_n \, .$$

Théorème d'intégration des séries. Soit u_n une série de fonctions intégrables [ou simplement mesurables] telle que la série $\sum \int |u_n|$ converge; alors

(i) la série $u_n(x)$ converge pour presque tout x,

(ii) sa somme pp définie est intégrable et

$$\int \sum u_n = \sum \int u_n \, .$$

Remarque. Pour des fonctions positives l'interversion est toujours valide.

Théorème de continuité sous l'intégrale. Soient M un espace métrique, f une application de $M \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et x_0 un point de M; si

(i) pour tout x dans M la fonction qui à t associe $f(x,t)$ est intégrable,

(ii) pour presque tout t la fonction qui à x associe $f(x,t)$ est continue au point x_0,

(iii) il existe une fonction positive intégrable g avec $|f(x,t)| \leq g(t)$ pp en t pour tout x dans M;

alors la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int f(x,t)dt$ est continue au point x_0.

Théorème de dérivation sous l'intégrale. Soient I est un intervalle et f une application de $I \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; si

(i) pour tout x dans I la fonction qui à t associe $f(x,t)$ est intégrable,

(ii) pour presque tout t la fonction qui à x associe $f(x,t)$ est dérivable sur I,

(iii) il existe une fonction positive intégrable g avec $|\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,t)| \leq g(t)$ pp en t pour tout x dans I;

alors la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int f(x,t)dt$ est dérivable sur I et

$$F'(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt \, .$$

N.B. Continuité et dérivabilité se vérifient au voisinage d'un point ou sur tout segment.

Convergence mixte

L'énoncé qui suit concerne une propriété de convergence mixte qui a été introduite par Iannis Varouchas. Elle permet de retrouver les convergences monotone et dominée, ainsi que la convergence des séries. Inversement on l'établirait aisément à partir des théorèmes de convergence monotone et dominée.

Proposition. On considère une fonction f, deux suites (f_n) et (g_n) de fonctions intégrables et une constante M. On suppose
(i) $f_n \to f$ simplement presque partout.
(ii) $|f_n| \leq g_n$ pour tout n.
(iii) $g_n \leq g_{n+1}$ pour tout n.
(iv) $\int g_n \leq M$.
Alors f est intégrable et $\int f_n \to \int f$.

Le théorème de la convergence monotone en résulte, pour une suite (f_n) croissante, si l'on pose par exemple $g_n = |f_0| + |f_n|$.

Le théorème de la convergence dominée en résulte aussi, si l'on pose $g_n = g$ tout simplement.

Quant au théorème d'intégration des séries, il suffit de poser

$$f_n = \sum_{p=0}^{n} u_p \quad , \quad g_n = \sum_{p=0}^{n} |u_p|$$

et de remarquer d'abord que la limite g de la suite croissante g_n est intégrable donc presque partout finie. Alors la série $(u_n(x))$ est presque partout absolument convergente.

Maintenant le théorème de continuité sous l'intégrale s'obtient en considérant une suite qui converge vers x_0.

Par ailleurs le théorème de dérivation sous l'intégrale résulte de l'inégalité

$$\left| \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h} \right| \leq g(t)$$

des accroissement finis.

Pour x fixé, on considère la fonction $\phi(h,t)$ égale au quotient d'accroissement si $h \neq 0$ et à $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ si $h = 0$. Il suffit d'appliquer à cette fonction le théorème de continuité sous l'intégrale.

Revenons pour finir sur les ensembles négligeables. Si N est négligeable, on a $\int 1_N = 0$; cela fait partie du théorème de convergence dominée, mais il était clair a priori qu'on ne pouvait avoir que $\mu(N) \leq \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$.

Inversement si A est intégrable et $\int 1_A = 0$, alors la fonction $\infty.1_A$ est intégrable par convergence monotone, donc presque partout finie; par suite A est négligeable.

Si N est négligeable on a donc $\int \infty.1_N = 0$; on retrouve le fait que changer une fonction sur un ensemble négligeable ne change pas son intégrale.

Mesurabilité*

1. Mesurabilité au sens de Lebesgue.

Pour rendre plus opérationnelle la propriété d'intégrabilité, on introduit la
Définition. une fonction réelle f définie pp sera **mesurable** (au sens de Lebesgue) si pour tout N entier ≥ 1, la fonction

$$f_N = \min(1_{[-N,N]}, N/|f|).f$$

est intégrable.

Une fonction f est ainsi mesurable s'il existe une suite ϕ_n de $\mathcal{E}$ qui converge presque partout vers f.

Pour une fonction f **positive**, on a $f_N = \min(N.1_{[-N,N]}, f)$ et la suite f_N est croissante. Si f est mesurable, d'après le théorème de la convergence monotone

- ou bien f est intégrable,
- ou bien $\int f_n \to +\infty$,

et, dans ce dernier cas, on a convenu de prendre $\int f = +\infty$.

Attention! Ceci ne vaut que pour une fonction *positive*. C'est l'analogue de la somme d'une série à termes positifs divergente.

Pour une fonction **réelle** (ou complexe), on a la
Proposition. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) f est intégrable.
(ii) f est mesurable et

$$\int |f| < +\infty .$$

La mesurabilité possède des propriétés de stabilité remarquables, au point qu'il est impossible de fabriquer une fonction non mesurable avec les opérations relevant de l'algèbre ou de l'analyse, et que pour le faire on doive utiliser un procédé dépassant l'axiome habituel de récurrence, qui est l'axiome du choix non dénombrable. En effet
(i) une fonction pp égale à une fonction mesurable est mesurable.
(ii) la mesurabilité est stable par limite de suite.
(iii) elle est stable par somme ou produit dénombrable.
(iv) l'inverse d'une fonction mesurable pp non nulle est mesurable.
(v) la composée $g \circ f$ de f mesurable par g continue est mesurable.
Par conséquent on pourra souvent se passer de vérifier la mesurabilité.

2. Mesure des ensembles, tribu de Lebesgue.

Une partie A de $\mathbf{R}$ est dite **intégrable** si sa fonction indicatrice 1_A l'est et on pose alors

$$\text{mes}(A) = \int 1_A .$$

Une partie A est dite **mesurable** si sa fonction indicatrice l'est; autrement dit si pour tout entier N la partie $A \cap [-N, N]$ est intégrable.

Si A est mesurable et non intégrable, on pose $\text{mes}(A) = +\infty$; noter que $1_A \geq 0$.

L'ensemble $\mathcal{L}$ des parties mesurables au sens de Lebesgue de $\mathbf{R}$ s'appelle la **tribu de Lebesgue**. Elle contient les intervalles, et par conséquent la tribu borélienne.

De façon générale, si X et X' sont respectivement munis de tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, i.e. sont deux **espaces mesurables**, une application f de X dans X' est dite mesurable si pour toute partie mesurable B de X' l'image réciproque $A = f^{-1}(B)$, ensemble des x de X tels que $f(x)$ soit dans B, est mesurable dans X.

Proposition. Les fonctions mesurables au sens de Lebesgue sont ausi les fonctions mesurables de $(\mathbf{R}, \mathcal{L})$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$.

On aura noté le caractère disymétrique entre le départ et l'arrivée. Compte-tenu de la définition de la tribu borélienne, une fonction est donc mesurable au sens de Lebesgue si et seulement si pout tout a réel l'ensemble $\{f \leq a\}$ des x tels que $f(x) \leq a$, image réciproque de l'intervalle $]-\infty, a]$, est mesurable.

D'abord si f est mesurable au sens de Lebesgue, elle l'est de $(\mathbf{R}, \mathcal{L})$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$; noter que la fonction indicatrice de l'ensemble $\{f > 0\}$ est $\lim_{n\to\infty} \frac{nf^+}{1+nf^+}$.

Pour la réciproque, on commence par les fonctions *étagées*, à savoir mesurables et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. On passe à une fonction mesurable positive f en l'écrivant comme une limite croissante d'une suite de fonctions étagées, à savoir

$$\sum_{k=1}^{4^n} 2^{-n}\, 1_{\{f \geq k2^{-n}\}} \; .$$

Ensuite on écrit une fonction mesurable réelle f comme différence $f^+ - f^-$ de fonctions mesurables positives, où $f^+(x) = \max(0, f(x))$ et $f^- = (-f)^+$.

De façon générale, à partir d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure μ sur $\mathcal{T}$, on définit une nouvelle tribu, appelée **tribu complétée** pour μ, dont les éléments sont les parties qui coïncident avec une partie de $\mathcal{T}$ en dehors d'une partie de $\mathcal{T}$ de mesure nulle. On peut évidemment prolonger μ à cette nouvelle tribu.

Précisément la tribu de Lebesgue s'obtient en complétant la tribu borélienne pour la mesure de Lebesgue.

3. De la mesure des ensembles à l'intégrale.

Ici la mesure des ensembles supposée construite, ce qui n'est pas encore le cas.

D'abord si f est **étagée positive**, prenant des valeurs $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ en plus de 0, on pose

$$\int f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{mes}(A_i) \; .$$

On vérifie l'additivité en étendant la définition à une partition $A_0, A_1, \ldots, A_n$ pour laquelle f est constante sur les A_i si $i \geq 1$ et nulle sur A_0.

On passe au cas d'une fonction **mesurable positive** f par limite croissante, l'additivité passant alors à la limite.

Une fonction mesurable positive f telle que $\int f < +\infty$ est dite *intégrable*.

Une fonction **mesurable à valeurs réelles** f est dite *intégrable* si f^+ et f^- le sont, ou encore si $|f| = f^+ + f^-$ l'est. Si, plus généralement, f est différence de deux fonctions intégrables positives f_1, f_2, on définit son intégrale par

$$\int f = \int f_1 - \int f_2 \; .$$

En considérant les composantes, on étend aussitôt l'intégrale au cas des fonctions à valeurs complexes ou à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

Construction de l'intégrale

Toutes les fonctions sont supposées réelles. On part de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ déjà considéré; les fonctions de cet espace seront notées avec des lettres grecques. On s'inspire de la propriété de convergence mixte.

Définition. la fonction f est dite *intégrable* s'il existe des suites ϕ_n et ψ_n et une constante M telles que

$\phi_n \to f$ simplement presque partout,
$|\phi_n| \leq \psi_n$ pour tout n,
$\psi_n \leq \psi_{n+1}$ pour tout n,
$\int \psi_n \leq M$ pour tout n.

On exprimera les trois dernières propriétés en disant que la suite ϕ_n vérifie une *condition de domination mixte*. Noter que si f est à valeurs dans $[0, +\infty]$, elle sera presque partout finie; étant donné $\epsilon > 0$, considérer l'ensemble A_n des points où $\psi_n \geq M/\epsilon$.

Sous ces hypothèses on montre d'abord que la suite double

$$\int |\phi_m - \phi_n|$$

tend vers 0 quand m, n tendent vers l'infini.

Avant d'indiquer comment démontrer ce fait, notons que l'on en déduit que la suite $\int \phi_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc converge. De plus la limite ne dépend pas du choix des suites, comme on le voit en intercalant les suites choisies.

Définition. L'intégrale $\int f$ est la limite commune à toutes les suites $\int \phi_n$.

Remarque. On a $\int |\phi_n - f| \to 0$; se donner $\epsilon > 0$ et considèrer la suite $|\phi_{n+p} - \phi_n|$ en l'indice p.

Venons-en à la démonstration. Raisonnant par l'absurde on obtient $\epsilon > 0$ et des suites m_p, n_p tendant vers l'infini telles que $\xi_p = |f_{m_p} - f_{n_p}|$ vérifie $\int \xi_p \geq \epsilon$. Or

la suite ξ_p converge simplement presque partout vers 0,
$0 \leq \xi_p \leq \eta_p = 2\psi_{\max(m_0, \cdots, m_p, n_0, \cdots, n_p)}$,
$\eta_p \leq \eta_{p+1}$,
$\int \eta_p \leq 2M$.

On s'est ainsi ramené à la situation de départ avec $f = 0$ et $\int \phi_n \geq \epsilon$. Pour apporter la contradiction, on s'appuie sur le résultat suivant.

Lemme de Varouchas. Etant donnés une suite ϕ_n vérifiant une condition de majoration mixte et $\epsilon > 0$, on peut trouver une suite *décroissante* θ_n vérifiant $\lim \theta_n \leq \limsup \phi_n$ et $\int \theta_n \geq \int \phi_n - \epsilon$.

Dans le cas qui nous intéresse, on ajoute $\theta_n \geq 0$ et on note alors que $\theta_n \to 0$ presque partout. En jouant sur $\epsilon > 0$, on conserve $\int \theta_n \geq \epsilon$.

Soient $\alpha > 0$ tel que $2\alpha.\mu(\{\theta_0 > 0\}) < \epsilon$ et $A_n = \{\theta_n \geq \alpha\}$. La suite décroissante A_n a une intersection négligeable alors que $2 \sup \theta_0.\mu(A_n) \geq \epsilon$. C'est absurde.

Pour démontrer le lemme, on pose $\psi_{n,p} = \max(\phi_n, \ldots, \phi_{n+p})$ et on choisit p_n tel que $\psi_n = \psi_{n,p_n}$ vérifie

$$\int \psi_n \geq \sup_p \int \psi_{n,p} - \epsilon 2^{-n-2} .$$

Ensuite on prend $\theta_n = \min(\psi_0, \ldots, \psi_n)$. Les vérifications sont faciles.

Suite de la construction*

Du lemme de Varouchas on déduit encore le résultat suivant, dans lequel $\mathcal{E}^*$ (resp. $\mathcal{E}_*$) désigne l'ensemble des fonctions intégrables qui sont des limites de suites croissantes (resp. décroissantes) de $\mathcal{E}$ dont les intégrales sont majorées (resp. minorées).

Propriété d'encadrement. Soient f une fonction intégrable et $\epsilon > 0$. On peut trouver des fonctions g et h de $\mathcal{E}^*$ et $\mathcal{E}_*$ telles que $h \leq f \leq g$ presque partout et $\int g - \int h \leq \epsilon$.

On pourrait lever le presque partout; par exemple on peut construire une fonction positive k de $\mathcal{E}^*$ valant $+\infty$ sur une partie négigeable donnée et vérifiant $\int k \leq \epsilon$.

Théorème de convergence mixte vers 0. Soit f_n une suite de fonctions intégrables ≥ 0 qui vérifie une condition de domination mixte et qui converge vers 0 simplement presque partout. Alors $\int f_n \to 0$.

Soit $\epsilon > 0$. On considère g_n dans $\mathcal{E}_*$ telle que $0 \leq g_n \leq f_n$ et $\int f_n - \int g_n \leq \epsilon/3$. En appliquant le lemme de Varouchas dans $\mathcal{E}_*$, on remplace g_n par une suite h_n décroissante simplement presque partout vers 0 telle que $\int h_n \geq \int g_n - \epsilon/3$.

On écrit chaque h_n comme la limite décroissante d'une suite $(\phi_{n,p})_p$ de $\mathcal{E}$. On se ramène au cas où la suite double est aussi décroissante en n en remplaçant $\phi_{n,p}$ par $\min(\phi_{0,p}, \ldots, \phi_{n,p})$. Cela fait, la suite $\phi_{n,n}$ décroit simplement presque partout vers 0 et alors $\int \phi_{n,n} \to 0$. Enfin $\int f_n \leq \int \phi_{n,n} + 2\epsilon/3$.

A partir de là on peut montrer le théorème de convergence mixte. On commence par établir que

$$\int |f_m - f_n| \to 0$$

quand m, n tendent vers l'infini, en raisonnant comme on l'a déjà fait et en se ramenant au théorème de convergence mixte vers 0.

On termine en s'appuyant sur un dernier énoncé.

Théorème de complétion. Etant donnée une suite f_n de fonctions intégrables vérifiant $\int |f_m - f_n| \to 0$ quand m, n tendent vers l'infini, on peut trouver une fonction intégrable f telle que $\int |f_n - f| \to 0$ quand n tend vers l'infini.

Il suffit d'établir la propriété pour une suite extraite. On peut donc se ramener au cas où $\int |f_{n+1} - f_n| \leq 2^{-n}$. Soit alors ϕ_n dans $\mathcal{E}$ telle que $\int |f_n - \phi_n| \leq 2^{-n}$. On a donc $\int |\phi_{n+1} - \phi_n| \leq 2^{-n+2}$.

Il est facile de voir que la suite ϕ_n vérifie une condition de domination mixte. On fait appel aux sommes partielles de la série $u_{n+1} = |\phi_{n+1} - \phi_n|$ (où $\phi_{-1} = 0$). La somme de cette série est finie presque partout. Par suite la suite ϕ_n est-elle presque partout convergente.

Enfin $\int |f_n - f| \leq \int |f_n - \phi_n| + \int |\phi_n - f|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Pour terminer la démonstration du théorème de convergence mixte, on considère g_n dans $\mathcal{E}^*$ telle que $|\phi_n - f_n| \leq g_n$ et $\int g_n \leq 2^{-n+1}$. Alors la fonction $\sum g_n$ de $\mathcal{E}^*$ est presque partout finie, de sorte que ϕ_n converge vers f presque partout.

Méthodes élémentaires

En l'absence de la théorie de Lebesgue, on se limite à l'étude des intégrales dites convergentes. Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a est une borne de I qui n'est pas déjà dans I, on définit la convergence en a de l'intégrale de f en considérant un point de I qui tend vers a.

On va prendre l'exemple de $I = [0, +\infty[$ pour exposer la méthode. La convergence de l'intégrale est celle de

$$\int_0^X f(t)dt$$

quand X tend vers l'infini.

L'intégrale de Lebesgue absorbe le cas des intégrales *absolument convergentes* . En revanche les intégrales *semi-convergentes* le restent.

La continuité ou la dérivation sous l'intégrale d'une intégrale à paramètre comme

$$\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$$

se démontre, dans le cas des intégrales convergentes, en deux temps.

1) D'abord on montre la propriété cherchée pour les intégrales sur des segments

$$I_N(x) = \int_0^N f(x,t)dt$$

où N est un nombre entier fixé, en invoquant la continuité par rapport au couple (x,t) pour la continuité et en y ajoutant celle de $\partial f/\partial x$ pour la dérivation.

2) Ensuite on laisse N tendre vers l'infini, ce qui nous ramène à une limite de suite. On invoque la convergence uniforme de I_N pour la continuité et on y ajoute celle de I'_N pour la dérivation.

L'obtention de la convergence uniforme peut être directe ou passer par le critère de Cauchy si la convergence simple n'a pas été établie. Dans les deux cas, la connaissance d'une condition de domination est utile. On écrira

$$\left| \int_0^N f(x,t)dt - \int_0^{+\infty} f(x,t)dt \right| \leq \int_N^{+\infty} |f(x,t)|dt \leq \int_N^{+\infty} g(t)dt$$

ou

$$\left| \int_0^M f(x,t)dt - \int_0^N f(x,t)dt \right| \leq \int_M^N |f(x,t)|dt \leq \int_M^N g(t)dt$$

où $M \leq N$, et on se servira du fait que les membres de droite tendent vers 0 indépendamment de N.

On adapte le raisonnement dans le cas d'autres bornes, ce qui amène à considérer $-N$ ou $1/N$ par exemple. On peut bien sûr traiter deux bornes à la fois.

Dans le cas d'un intégrale à paramètre semi-convergente, on a deux possibilités.

Ou bien on se ramène à une intégrale absolument convergente par une intégration par parties bien choisie et on dispose alors de la théorie de Lebesgue.

Ou bien on adopte directement une méthode élémentaire. Il arrive que cela soit plus simple.

Mesure de Stieltjes*

Donnons-nous une fonction croissante F sur $\mathbf{R}$. Pour tout intervalle I, on pose

$$\mu(I) = F(b \pm 0) - F(a \pm 0)$$

en prenant la limite à gauche -0 ou à droite $+0$ en a (resp. b) suivant que l'extrémité est incluse (resp. exclue) ou l'inverse. On définit ainsi la **mesure de Stieltjes** dF de **fonction de répartition** F. La mesure de Lebesgue correspond au cas où $F(t) = t$; noter qu'elle peut prendre la valeur $+\infty$.

On va maintenant des exemples où F possède des limites à l'infini qui sont 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. De cette façon on obtiendra des lois de probabilités. Cette restriction n'a rien d'essentiel.

1) Si F est l'échelon $Y_a = 1_{[a,+\infty[}$ en a, alors dY_a est la masse de Dirac δ_a en ce point. Elle vérifie

$$\int f(x)\delta_a(x) = f(a) \ .$$

Plus généralement, si (a_i) est une suite de points de la droite et si (λ_i) est une série à termes positifs de somme 1, posant

$$F(t) = \sum_{x_i \leq t} \lambda_i$$

on obtient une mesure discrète dF, pour laquelle

$$\int f(t)dF(t) = \sum \lambda_i f(x_i) \ .$$

2) Si ϕ est une fonction positive et d'intégrable 1, posant

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt$$

on obtient la mesure de densité ϕ pour laquelle

$$\int f(t)dF(t) = \int f(t)\phi(t)dt \ .$$

3) On peut aussi définir ce qu'on appelle une mesure singulière, portée par un ensemble de mesure nulle, comme l'ensemble triadique de Cantor K, et qui ne charge aucun point.

Si (K_n) est la suite de parties fermées introduites dans la définition de K, on définit une suite (F_n) de fonctions continues croissantes nulles sur $]-\infty, 0]$ et égales à 1 sur $[1, +\infty[$. Cette suite convergera uniformément vers une fonction F qui définira la mesure cherchée.

On prend $F_0(x) = x$ sur $[0, 1]$. On définit F_n pour $n \geq 1$ en remplaçant sur chaque intervalle de $K_{n-1} \cap K_n^c$, la fonction F_{n-1} par sa valeur au milieu, puis en raccordant de façon affine dans les intervalles de K_{n-1} restants. Ainsi F_n est la fonction de répartition de la loi uniforme sur K_n.

Extension à plusieurs variables

On définit l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbf{R}^2$, ou plus généralement $\mathbf{R}^n$, de la même façon que dans $\mathbf{R}$ en remplaçant les intervalles par des rectangles, ou en général des produits d'intervalles. Donnons tout de le théorème principal de ce chapitre.

Théorème de Fubini. Soit f une fonction **intégrable** sur $\mathbf{R}^2$; alors
(i) pour presque tout y la fonction qui à x associe $f(x,y)$ est intégrable,
(ii) la fonction pp définie qui à y associe $\int f(x,y)dx$ est intégrable
(iii) et

$$\int\int f(x,y)dxdy = \int(\int f(x,y)dx)dy$$

qui est encore

$$\int(\int f(x,y)dy)dx$$

par conséquent.

Cet énoncé connait une variante pour une fonction (mesurable) **positive**, sachant que son intégrale peut toujours être définie *si l'on accepte la valeur* $+\infty$. On énonce

Théorème. Soit f une fonction (mesurable) **positive** sur $\mathbf{R}^2$; alors
(i) pour presque tout y la fonction qui à x associe $f(x,y)$ est mesurable,
(ii) la fonction pp définie qui à y associe $\int f(x,y)dx$ est mesurable
(iii) et

$$\int\int f(x,y)dxdy = \int(\int f(x,y)dx)dy = \int(\int f(x,y)dy)dx$$

en acceptant la valeur $+\infty$.

En pratique on commence par vérifier que $\int\int |f| < +\infty$; pour cela toutes les manipulations sont licites; ensuite seulement on faire les manipulations voulues sur $\int\int f$.

La propriété de permutation des intégrations est facile pour une fonction élémentaire; par linéarité on se ramène à l'établir pour la fonction indicatrice d'un rectangle.

Pour passer au théorème de Fubini général, on utilise la définition qui a été donnée d'une fonction intégrable f et on se sert du fait qu'on peut toujours choisir la suite ψ_n de façon que là où $g = \lim \psi_n$ est finie, la valeur de f est définie et c'est la limite de la suite ϕ_n; on utilise une fonction de $\mathcal{E}^*$ infinie sur la partie négligeable qui pose problème. On écrit alors

$$\begin{aligned}+\infty > \int\int g(x,y)dxdy &= \lim_n \int\int \psi_n(x,y)dxdy = \lim_n \int\Big(\int \psi_n(x,y)dx\Big)dy \\ &= \int\Big(\lim_n \int \psi_n(x,y)dx\Big)dy = \int\Big(\int \lim_n \psi_n(x,y)dx\Big)dy = \int\Big(\int g(x,y)dx\Big)dy\end{aligned}$$

par convergence monotone. Alors $\int g(x,y)dx < +\infty$ pour presque tout y et, si y est fixé, alors $g(x,y) < +\infty$ pour presque tout x. On écrit un enchaînement analogue pour f et ϕ_n en s'appuyant maintenant sur la convergence dominée.

Mesure produit*

On se place dans le cas de mesures positives bornées pour éviter quelques difficultés techniques, avec à l'esprit l'exemple des probabilités.

Etant donnés deux espaces X muni de la tribu $\mathcal{T}$ et Y muni de la tribu $\mathcal{U}$ on définit sur le produit la **tribu produit** $\mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$ comme celle engendrée par la classe $\mathcal{S}$ constituée des ensembles

$$A \times B$$

où A parcourt $\mathcal{T}$ et B parcourt $\mathcal{U}$. Elle est stable par intersection finie et $(A \times B)^c$ est réunion disjointe des produits $A^c \times Y$ et $A \times B^c$; c'est un semi-clan.

Soient maintenant μ et ν des mesures positives bornées sur $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{U})$ respectivement. On commence par définir la **mesure produit** $\mu \otimes \nu$ sur $\mathcal{S}$ comme une mesure bornée en posant

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

pour A dans $\mathcal{T}$ et B dans $\mathcal{U}$.

On l'étend alors (de façon unique à la tribu) engendrée. On s'intéresse à la propriété

$$(*) \qquad \int \Big(\int f(x,y) d\mu(x) \Big) d\nu(y) = \int \Big(\int f(x,y) d\nu(y) \Big) d\mu(x)$$

à savoir à la validité des deux membres (la mesurabilité des fonctions intétéres) et à l'égalité entre eux.

La propriété est vraie pour $f = 1_C$ où C est dans $\mathcal{S}$, chaque membre valant $(\mu \otimes \nu)(C)$. Par linéarité de l'intégrale, elle s'étend au clan $\mathcal{A}$ engendré, constitué des réunions finies [disjointes] de parties de $\mathcal{S}$, d'où $(\mu \otimes \nu)(C)$ pour C dans le clan.

Désignons par $\mathcal{M}$ la classe des parties C de la tribu produit pour lesquelles la propriété est vérifiée pour 1_C. On voit que $\mathcal{M}$ est **stable par réunion croissante de suite** en invoquant pour μ et ν le théorème de la convergence monotone. De même $\mathcal{M}$ est **stable par intersection décroissante de suite**. On résume ces deux propriétés en disant que c'est une **classe monotone**.

Or on montre que la plus petite classe monotone $\mathcal{M}$ contenant un clan $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée, en considérant la sous-classe des parties C dont le complémentaire est dans $\mathcal{M}$, ou telles que $C \cap D$ soit dans $\mathcal{M}$ d'abord pour D dans $\mathcal{A}$ puis pour D dans $\mathcal{M}$. Ainsi a-t-on la propriété dans la tribu et y définit-on la mesure $\mu \otimes \nu$.

Maintenant chacun des termes de (*) est encore $\int\int f\mu \otimes \nu$ pour f mesurable positive (ou intégrable réelle) comme on le voit en écrivant f comme limite croissante d'une suite de fonctions étagées (ou différence de deux fonctions positives).

On obtient ainsi un théorème de Fubini pour f réelle intégrable que nous n'expliciterons pas pour ne pas embrouiller. En travaillant avec la tribu incomplète $\mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$ on gagne la mesurabilité des traces; par exemple $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ est la tribu borélienne $\mathcal{B}^2$ du plan. En revanche $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ est strictement incluse dans la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}^2$ du plan et on perd l'invariance par transformation linéaire.

On remarque pour finir que, dans le cas de mesures bornées, la masse totale du produit est le produit des masses totales; en particulier le produit de deux mesures de probabilités en est est encore une.

Changement de variables

Enonçons le

Théorème. Soient U et V des parties ouvertes de $\mathbf{R}^n$ et ϕ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V; pour que f soit intégrable sur V il faut et il suffit que $f \circ \phi$ soit intégrable sur U et si c'est le cas

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\phi(x))|\mathrm{det} d\phi(x)|dx$$

en notation condensée où l'intégrale représente une intégrale multiple, dx représente $dx_1 \cdots dx_n$ et même chose pour dy.

On notera surtout la valeur absolue placée autour du déterminant jacobien $\mathrm{det}d\phi$, contrairement à l'usage en dimension 1. En effet $\int_{[a,b]}$ est pour l'intégrale d'une fonction et $\int_a^b$ est pour celle d'une forme différentielle!

Enfin pour une fonction positive (en toute rigueur mesurable) on effectue tous les changements de variable sans avoir à justifier de l'intégrabilité.

En fait on peut déduire l'égalité cherchée d'une inégalité valable dans un cadre un peu plus large.

Lemme. Soit U une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$ et ϕ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbf{R}^n$; pour une fonction (mesurable) positive f sur $\mathbf{R}^n$ on a

$$\int_{\phi(U)} f(y)dy \leq \int_U f(\phi(x))|\mathrm{det} d\phi(x)|dx \ .$$

La démonstration du théorème de changement de variable est, comme pour le théorème de Fubini, presque automatique dès qu'on connaît le résultat pour les fonctions élémentaires. Dans ce cas on peut commencer par étudier le cas où ϕ est une transformation affine et en déduire le cas général par comparaison.

On notera en effet que la valeur absolue du déterminant représente un volume.

Mesure image*

On va parler maintenant de qui se cache derrière le théorème du changement de variables, à savoir la notion de **mesure image** .

Si X est muni d'une tribu $\mathcal{T}$ si ϕ est une application mesurable de X dans Y muni d'une tribu $\mathcal{U}$ pour toute mesure positive μ sur $(X, \mathcal{T})$, on définit une mesure positive ν sur $(Y, \mathcal{U})$ dite mesure image en posant

$$\nu(B) = \mu(\phi^{-1}(B))$$

pour toute partie mesurable B de Y. Alors

$$\int_Y g(y) d\nu(y) = \int_X g(\phi(x)) d\mu(x)$$

chaque membre ayant un sens dès que l'autre en a un, notamment pour toute fonction g mesurable positive.

Ainsi apparaît-il, dans le cas d'un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme ϕ de U sur V, que la mesure de Lebesgue sur V est la mesure image de la mesure borélienne de densité $|\det d\phi|$ sur U.

Pour revenir au cas général on notera que si μ est bornée alors ν l'est aussi et les deux mesures ont même masse totale; en particulier l'image d'une mesure de probabilités en est aussi une.

La notion de mesure image joue un rôle important en théorie des probabilités, mais aussi en Analyse. On verra que le produit de convolution n'est autre que l'image du produit tensoriel par l'addition.

Espaces L^p

1. Inégalités de convexité.

Soient p tel que $1 \leq p < \infty$ et si $p > 1$ soit q défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ l'exposant **conjugué** de p. On montre d'abord le

Théorème (Hölder).

$$\int fg \leq \Big(\int f^p\Big)^{1/p} \Big(\int g^q\Big)^{1/q}$$

pour $p > 1$ et f, g (mesurables) positives.

De cette propriété on tire le

Théorème (Minkowski).

$$\Big(\int (f+g)^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\int f^p\Big)^{1/p} + \Big(\int g^p\Big)^{1/p}$$

pour $p \geq 1$ et f, g (mesurables) positives.

2. Normes L^p, complétion.

On prend $p \geq 1$ comme précédemment. On définit l'espace L^p exactement comme L^1 en plaçant $|\phi_n|^p \leq \psi_n$ dans la condition de domination; la différence est qu'on n'étend plus l'intégrale mais la norme $\| \ \|_p$. On vérifie que

$$\|f\|_p = \Big(\int |f|^p\Big)^{1/p}$$

et que l'espace L^p est composé des classes de fonctions f pp définies mesurables telles que le membre de droite ci-dessus soit fini. En pratique c'est cette caractérisation qu'on retient.

Le fait qu'il s'agisse bien d'une norme résulte, mises à part quelques vérifications évidentes, de l'inégalité de Minkowski d'une part et de ce que

$$\|f\|_p = 0$$

implique $f(x) = 0$ pp ce qui signifie que la classe f est nulle d'autre part; comme on le voit la considération de classes est bien nécessaire ici pour parler d'espace normé.

On parle pour les (classes de) fonctions de L^p de (classes de) fonctions de **puissance p-ième sommable.**

L'intérêt de ces espaces est qu'ils sont **complets**; c'est le théorème de complétion précédemment établi.

En particulier l'espace L^2 est un **espace de Hilbert** pour le produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = \int \overline{f} g$$

ce qui constitue le théorème de Riesz-Fischer et ouvre la porte à toute l'analyse moderne.

Par ailleurs l'espace $\mathcal{E}$ est **dense** dans tous les L^p. Il en est de même de l'espace des fonctions continues à support compact.

Remarque. Noter qu'une suite qui converge dans L^p admet une sous-suite qui converge simplement presque partout. On ne peut pas faire mieux.

Espace L^∞ *

On définit l'espace L^∞ comme celui des classes de fonctions f presque partout définies et essentiellement bornées, muni de la norme $||f||_\infty$ qui est la borne supérieure essentielle de $|f|$.

Un fonction f est dite essentiellement bornée si elle vérifie $|f| \leq M$ pp et la borne supérieure essentielle de g est le plus petit nombre M possible; il existe car si M_n décroit vers M et $g \leq M_n$ pp pour tout n alors l'ensemble des x pour lesquels $g > M$, réunion des ensembles pour lesquels $g > M_n$, est négligeable.

On peut démontrer que L^∞ est complet. Cependant il n'existe pas dans L^∞ de suite dense; de fait cet espace est moins utilisé que les espaces L^p pour p fini.

Espaces hilbertiens

1. Propriétés générales. Considérons un espace préhilbertien réel [ou complexe] H. On démontre élémentairement les propriétés qui suivent. Pour les démontrer, on peut se ramener au cas réel, en notant que la partie réelle d'un produit hermitien est un produit scalaire sur l'espace réel sous-jacent.

Théorème (Cauchy-Schwarz).

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

ce qui implique notamment la continuité du produit scalaire [ou hermitien].

De plus, dans un espace séparé, il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Théorème (Minkowski).

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ce qui permet de montrer que $\| \; \|$ est une semi-norme.

De plus, dans un espace séparé, il y a égalité si et seulement si x et y sont liés avec des coefficients [réels] positifs.

Théorème (de la médiane).

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{\|y-x\|^2}{2}$$

ou

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

laquelle caractérise les normes qui dérivent d'un produit scalaire.

Définition. Un espace **hilbertien** est un espace préhilbertien séparé complet.

C'est le cas notamment de l'espace L^2, appelé espace de Hilbert.

2. Orthogonalité. On se place dans un espace préhilbertien H et on pose les **définitions** suivantes.

Deux vecteurs x, y sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$.

L'**orthogonal** d'une partie A de H, est l'ensemble, noté $A^\perp$, des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A; c'est un sous-espace vectoriel (fermé) de H.

Une famille (e_i) est dite **orthogonale** si l'on a

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0$$

pour tous $i \neq j$; elle est dite **orthonormale** si de plus $\|e_i\| = 1$ pour tout i.

Désormais, et donc pour toute la suite, H est supposé *hilbertien.*

Une **base hilbertienne** de H est une famille orthonormale qui engendre un sous-espace vectoriel dense.

Attention! En dimension infinie, une base hilbertienne n'est pas une base algébrique. D'autre part on doit pas parler de base hilbertienne dans un espace non complet.

On dispose d'un procédé pour construire de telles bases.

Proposition (procédé d'orthonormalisation de Schmidt). Soit (a_n) une suite libre (finie ou infinie); il existe une suite orthonormée (e_n) vérifiant, pour tout n, la propriété:

les vecteurs $e_0, \ldots, e_n$ engendrent le même sous-espace que $a_0, \ldots, a_n$.

Corollaire. Tout espace hilbertien séparable (i.e. possédant une suite dense) possède une base hilbertienne.

Exemple: dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R})$, les fonctions $e^{-x^2}x^n$, avec n entier ≥ 0, engendrent un sous-espace dense; le procédé de Schmidt construit la base des fonctions d'Hermite.

L'intérêt des bases hilbertiennes réside dans l'énoncé qui suit, et qui aurait pu servir de définition. Pour alléger le discours, on ne précise pas l'ensemble d'indices; ce peut-être l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ en dimension finie, comme $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$ en dimension infinie. Dans le premier cas les sommations sont algébriques, dans le second on somme une série (de 0 à ∞) et dans le troisième on en somme deux (pour sommer de $-\infty$ à ∞). On adapte l^2 à la situation.

Théorème. Soit H un espace hilbertien séparable et (e_n) une base hilbertienne de H. Si α est dans l^2, la famille $(\alpha_n e_n)$ est sommable dans H, et sa somme

$$\sum_n \alpha_n e_n$$

définit un isomorphisme d'espaces hilbertiens de l^2 sur H.

L'isomorphisme inverse est celui qui à x associe la suite $\langle e_n, x\rangle$.

On a en particulier la formule

$$\|x\|^2 = \sum_n |\langle e_n, x\rangle|^2$$

de Bessel-Parseval.

3. Projection. On a le

Théorème (de projection). Soit C une partie **convexe fermée** non vide de l'espace **hilbertien** H.

a) Pour tout x dans H, il existe un unique point $y = p_C(x)$ de C tel que

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\| \ ,$$

appelé projection de x sur C.

b) Ce point est encore caractérisé par le fait que

$$\Re\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$$

pour tout z dans C.

c) Si C est un sous-espace vectoriel (fermé) L, la projection y est caractérisée par

$$\langle x - y, z\rangle = 0$$

pour tout z dans L; la projection p_L est alors linéaire.

Corollaire. Si L est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace hilbertien H, alors H est somme directe orthogonale (ou somme hilbertienne) de L et de $L^\perp$, et $L^{\perp\perp} = L$.

4. Dualité *. Désignons par H^* l'espace hilbertien H lui-même [l'espace conjugué défini par la multiplication $(\lambda, x) \mapsto \overline{\lambda}x$ et le produit scalaire $(x, y) \mapsto \overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$]. Le produit scalaire de H définit une forme bilinéaire sur $H^* \times H$ qui met ces espaces en dualité.

Théorème (de représentation de Riesz). La dualité ainsi définie identifie H^* au dual de H. En particulier toute forme linéaire continue sur H est définie par le produit scalaire avec un vecteur de H.

Convolution

1. Convolution sur le tore. Si f et g sont des fonctions mesurables sur $\mathbf{T}$ on définit **pp** leur produit de convolution $f * g$ lorsqu'il existe comme une fonction mesurable sur $\mathbf{T}$ par

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x)g(y)\phi(x+y)dxdy = \int_0^1 (f*g)(t)\phi(t)dt$$

pour toute fonction ϕ d'un espace qui pourra être $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ ou $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T})$.

Cas L^1: si f et g sont dans $L^1(\mathbf{T})$ on définit **pp** leur produit de convolution comme une fonction de $L^1(\mathbf{T})$, la relation de définition s'étendant aux fonctions ϕ mesurables bornées; précisément $f(x)g(t-x)$ est intégrable sur $(0,1)$ pour presque tout t et

$$(f*g)(t) = \int_0^1 f(x)g(t-x)dx$$

donne le résultat cherché. De plus $f*g = g*f$ et

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1 \ .$$

* Cas $L^1 * L^2$: si f est dans $L^1(\mathbf{T})$ et g dans $L^2(\mathbf{T})$ on définit de même **pp** leur produit de convolution comme une fonction de $L^2(\mathbf{T})$, avec extension de la relation de définition à ϕ dans $L^2(\mathbf{T})$ et

$$\|f*g\|_2 \leq \|f\|_1\|g\|_2 \ .$$

* Cas $L^1 * L^\infty$: si f est dans $L^1(\mathbf{T})$ et g dans $L^\infty(\mathbf{T})$ on définit **partout** leur produit de convolution comme une fonction de $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ avec

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty \ .$$

* Cas $L^2 * L^2$: si f et g sont dans $L^2(\mathbf{T})$ on définit **partout** leur produit de convolution comme une fonction de $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ avec

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_2\|g\|_2 \ .$$

2. Unité approchée sur le tore. Une suite ϕ_n de fonctions de $L^1(\mathbf{T})$ est une unité approchée si:

1) $\phi_n \geq 0$
2) $\int_0^1 \phi_n = 1$
3) Si $0 < \alpha \leq 1/2$ on a $\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^{1-\alpha} \phi_n(x)dx = 0$.

Dans ce cas

a) si f est dans $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ alors $f * \phi_n$ tend vers f uniformément,
b) si f est dans $L^1(\mathbf{T})$ alors $f * \phi_n$ tends vers f dans cet espace.
* c) si f est dans $L^2(\mathbf{T})$ alors $f * \phi_n$ tends vers f dans cet espace.

3. Convolution sur la droite. Si f et g sont mesurables sur $\mathbf{R}$ on définit leur produit de convolution $f*g$ lorsqu'il existe comme une fonction mesurable sur $\mathbf{R}$ par

$$\int\int f(x)g(y)\phi(x+y)dxdy = \int (f*g)(t)\phi(t)dt$$

pout toute fonction ϕ d'un espace qui pourra être l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions continues à support compact ou l'espace $\mathcal{S}$ qui sera introduit dans un chapitre ultérieur ou encore l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Cas L^1: si f et g sont **intégrables** on définit **pp** leur produit de convolution $f*g$ comme une fonction **intégrable**, la relation de définition s'étendant aux fonctions ϕ mesurables bornées; précisément $f(x)g(t-x)$ est intégrable pour presque tout t et

$$(f*g)(t) = \int f(x)g(t-x)dx$$

donne le résultat cherché. De plus $f*g = g*f$ et

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1 .$$

* Cas $L^1 * L^2$: si f est **intégrable** et g **de carré intégrable** on définit de même **pp** leur produit de convolution comme une fonction **de carré intégrable**, avec extension de la relation de définition à ϕ dans L^2 et

$$\|f*g\|_2 \leq \|f\|_1\|g\|_2 .$$

* Cas $L^1 * L^\infty$: si f est **intégrable** et g **mesurable bornée** on définit **partout** leur produit de convolution comme une fonction **continue bornée** avec

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty .$$

* Cas $L^2 * L^2$: si f et g sont **de carré intégrable** on définit **partout** leur produit de convolution comme une fonction **continue bornée** avec

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_2\|g\|_2 .$$

4. Unité approchée sur la droite. Une suite ϕ_n de fonctions intégrables est une unité approchée dans L^1 si:

1) $\phi_n \geq 0$
2) $\int \phi_n = 1$
3) Pour tout $\alpha > 0$ on a $\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq\alpha} \phi_n(x)dx = 0$.

Dans ce cas

a) si f est continue et tend vers 0 à l'infini alors $f*\phi_n$ tend vers f uniformément,
b) si f est intégrable alors $f*\phi_n$ tends vers f dans L^1.
* c) si f est de carré intégrable alors $f*\phi_n$ tends vers f dans L^2.

5. Convolution sur la demi-droite. Cas L^1_{loc}: si f et g sont **localement intégrables** sur $[0,\infty)$ on définit **pp** leur produit de convolution $f*g$ comme une fonction **localement intégrable** sur $[0,\infty)$ par

$$f*g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx .$$

De plus $f*g = g*f$.

6. Convolution de mesures * . Plaçons pour simplifier dans le cas de la droite. La formule de définition du produit de convolution peut, dans le cas de deux fonctions f, g de L^1, s'interpréter comme suit: la mesure de densité $f*g$ est l'image par l'application $(x,y)\mapsto x+y$ du produit des mesures de densité f et g.

Cette remarque permet l'extension aux mesures: si μ et ν sont deux mesures bornées sur $\mathbf{R}$, positives ou non, on peut prendre la mesure produit $\mu\otimes\nu$ sur $\mathbf{R}^2$ puis l'image de cette mesure par l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ qui à (x,y) associe $x+y$. La mesure positive sur $\mathbf{R}$ ainsi définie est par définition le produit de convolution $\mu*\nu$.

Contrairement à ce qui se passe dans L^1, il y a une unité pour le produit de convolution des mesures, à savoir la mesure atomique en 0.

Séries de Fourier

1. Fonctions L^2 sur le tore. Soit $L^2(\mathbf{T})$ l'espace vectoriel des (classes modulo l'égalité pp des) fonctions à valeurs complexes périodiques de période 1, mesurables, de carré intégrable sur $(0,1)$. Cet espace est muni du produit hermitien

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt$$

et de la norme associée, appelée norme de la convergence en moyenne quadratique,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}\,.$$

C'est un **espace de Hilbert**.

2. Fonctions de base. Dans l'espace $L^2(\mathbf{T})$, les fonctions e_n définies par $e_n(t) = e^{2\pi int}$ constituent lorsque n parcourt $\mathbf{Z}$ un système orthonormal; autrement dit

$$\langle e_n, e_p\rangle = \delta_{n,p}$$

pour tous entiers relatifs n, p, avec la notation de Kronecker.

Alors pour tout entier relatif n en posant

$$c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi int} dt$$

on définit le $n^{\text{ème}}$ **coefficient de Fourier** de f.

Si J est une partie finie de $\mathbf{Z}$, la projection orthogonale d'une fonction f de $L^2(\mathbf{T})$ sur le sous-espace vectoriel (nécessairement fermé) engendré par les e_n avec n dans J est

$$u_J = \sum_{n\in J} \langle e_n, f\rangle\, e_n$$

puisqu'il apparaît que l'élément u_J ainsi défini vérifie $\langle e_p, u_J\rangle = \langle e_p, f\rangle$ pour p dans J et donc que $f - u_J$ est orthogonal au sous-espace mentionné. Par Pythagore il vient encore

$$\|u_J\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f - u_J\|_2^2 \le \|f\|_2^2$$

d'où, en prenant la borne supérieure sur J, l'inégalité, dite de **Bessel**

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\langle e_n, f\rangle|^2 \le \|f\|_2^2$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 \le \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

en explicitant.

3. Approximation par des polynômes trigonométriques. Le point crucial de la théorie est le fait que tout élément de $L^1(\mathbf{T})$ puisse être approché par une combinaison linéaire (finie bien entendu) des e_n de la forme $\sum_{n\in J} c_n e_n$; c'est ce que l'on appelle un **polynôme trigonométrique**.

En utilisant une unité aprochée faite de polynômes trigonométriques, on commence par approcher uniformément les fonctions continues 1-périodiques; ensuite on utilise la densité des premières dans $L^1(\mathbf{T})$.

4. Convergence en moyenne quadratique. Soient f une fonction de $L^2(\mathbf{T})$ et $\epsilon > 0$. On vient de voir qu'il existe un polynôme trigonométrique $g = \sum_{n\in J} c_n e_n$ tel que $\|f - g\|_2 \leq \epsilon$. Si alors N est tel que $J \subset [-N, N]$, pour tous p, $q \geq N$, sachant que la distance de f au sous-espace vectoriel engendré par les e_n avec $-q \leq n \leq p$ est majorée par ϵ, il vient par définition de la projection orthogonale

$$\|f - \sum_{n=-q}^{p} c_n(f)e_n\|_2 \leq \epsilon$$

d'où il résulte que

$$\lim_{p\to\infty, q\to\infty} \|f - \sum_{n=-q}^{p} c_n(f)e_n\|_2 = 0$$

ou encore en explicitant

$$\lim_{p\to\infty, q\to\infty} \int_0^1 |f(t) - \sum_{n=-q}^{p} c_n(f)e^{2\pi i n t}|^2 dt = 0$$

relation qui exprime la **convergence en moyenne quadratique** de la série de Fourier vers f. De plus par continuité de la norme on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

ce qui constitue l'égalité de **Parseval** .

En particulier une fonction de $L^2(\mathbf{T})$ dont tous les coefficients de Fourier sont nuls est nulle.

5. Convergence normale. Soit f une fonction **continue**, ainsi que de **classe C^1 par morceaux**, et 1-périodique; par intégration par parties il vient

$$\int_0^1 f'(t)e^{-2\pi i n t} dt = 2\pi i n \omega \int_0^1 f(t)e^{-2\pi i n t} dt$$

puisque par continuité et périodicité les termes tout intégrés disparaissent. Ainsi

$$c_n(f') = 2\pi i n c_n(f) \ .$$

On tire de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n\neq 0} |c_n(f)| = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{2\pi n} |c_n(f')| \leq \sum_{n>0} \left(\frac{1}{2\pi^2 n^2}\right)^{1/2} \sum_{n\neq 0} \left(|c_n(f')|^2\right)^{1/2} \leq C\|f'\|_2^2 < \infty \ .$$

Dans ce cas la série de Fourier de f est **normalement convergente** .

Soit g la somme de cette série. Clairement $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout n entier relatif de sorte que $f = g$. Ainsi f est partout la somme de sa série de Fourier.

6. Convolution. Enfin si f et g sont dans $L^1(\mathbf{T})$ on a

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$$

comme il résulte de la formule définissant le produit de convolution sur le tore appliquée à la fonction test particulière e_n avec n entier relatif.

Transformée de Fourier dans L^1

1. Définition L^1. L'espace $L^1 = L^1(\mathbf{R})$ est muni de la norme $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$. Par analogie avec les séries de Fourier, mais en remplaçant la sommation discrète par une sommation continue, pour une fonction g dans L^1, c'est-à-dire **intégrable** , on pose

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\xi x} g(\xi)d\xi$$

définissant une fonction $f = \overline{\mathcal{F}}g$ appelée **transformée de Fourier inverse** de g pour des raisons qui apparaîtront plus loin. Symétriquement pour une fonction f dans L^1, c'est-à-dire intégrable, on pose

$$g(\xi) = \int f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$$

définissant une fonction $g = \mathcal{F}f$ appelée **transformée de Fourier directe** de f.

On vérifie aussitôt que $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$. De plus la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est continue par continuité sous le signe intégrale. Enfin elle tend vers 0 à l'infini: c'est le théorème de **Riemann-Lebesgue**.

2. Exemples. Si on définit pour $a > 0$ des fonctions ϕ_a et $\hat{\phi}_a$ par

$$\phi_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + x^2}$$

et

$$\hat{\phi}_a(\xi) = e^{-2\pi a|\xi|}$$

on peut vérifier par un calcul élémentaire que $\mathcal{F}\phi_a = \overline{\mathcal{F}}\phi_a = \hat{\phi}_a$ et c'est un exercice de montrer que $\mathcal{F}\hat{\phi}_a = \overline{\mathcal{F}}\hat{\phi}_a = \phi_a$.

Si, toujours pour $a > 0$ on pose

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\pi}{a}x^2}$$

et

$$\hat{\psi}_a(\xi) = e^{-\pi a\xi^2}$$

on vérifie en exercice que $\mathcal{F}\psi_a = \overline{\mathcal{F}}\psi_a = \hat{\psi}_a$ et inversement.

Dans ces deux exemples les transformations $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont inverses l'une de l'autre.

3. Dérivation. Soit f une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que f et f' soient intégrables; alors

$$\mathcal{F}f'(\xi) = 2\pi i\xi\mathcal{F}f(\xi)$$

comme on le voit en intégrant par parties, l'hypothèse de continuité permettant de supprimer les termes tout intégrés aux points de discontinuité de f', et l'intégrabilité de f' assurant l'existence pour f d'une limite en $-\infty$ et $+\infty$, lesquelles sont nulles puisque f est intégrable.

Si maintenant f et xf sont intégrables alors $\mathcal{F}f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$(\mathcal{F}f)'(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi ixf)$$

comme il résulte du théorème de dérivation sous le signe intégrale.

4. Espace $\mathcal{S}$ de Schwartz. On note $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées décroissent plus vite à l'infini que les $1/|x|^p$ avec p entier quelconque.

Clairement $\mathcal{S}$ est stable par dérivation et puisque

$$D^n(x\phi) = xD^n\phi + nD^{n-1}\phi$$

il l'est aussi par multiplication par un polynôme. Surtout comme

$$\xi^p D^n \mathcal{F}\phi(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^p}\mathcal{F}(D^p((2\pi i\xi)^n\phi))$$

la transformation de Fourier laisse $\mathcal{S}$ stable.

5. Transposition. Si f, g sont des fonctions intégrables alors

$$\langle \mathcal{F}f, g\rangle = \langle f, \overline{\mathcal{F}}g\rangle$$

dans le sens que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}f(\xi)}g(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\overline{\mathcal{F}}g(x)dx$$

ce qui s'écrit en remplaçant g par $\overline{g}$ et conjuguant tout

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{F}g(x)dx$$

et se prouve aussitôt par Fubini.

La relation précédente qu'on peut aussi écrire

$$\langle \mathcal{F}f, \phi\rangle = \langle f, \overline{\mathcal{F}}\phi\rangle$$

où ϕ parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathcal{S}$, **caractérise la transformation de Fourier** dans L^1 à partir de la seule transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$. C'est cette relation qui servira de **définition** de la transformation de Fourier dans toute la suite (et même au-delà).

La même démarche s'applique à la transformée de Fourier inverse avec

$$\langle \overline{\mathcal{F}}f, \phi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\phi\rangle\ .$$

Si l'on regarde de près, il suffit pour connaître une fonction (c'est-à-dire pp) de connaître son intégrale sur les translatées d'une suite formant une unité approchée. Or de telles suites sont fournies à partir des exemples cités en **2** et sur ces exemples $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ étaient inverses l'une de l'autre; cela reste alors vrai sur une fonction ϕ translatée des précédentes. Ainsi si f est intégrable et g est sa transformée de Fourier directe

$$\langle f, \phi\rangle = \langle f, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\phi\rangle = \langle g, \mathcal{F}\phi\rangle$$

ce qui signifie que f est la transformée de Fourier inverse de g. Cette propriété est retenue comme le **principe de réciprocité**. La réciprocité est vraie dans tous les cas; cependant la transformation de Fourier peut ne pas être définie par une intégrale.

Transformation de Fourier: l'énergie *

1. Extension L^2. L'espace $L^2 = L^2(\mathbf{R})$ est muni du produit hermitien $\langle f, g \rangle = \int \overline{f(x)} g(x) dx$ et de la norme $\|f\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$. Les transformations $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{S}$ à la fois inverses et adjoints l'un de l'autre et donc des isométries pour la norme L^2; en explicitant

$$\langle \mathcal{F}\phi, \mathcal{F}\psi \rangle = \langle \phi, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle$$

pour $\mathcal{F}$ et de même pour $\overline{\mathcal{F}}$.

Maintenant on peut prolonger $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ à l'espace L^2 en des isométries réciproques et adjointes, vérifiant donc encore la relation fondatrice

$$\langle \mathcal{F}f, \psi \rangle = \langle f, \overline{\mathcal{F}}\psi \rangle$$

pour ψ dans $\mathcal{S}$.

2. Retour sur la dérivation. Soit f une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que $f\phi$ et $f'\phi$ soient intégrables pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}$. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx$$

en intégrant par parties et examinant soigneusement les termes tout intégrés.

La connaissance du second membre pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}$ caractérise f'; cependant le second membre n'a pas besoin de la dérivée f' pour être défini. Par exemple la fonction g sera dite dérivée de f **au sens des distributions** si on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx$$

pour toute fonction ϕ de $\mathcal{S}$. Si alors f possède une transformée de Fourier il est facile de voir que sa dérivée au sens des distributions f' en possède aussi une, qui vérifie

$$\mathcal{F}f' = 2\pi i\xi\mathcal{F}f$$

comme dans le cas étudié auparavant.

Voici maintenant un exemple qui sort du cadre des fonctions. Définissons une fonction Y, dite **échelon unité** ou **fonction de Heaviside** par

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et constatons que $-\langle Y, \phi' \rangle = \int_0^{\infty} \phi'(x)dx = \phi(0)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$ avec f localement intégrable. Si on veut dériver Y, il faut considérer que sa dérivée n'est pas une fonction: c'est l'**impulsion unité**, masse ou mesure de **Dirac** notée δ et définie par

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

pour ϕ dans $\mathcal{S}$. On définit de même la masse δ_a au point a, par $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$.

Remarquant que $\overline{\mathcal{F}}\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx$, il vient

$$\mathcal{F}\delta = 1$$

tout simplement.

3. Convolution. Si f et g sont des fonctions convolables et si par exemple f est dans L^1 alors

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f.\mathcal{F}g$$

comme on le voit avec une fonction auxiliaire ϕ.

Pour prendre aussi un exemple en dehors des fonctions, on peut vérifier facilement que $\delta * f = f$ et $\delta_a * f = f_a$.

4. Fonctions périodiques. Soit f une fonction 1-périodique de classe $\mathcal{C}^1$. Par réciprocité et translation on voit que $\mathcal{F}(e^{2\pi inx}) = \delta_n$, de sorte qu'il est permis de penser que

$$\mathcal{F}f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_n$$

ce que l'on vérifie effectivement avec une fonction ϕ de $\mathcal{S}$. Il est facile de vérifier que cette formule se conserve par dérivation, ce qui permet de l'étendre à une fonction f moins régulière, que l'on écrira, après addition d'une constante convenable, comme dérivée d'une fonction plus régulière.

En particulier, si on dérive la fonction 1-périodique définie sur $(0,1)$ par $f(x) = -x$, on obtient la fonction constante -1 corrigée par le terme impulsionnel

$$P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$$

appelé **Peigne** et la méthode précédente aboutit à la formule $\mathcal{F}(P(x)) = P(\xi)$, qui s'écrit encore

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\phi(n)$$

sur une fonction ϕ de $\mathcal{S}$, relation connue sous le nom de **formule sommatoire de Poisson** .

5. Troncature du spectre. Si f est dans L^1 ou L^2 on peut multiplier $\mathcal{F}f$ par $1_{[-A,A]}$ pour $A > 0$ ce qui revient à convoler f avec $\int_{-A}^{A} e^{2\pi i\xi x}dx = \frac{\sin(2\pi Ax)}{\pi x}$ et on vérifie que pour f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux on a

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{2\pi i\xi x}\mathcal{F}f(\xi)d\xi = \lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\frac{\sin(2\pi Ax)}{\pi x}dx = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

en commençant par se ramener au cas où f est à support dans un intervalle autour de x, puis en traitant la discontinuité éventuelle sur un exemple.

6. Cas des mesures. Pour une mesure positive bornée μ sur la droite définie par sa fonction de répartition F, toute fonction bornée est intégrable de sorte que l'on peut poser

$$\mathcal{F}\mu(\xi) = \int e^{-2\pi i\xi x}d\mu(x)$$

pour définir la transformée de Fourier $\mathcal{F}\mu$ comme une fonction partout définie avec

$$|\mathcal{F}\mu(\xi)| \leq \int 1d\mu(x)$$

ce qui majore $||\mathcal{F}\mu||_\infty$ par la masse totale de μ. Cette relation est compatible avec le relation fondatrice de la transformation de Fourier.

Exercices sur les mesures

Mesure des ensembles

1-1. Soit f une fonction intégrable positive. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute partie mesurable A telle que $\text{mes}(A) \leq \eta$ on ait $\int_A f \leq \epsilon$. On pourra commencer par montrer qu'il existe N tel que si E_N est l'ensemble des points où $|f|$ dépasse N alors $\int_{E_N} f \leq \epsilon/2$.

Tribus

1-2. Soit f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

a) On considère la tribu $\mathcal{T}$ sur R engendrée par l'unique partie $[0,1]$. Décrire cette tribu. Sachant que l'image directe d'une tribu est constituée des parties B dont l'image réciproque $f^{-1}(B)$ est dans la tribu de départ et que l'image réciproque d'une tribu est constituée des images réciproques $f^{-1}(A)$ de parties A de la tribu d'arrivée, déterminer $f(\mathcal{T})$, $f^{-1}(\mathcal{T})$, $f^{-1}(f(\mathcal{T}))$ et $f(f^{-1}(\mathcal{T}))$.

b) Si on met sur $\mathbf{R}$ à l'arrivée la tribu $\mathcal{S}$ de toutes les parties quelle est l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{S})$? Quelles sont ici les applications mesurables?

Mesure de dénombrement

1-3. Soient I un intervalle et $(u_n)_{n\geq 0}$ une série de fonctions continues sur I. On suppose qu'il existe une série $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que

$|u_n(t)| \leq a_n$ pour tout n

et $\sum a_n < \infty$.

Montrer en considérant la mesure de dénombrement sur $\mathbf{N}$ que la série (u_n) a pour somme une fonction continue sur I.

1-4. Soient I un intervalle et $(u_n)_{n\geq 0}$ une série de fonctions dérivables sur I. On suppose qu'il existe des séries $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que

$|u_n(t)| \leq a_n$, $|u_n'(t)| \leq b_n$ pour tout n

et $\sum a_n < \infty$, $\sum b_n < \infty$.

Montrer en considérant la mesure de dénombrement sur $\mathbf{N}$ que la série (u_n) a pour somme une fonction dérivable sur I.

1-5. On considère la série $(u_n)_{n\geq 1}$ de fonctions sur $[0,1]$ définie par

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n} .$$

a) Montrer que la série converge en tout point de $[0,1]$ et que sa somme est continue; on utilisera la série $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$v_n(x) = u_{2n-1}(x) - u_{2n}(x) .$$

b) En déduire

$$\log 2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} .$$

Produit infini

1-6. Montrer que si $(C_i)_{i\geq 1}$ est une suite croissante de parties cylindriques de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ dont la réunion est-elle même cylindrique alors la suite est stationnaire: tous les C_i sont égaux à partir d'un certain rang.

1-7. On se place dans la situation du jeu de pile ou face, modélisé par $\Omega = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ avec $p = \frac{1}{2}$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires, i.e. de fonctions mesurables (le vérifier), définie sur Ω par

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_n = 0 \\ -1 & \text{si } \omega_n = 1 \end{cases}$$

et soit $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

à partir de la précédente. On définit enfin $\tau(\omega)$ comme le plus petit entier $n > 0$ tel que $S_n(\omega) = 0$ s'il en existe et comme $+\infty$ sinon.

a) Montrer que τ est une application mesurable de Ω dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, ce dernier étant muni de la tribu de toutes les parties.

b) Expliquer pourquoi la mesure d'un cylindre A décrit dans $\{0,1\}^N$ est donnée par

$$P(A) = \frac{1}{2^N}\text{card}(A) \ .$$

c) Expliquer pourquoi la mesure de l'ensemble des ω tels que $\tau(\omega)$ est finie est donnée par

$$P(\{\tau < +\infty\}) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{2N}}\text{card}(A_N)$$

où A_N est pour $n \geq 1$ l'ensemble des ω de $\{0,1\}^{2N}$ tels que

$$S_1(\omega) \neq 0, \ldots, S_{2N-1}(\omega) \neq 0 \quad \text{et} \quad S_{2N}(\omega) = 0$$

d) A chaque ω dans $\{0,1\}^N$ on associe le chemin polygonal qui joint les points $(n, S_n(\omega))$ pour $n = 0, 1, \ldots, N$. Combien y a-t-il de chemins allant de 0 à $(2N, 0)$? De $(1,1)$ à $(2N-1,1)$?

e) A tout chemin γ du dernier type et touchant l'axe horizontal pour la première fois au temps n on associe le chemin obtenu par symétrie sur $[1,n]$. Montrer que ces chemins sont en nombre égal aux chemins joignant $(1,-1)$ à $(2N-1,1)$.

f) En déduire que la mesure de l'ensemble des ω tels que $\tau(\omega) = 2N$ est

$$P(\{\tau = 2N\}) = \frac{1}{2^{2N}} \times 2 \times \left(C_{2(N-1)}^{N-1} - C_{2(N-1)}^{N}\right) .$$

Calculer

$$\sum_{N\geq 1} \frac{1}{2^{2N}} \cdot \frac{1}{2N-1} C_{2N}^{N}$$

en partant de la série entière de $\sqrt{1+z}$.

Exercices sur l'intégrale de Lebesgue

2-1. Indiquer parmi les fonctions qui suivent celles qui sont intégrables:

$$1_{[0,1]} \qquad 1_{[0,\infty)} \qquad \frac{1}{x}1_{[0,1]} \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}1_{[0,1]} \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}1_{[1,\infty)} \qquad \frac{1}{x}1_{[1,\infty)} \qquad \frac{1}{x\sqrt{x}}1_{[1,\infty)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}1_{[-1,1]} \qquad \frac{1}{(1+x^2)\log|x|} \qquad \frac{1}{x(1+(\log|x|)^2)}$$

$$\frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \qquad \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \qquad \frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \frac{e^{-|x|}-\cos x}{x}$$

2-2. Montrer (d'une part de façon élémentaire pour $a = 0$ et $b = \pi/2$ et de l'autre dans le cas général en utilisant les théorèmes fondamentaux) que pour a, b réels tels que $a < b$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \cos^n t \, dt = 0 \ .$$

2-3. De quelles façons peut-on justifier la limite quand $n \to \infty$ de l'intégrale

$$\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n dt \ .$$

2-4. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{(\log t)^2}{1+t^2} dt = 2 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \ .$$

2-5. Pour $x \geq 0$ on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1} \, dt \ .$$

a) Etablir la continuité de f.

b) Montrer que f est dérivable pour $x > 0$ et que

$$f'(x) - f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \ .$$

c) En étudiant la limite de f en $+\infty$ en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt \ .$$

2-6. Peut-on passer à la limite sous le signe intégrale dans

$$\int_0^1 nt^n dt \ ?$$

2-7. Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont intégrables:

$$\sin x^2 \qquad \frac{\sin x^2}{x} \qquad |\sin x|^{|x|}$$

2-8. Montrer (d'une part de façon élémentaire et de l'autre à l'aide des théorèmes généraux) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1 - n\log t} = 0 \, .$$

2-9. Pour n entier naturel on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\, dt \, .$$

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
b) Calculer I_n.
c) En déduire que $C_{2n}^n \leq 2^{2n}$.
d) Donner un équivalent de I_n lorsque $n \to \infty$.
e) Etablir les inégalités

$$e^{-t^2} \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \quad \text{et} \quad e^{-t^2} \geq (1 - \frac{t^2}{n})^n$$

pour t quelconque dans la première et $|t| \leq \sqrt{n}$ dans la seconde, puis retrouver la valeur de

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt \, .$$

2-10. Pour n entier > 0 on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt)\mathrm{cotg}(t)\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\, dt$$

a) A-t-on $I_n = \pi/2$ pour tout n?
b) Est-ce I_n tend vers $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ quand $n \to \infty$?
c) Est-ce que $I_n - J_n$ tend vers 0?
d) Donner la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt \, .$$

2-11. On rappelle que la fonction d'Euler est définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \, .$$

Montrer que Γ est dérivable sur $]0, \infty)$.

Exercices sur l'intégrale de Lebesgue (suite)

3-1. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$. Donner la limite, quand $n \to \infty$, des intégrales

$$\int_n^\infty f(t)\,dt\ , \quad \int_{-1/n}^{1/n} f(t)\,dt\ , \quad \int_{-1}^{1} t^n f(t)\,dt\ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2} f(t)\,dt\ .$$

3-2. Soit $a > 0$. Que vaut la limite de

$$\int_0^a \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,dt$$

quand $n \to \infty$?

3-3. On rappelle que la constante d'Euler est définie par

$$C = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)\ .$$

a) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t\,dt = \int_0^\infty e^{-t} \log t\,dt\ .$$

b) Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^n \log(1-t)\,dt$ pour n entier.

c) En déduire que $C = -\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\log t\,dt$.

3-4. Pour a, $b > 0$ comment peut-on justifier

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt\ ?$$

Le théorème sur les séries peut-il directement s'appliquer? Peut-on s'y ramener en groupant par deux les termes?

Calculer

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$$

et

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots$$

3-5. Soit $x > 0$. Montrer (soit en dérivant deux fois soit en développant en série) que

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \frac{\sin(2xt)}{t} dt = \sqrt{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

pour tout $x > 0$ et donner la limite pour $x \to \infty$. Etudier directement la limite quand $x \to \infty$ du premier membre; on posera $u = xt$ et $\epsilon = 1/x^2$ puis sur $(\pi/2, \infty)$ on intègrera par parties

$$e^{-\epsilon u^2} \frac{e^{2iu}}{u} = \frac{2(-\epsilon u + i)e^{-\epsilon u^2 + 2iu}}{2u(-\epsilon u + i)}$$

pour appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale.

3-6. Pour quelles valeurs entières de n la fonction

$$f_n(t) = \frac{1}{t^n + t + 1}$$

est-elle intégrable sur $[1, \infty)$? Que vaut la limite quand $n \to \infty$ de

$$\int_1^\infty f_n(t)\, dt?$$

Donner un équivalent de cette intégrale.

3-7. Montrer que

$$\int_0^1 \Bigl(1 - (1 - \frac{t}{n})^n\Bigr) \frac{dt}{t} - \int_1^n (1 - \frac{t}{n})^n \frac{dt}{t}$$

a pour limite quand $n \to \infty$ la constante d'Euler C. En déduire que

$$C = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

puis que

$$C = \int_0^\infty \Bigl(\frac{1}{1+t} - e^{-t}\Bigr) \frac{dt}{t}\ .$$

3-8. Calculer (soit en dérivant soit en développant en série) l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(\omega t)\, dt$$

pour ω réel.

3-9. Justifier la démarche suivante: de

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^\infty t e^{-nt}\, dt = \int_0^1 \log\bigl(\frac{1}{1-t}\bigr)(1-t)^{n-1}\, dt$$

pour n entier > 0 on tire

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} &= \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} \log \frac{1}{1-t}\, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k \geq 1} \frac{t^{k-1}}{k} \bigl(1 - (1-t)^n\bigr)\, dt \\ &= \sum_{k \geq 1} \Bigl(\frac{1}{k^2} - \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)}\Bigr) \end{aligned}$$

soit

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1/2}{(n+1)(n+2)} - \frac{2/3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

Quel peut être l'intérêt de cette formule?

Exercices sur l'intégrale de Lebesgue (fin)

4-1. Pour $x \geq 0$ on pose

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

avec une intégrale dont on précisera le sens.

a) Montrer que f est continue sur $[0, \infty)$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, \infty)$ et calculer f'.

c) En déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt\ .$$

4-2. Justifier les étapes du calcul suivant

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\frac{1}{2^n} &= \int_0^1 \log\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{2-t} \\ &= \int_0^1 \log\left(\frac{1}{1-t}\right)(1 - t + t^2 - \cdots)\, dt \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots \\ &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2\end{aligned}\ .$$

4-3. Pour $a > 0$ et b réel comment peut-on justifier

$$\int_0^\infty \frac{\sin(bt)}{e^{at}-1} dt = \sum_{n\geq 1} \frac{b}{b^2 + n^2a^2}\ ?$$

4-4. Comment justifier pour $x > 0$ l'égalité

$$\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x})?$$

Exprimer l'intégrale pour x réel quelconque.

4-5. Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ de dérivée f' bornée. Montrer que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$$

en commençant par prendre $x < 1$ et en écrivant

$$f'(t) = \lim_{n\to\infty} n\Big(f(t + \frac{1}{n}) - f(t)\Big)\ .$$

4-6. La dérivée

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 \sin\frac{1}{t^2}\right)$$

est-elle intégrable sur $(0, 1)$?

4-7. Montrer que pour $x > 0$ on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt$$

et en déduire l'équivalence au voisinage de $+\infty$ avec la somme

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\,.$$

4-8. Pour x réel tel que $-1 < x < 1$ on pose

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1-x^2\cos^2 t}}\,.$$

a) Montrer que f (et g) sont développables en série entière au voisinage de 0; donner l'expression de ces développements.

b) Montrer que $f-g$ a pour limite à gauche en 1 la valeur $\log 2$.

c) Donner un équivalent de $f(x)$ à gauche de 1.

4-9. Si p est un entier naturel a-t-on

$$\int_0^1 \frac{t^p \log t}{(1+t)^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{(n+p+1)^2}\ ?$$

4-10. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$xy'' + y' + xy = 0\,.$$

a) Expliciter comme somme d'une série entière la solution f du problème de Cauchy avec données initiales $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

b) Montrer que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin t)\,dt$$

de deux manières différentes.

c) Montrer que

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-xz} f(x)\,dx$$

est défini pour z complexe tel que $\Re z > 0$. Expliquer pourquoi F est dérivable sur $]0,\infty)$.

d) Etablir la relation

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

pour z réel > 0.

4-11. Pour $x > 0$ on pose

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \ .$$

a) Montrer que I possède au voisinage de $+\infty$ le développement asymptotique

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} e^{-x} \ .$$

b) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que pour tout $x > 0$ on ait

$$I(x) = A - \log x + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot n!} \ .$$

c) Que vaut A? Quel peut être l'avantage du développement asymptotique par rapport au développement en série entière?

4-12. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$x^2 y'' + (1+3x)y' + y = 0 \ .$$

a) Cette équation possède-t-elle une solution développable en série entière en 0?

b) Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t^2}\, dt$$

définit une solution sur l'intervalle $]0, \infty)$.

c) Transformer l'équation on effectuant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ sur $]0, \infty)$ et l'intégrer à l'aide d'un développement en série entière. En déduire la solution générale de l'équation initiale.

d) Etudier le comportement de

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx}\, dt$$

en 0 à droite et en $+\infty$.

4-13. Pour $x > 0$ comment peut-on justifier

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} e^{-x\cos t} \cos(x \sin t)\, dt \ ?$$

4-14. Etudier la limite de

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2(nt)}\, dt$$

quand $n \to \infty$.

Exercices sur l'intégrale double

5-1. Trier parmi les fonctions sur $\mathbf{R}^2$ qui suivent celles qui sont intégrables et, en cas de réponse positive, calculer l'intégrale:

$$f(x,y) = (x+y)\,1_{\{0<x<y<1\}}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{1+x^2y^2}\,1_{(0,1)\times(0,1)}$$

$$f(x,y) = e^{x/y}\,1_{\{0<y<1;0<x<y^2\}}$$

5-2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,1_{(0,1)\times(0,1)}$$

n'est pas intégrable.

5-3. On se donne a, b tels que $-1 < a < b$.

a) Montrer que la fonction f définie par

$$f(x,y) = y^x$$

est intégrable sur $(a,b)\times(0,1)$.

b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y}\,dy\ .$$

5-4. Calculer la valeur de

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}$$

a) en considérant l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$$

b) en développant en série la fraction.

5-5. On définit une fonction f par

$$f(x,y) = e^{-xy^2}\sin x\ .$$

a) Cette fonction est-elle intégrable sur $(0,\infty)\times(0,\infty)$?

b) Pour chaque $X>0$ l'est-elle sur $(0,X)\times(0,\infty)$?

c) Montrer que l'intégration double sur $(0,\infty)\times(0,\infty)$ aboutit avec un résultat qui ne dépend pas de l'ordre des intégrations, en opérant un passage à la limite.

d) En déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \sin(t^2)dt\ .$$

5-6. La fonction

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

est-elle intégrable sur $(1,\infty) \times (1,\infty)$?

5-7. L'égalité

$$\int_1^\infty \Big(\int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3}dx\Big)dy = \int_1^\infty \Big(\int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3}dy\Big)dx$$

est-elle vérifiée?

5-8. Pour λ réel on pose

$$f_\lambda(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}\cos(2\lambda x) .$$

a) A-t-on une fonction intégrable sur $(0,\infty) \times (0,\infty)$?

b) Calculer

$$\int_0^\infty e^{-(y^2+\lambda^2/y^2)}dy$$

en dérivant sous le signe intégrale.

c) Donner à partir de ce qui précède la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx .$$

5-9. Soient f, g deux fonctions continues positives sur $[0,1]$ telles que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1$ et pour λ réel soit

$$F(\lambda) = \int\int_{0\leq x\leq 1; 0\leq y\leq 1; xy\leq\lambda} f(x)g(y)dxdy .$$

Montrer que F er dérivable en dehors de 0 et calculer F'; montrer sur un exemple que F peut ne pas être dérivable en 0.

5-10. Dans l'exercice **4-10** retrouver d) à partir de b).

Exercices sur le changement de variables

6-1. Calculer
$$\int\int_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy$$
où D est le domaine borné limité par les droites $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=1$.

6-2. Calculer
$$\int\int_D \log(x^2+y^2)dxdy$$
où D est le domaine défini par $1 \leq x^2+y^2 \leq 2$.

6-3. Calculer
$$\int\int\int z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$$
où D est le domaine limité par les surfaces $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=1$.

6-4. Calculer
$$\int\int\int_D \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz$$
où D est la boule unité de $\mathbf{R}^3$.

6-5. Pour λ, μ réels calculer
$$\int\int_{x^2+y^2\leq\lambda^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad , \quad \int\int_{x/y\leq\mu} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$
et
$$\int\int_{x^2+y^2\leq\lambda^2 \ , \ x/y\leq\mu} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$
et préciser ce que l'on observe.

6-6. On considère la fonction F définie par
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \pi/2 \\ x/\pi + 1/2 & \text{si } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$$
et on pose $\mu = dF$. Quelle est l'image ν de μ par la foncton ϕ définie par $\phi(x) = \tan x$?

6-7. Calculer
$$\int\int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)dxdy$$
où D est un domaine borné limité par les courbes $x=y$, $y^2-x^2=1$, $xy=1$, $xy=2$.

6-8. Calculer
$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$
à partir de
$$\int\int_{x\geq 0 \ , \ y\geq 0} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \ .$$

6-9. Calculer

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{il(x)-\frac{1}{2}q(x)}dx$$

où l une forme linéaire et q une forme quadratique définie positive dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$.

6-10. Soit μ la mesure de densité

$$e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^3$; si ϕ est définie par

$$\phi(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

que vaut l'image de μ par ϕ?

6-11. Pour $t > 0$ on pose

$$f_t(x,y) = e^{-t(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2) \quad , \quad g_t(x,y) = e^{-t(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)$$

et

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}\sin(x^2)dx \quad , \quad G(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}\cos(x^2)dx$$

a) Les fonctions F, G sont-elles continues pour $t \geq 0$? Dérivables pour $t > 0$?

b) Exprimer

$$\int\int_{x\geq 0\ ,\ y\geq 0} f_t(x,y)dxdy \quad , \quad \int\int_{x\geq 0\ ,\ y\geq 0} g_t(x,y)dxdy$$

en fonction de F, G.

c) Calculer ces intégrales doubles.

d) En déduire les valeurs de

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx \quad , \quad \int_0^\infty \sin(x^2)dx \ .$$

6-12. Si μ est la mesure de densité $1/(1+x)$ sur $(0,1)$ et si on pose

$$\phi(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

que vaut l'image de μ par ϕ?

6-13. Calculer

$$\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

pour a, $b > 0$.

Exercices sur les espaces L^p

7-1. Pour quelle valeur de $p \geq 1$ les fonctions suivantes sont-elles de puissance p-ième sommable

$$\frac{1_{(0,1/2)}(x)}{x\log^2 x}\ ? \quad \frac{1_{(0,\infty)}(x)}{\sqrt{x}(1+|\log x|)}\ ? \quad \frac{1_{(0,\infty)}(x)\times 1_{(1,\infty)}(y)}{\sqrt{x}+y^2}\ ?$$

7-2. Pour quelles valeurs de α, $\beta \geq 0$ la fonction

$$f(x,y) = \frac{1}{|x|^\alpha + |y|^\beta}$$

est-elle de carré intégrable sur $\mathbf{R}^2$ privé du carré $[-1,1]\times[-1,1]$?

7-3. Etablir les inclusions

a) $L^\infty(0,1) \subset L^p(0,1)$ pour tout $p \geq 1$,
b) $L^p(0,1) \subset L^q(0,1)$ pour tous $p \geq q \geq 1$,
c) $L^p \cap L^q \subset L^r$ pour tous $q > r > p \geq 1$,
d) $L^p \cap L^\infty \subset L^q \cap L^\infty$ pour tous $q \geq p \geq 1$.

et discuter

e) $L^p \subset L^q$ pour $p > q \geq 1$,
f) $L^\infty \cdot L^p \subset L^p$ pour $p \geq 1$.

7-4. Soient p, q, $r > 1$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$; montrer que

$$\int f(x)g(x)h(x)dx \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$$

pour f, g et h mesurables positives.

7-5. Soit f une fonction de puissance p-ième sommable avec $p \geq 1$.

a) Expliquer pourquoi la valeur

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

est bien définie pour tout x réel.

b) Montrer que

$$F(x+h) - F(x) = o(|h|^{1-1/p})$$

quand $h \to 0$.

7-6. Soit f de puissance p-ième sommable avec $p \geq 1$; pour $t \geq 0$ on pose $m(t) = \mathrm{mes}(\{|f| \geq t\})$.

a) Montrer que

$$m(t) \leq \frac{1}{t^p}\|f\|_p^p\ .$$

b) Etablir que

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_0^\infty pt^{p-1}m(t)dt$$

en considérant la fonction pt^{p-1} de (x,t) sur l'ensemble $\{|f(x)| > t\}$.

7-7. Soit f une fonction de puissance p-ième sommable sur $(0, \infty)$ et F définie comme dans l'exercice **7-5**.

a) Montrer que $x^{1-p}F^p(x) \to 0$ quand $x \to 0$, $x > 0$ et quand $x \to +\infty$.

b) Supposant f de plus continue, montrer que

$$G(x) = \frac{1}{x}F(x)$$

est de puissance p-ième sommable sur $(0, \infty)$ et comparer $\|G\|_p$ et $\|F\|_p$; on pourra intégrer par parties

$$\int_a^b F^p(x)x^{-p}dx$$

pour $0 < a < b$.

7-8. Soit K une fonction de carré sommable sur $(0,1] \times [0,1]$; si pour f de carré sommable sur $(0,1)$ on pose

$$F(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

l'application qui à f associe F est linéaire et continue de $L^2(0,1)$ dans lui-même.

7-9. Si $B = B(0,1)$ est la boule unité de $\mathbf{R^2}$ et $p \geq 1$ donné, choisir $\alpha > 0$ pour que

$$F(x) = \int_B \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha}dy$$

définisse une application linéaire continue de $L^p(B)$ dans lui-même.

7-10. Pour n entier naturel et x réel on pose

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$$

définissant ainsi une suite H_n de fonctions dont on vérifiera qu'elles sont polynomiales.

a) Montrer que les polynômes H_n sont deux à deux orthogonaux dans l'espace de Hilbert $L^2(e - x^2dx)$; que vaut la norme de H_n?

b) Expliquer pourquoi, si x est réel fixé, la fonction e^{-t^2+2tx} est développable en série entière de t et exprimer ce développement à l'aide des H_n.

c) Montrer que, si t est réel fixé, la série $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!}H_n(x)$ converge dans $L^2(e^{-x^2}dx)$ vers e^{-t^2+2tx}.

Exercices sur les espaces hilbertiens

8-1. Dans l'espace hilbertien $L^2(0,1)$, pour les séries de fonctions définies par

$$u_n(x) = \frac{e^{2i\pi nx}}{n^2}, \quad v_n(x) = \frac{e^{2i\pi nx}}{n}, \quad w_n(x) = \frac{e^{2i\pi nx}}{\sqrt{n}}$$

où $n \geq 1$, que peut-on dire de la convergence, de la convergence absolue (i.e. de la série des normes)?

8-2. Montrer que la sphère unité d'un espace hilbertien ne contient aucun segment non réduit à un point.

8-3. Soit (C_n) une suite croissante de parties convexes fermées non vides de l'espace de Hilbert H. Si on pose

$$C = \overline{\bigcup_{n\geq 0} C_n}$$

montrer la convergence simple $\mathbf{p}_{C_n} \to \mathbf{p}_C$ des projections, quand $n \to \infty$.

8-4. Soit (C_n) une suite décroissante de parties convexes fermées non vides de l'espace de Hilbert H. On suppose que

$$d(x) = \lim_{n\to\infty} d(x, C_n)$$

ne vaut pas identiquement $+\infty$. Montrer dans ce cas que l'intersection

$$C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$$

est non vide et que $d(x,C) = d(x)$; montrer encore la convergence simple $\mathbf{p}_{C_n} \to \mathbf{p}_C$ des projections, quand $n \to \infty$.

8-5. Soient H un espace de Hilbert réel, C une partie convexe fermée non vide de H et f une forme linéaire continue sur H. Montrer que la fonction g définie par

$$g(x) = \|x\|^2 + f(x)$$

atteint sa borne inférieure sur C.

8-6. On considère l'espace c_{00} des suites à support fini, muni du produit scalaire de l^2. Montrer que

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n+1}$$

y définit une forme linéaire continue et que l'orthogonal de $\ker T$ est nul, alors que $\ker T$ diffère de c_{00}. Est-ce compatible avec le théorème de projection?

Exercices sur la convolution

9-1. Soit R la fonction caractéristique de l'intervalle $(0,1)$. Sans faire de calcul dessiner le graphe de $R * R$, de $R * R * R$. Que constate-t-on sur le support, la régularité?

9-2. Montrer que pour une donnée $e(t)$ continue l'équation différentielle

$$\dot{x} + x = e$$

avec condition initiale $x(0) = 0$ a une solution qui s'exprime à l'aide d'un produit de convolution (sur la demi-droite).

Même question pour l'équation

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = e$$

avec condition initiale $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

9-3. Si pour $\alpha > 0$ on pose

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\alpha^2}$$

on a $g_\alpha * g_\beta = g_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Si on pose

$$f_\alpha(x) = Y(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x}$$

on a $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

9-4. Avec les notations de l'exercice précédent expliquer pourquoi la suite $(g_{1/n})_{n\geq 1}$ avec une unité approchée sur la droite.

9-5. Résoudre l'équation de convoltion

$$f(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t} f(t)dt$$

par la technique d'itération.

9-6. Montrer que si f est une fonction de L^1, la translatée $\tau_h(f) = f(x-h)$ converge vers f dans L^1 lorsque $h \to 0$. On commencera par traiter le cas d'une fonction continue à support compact, puis utilisera un argument de densité.

En déduire que $L^1 * L^\infty$ est composé de fonctions uniformément continues (et bornées).

9-7. Soient p, $q > 1$ des exposants conjugués. Montrer que si F est une fonction mesurable telle que pour toute fonction h de L^q le produit Fh soit dans L^1 avec

$$||Fh||_1 \leq C||h||_q$$

alors F est dans L^p avec $||F||_p \leq C$.

En déduire que $L^1 * L^p \subset L^p$ avec $||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p$ pour $1 < p < \infty$.

9-8. Montrer que si f est intégrable et ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact le produit de convolution $f * \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

9-9. Montrer qu'en posant

$$\phi_n(t) = \frac{\cos^{2n}(\pi t)}{\int_0^1 \cos^{2n}(\pi u)du}$$

pour tout entier naturel n, on définit une unité approchée dans $L^1(\mathbf{T})$.

9-10. Noyau de Poisson. On pose

$$P(z,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$$

pour z complexe tel que $|z| < 1$ et t réel.

a) Soit r_n une suite de $[0,1[$ telle que $r_n \to 1$. Montrer que $P(r_n, t)$ définit une unité approchée pour les fonctions 2π-périodiques.

b) On se donne une fonction continue f sur me cercle $|z| = 1$. On pose

$$F(z) = \int_0^{2\pi} P(z,t)f(e^{it})dt$$

pour $|z| < 1$. Montrer que F définit un prolongement continu de f au disque fermé $|z| \leq 1$.

c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans le disque ouvert $|z| < 1$ et y vérifie l'équation

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

de Laplace. On dit que F est la solution du problème de Dirichlet de donnée f.

Exercices sur les séries de Fourier

10-1. Théorème de Riemann-Lebesgue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos(2\pi nt)dt = 0$$

pour une fonction f intégrable sur (a, b); on commencera par le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis procèdera par densité. Même question pour $f(t)\sin(2\pi nt)$.

10-2. Phénomène de Gibbs. On considère la série de fonctions, de somme h, dont

$$h_N(t) = \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(2\pi nt)}{n}$$

est la somme partielle d'ordre N.

a) Montrer que la suite $\sin(\pi t)h_N(t)$ converge uniformément et en déduire que la suite h_N converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ avec $0 < a \leq b < 1$.

b) Simplifier de même $\sin(\pi t)h'_N(t)$, puis montrant que

$$\lim_{N\to\infty}\int_{1/2}^{x}\frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} = 0$$

pour $0 < x < 1$, calculer h.

c) Expliquer pourquoi h_N est la suite partielle d'une série convergente dans $L^2(\mathbf{T})$ puis donner, sans calcul, les cœfficients de Fourier de h.

d) Exprimer la limite quand $N \to \infty$ de la valeur de h_N au point $\frac{1}{2(N+1)}$ sous forme d'une intégrale dont on donnera une valeur approchée. Que représente ce point et que peut-on en déduire quant à la limite du graphe de h_N?

10-3. Etablir

$$\cos t = \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nt)$$

pour $0 < t < \pi$ en commençant par développer $\sin t\cos t$.

10-4. Développer $|\sin^3 t|$ en série de Fourier. Que donne la formule de Parseval?

10-5. On considère la fonction périodique

$$\frac{1}{\lambda - \cos t}$$

pour $\lambda > 1$ fixé. Montrer que sa série de Fourier s'écrit $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nt)$ où les cœfficients a_n sont reliés par la relation de récurrence

$$a_{n+1} - 2\lambda a_n + a_{n-1} = 0$$

pour $n \geq 1$, puis calculer les a_n.

10-6. Développement Eulérien. On considère pour $0 < \alpha < 1$ la fonction 2π-périodique valant $\cos(\alpha t)$ sur $]-\pi, \pi[$.

a) Développer cette fonction en série de Fourier.

b) En déduire

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2}$$

en précisant la nature de la convergence.

c) Calculer les valeurs de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

en passant convenablement à la limite.

10-7. Fonctions höldériennes. Montrer que les cœfficients de Fourier d'une fonction 1-périodique intégrable sur $(0,1)$ peuvent s'écrire

$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(f(t) - f(t + \frac{1}{2n}) \Big) e^{-2\pi i n t} dt$$

et en déduire que si f vérifie

$$|f(t+h) - f(t)| \leq C|h|^\delta$$

pour δ tel que $0 < \delta \leq 1$ et $C \geq 0$, alors

$$c_n = O(\frac{1}{n^\delta})$$

pour $n \to \infty$.

10-8. Equation différentielle. Montrer que l'équation différentielle ordinaire

$$y'' + y = |\sin t|$$

possède une unique solution π-périodique et déterminer son développement en série de Fourier.

10-9. Expliquer pourquoi il existe une unique solution 1-périodique f de classe $\mathcal{C}^1$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux telle que $f(0) = 0$ et $f''(t) = t$ pour $-1/2 < t < 1/2$.

Déterminer la série de Fourier de f' puis celle de f à partir de celle de f''.

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Exercices sur les séries de Fourier (suite)

11-1. On considère la série, de somme f, dont

$$f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi nt)}{\sqrt{n}}$$

est la somme partielle d'ordre N.

a) En considérant la suite $\sin(\pi t)f_N(t)$ montrer que f_N converge uniformément sur $[a, b]$ avec $0 < a \leq b < 1$. Donner $b_n(f_N)$ et en déduire par convergence uniforme que l'intégrale $b_n(f)$ vaut $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Définissant une fonction impaire ϕ par $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ pour $t > 0$ et posant

$$g_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \phi(t-n)$$

montrer que $g_N(t)$ a une limite $g(t)$ pour t non entier relatif, puis que la fonction g est 1-périodique et intégrable sur $(0, 1)$.

c) Calculer le cœfficient de Fourier $b_n(g)$ sous forme d' une intégrale portant sur ϕ. Comparer les cœfficients de Fourier de $\sin(\pi t)f(t)$ et $\sin(\pi t)g(t)$ puis f et g.

11-2. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos(nt) = -\frac{r - \cos t}{1 - 2r\cos t + r^2}$$

pour $0 \leq r < 1$ et t réel. En déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n} = -\log\Big(2\sin\frac{t}{2}\Big)$$

pour $0 < t < 2\pi$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nt)}{n} = -\log\Big(2\cos\frac{t}{2}\Big)$$

pour $-\pi < t < \pi$. Les fonctions de droite sont-elles intégrables? Les séries de gauche sont-elles leurs séries de Fourier?

11-3. Problème de Dirichlet dans un carré. On désigne par C le carré ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbf{R}^2$. Soit g une fonction continue réelle sur le bord ∂C de C, nulle sur les côtés $\{0\} \times [0, 1]$, $[0, 1] \times \{0\}$ et $\{1\} \times [0, 1]$. On appelle solution du problème de Dirichlet une fonction u continue réelle sur le carré fermé $C' = [O, 1] \times [O, 1]$, harmonique dans C, c'est-à-dire y vérifiant

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

et égale à g sur le bord ∂C.

a) Supposer que u soit solution pour la donnée $g = 0$. Montrer en dérivant deux fois que la fonction

$$E(y) = \int_0^1 u^2(x, y)dx$$

est convexe sur $[0, 1]$ et en déduire $u = 0$ puis l'unicité du problème posé.

b) Chercher les solutions stationnaires, c'est-à-dire de la forme $h(x)k(y)$, sans tenir compte de g.

c) Supposant la restriction de g à $[0, 1] \times 1$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux montrer que la solution du problème est donnée par la série:

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{\mathrm{sh} n\pi} \Big(\int_0^1 g(t) \sin n\pi t \, dt \Big) \mathrm{sh} n\pi y \sin n\pi x \ .$$

11-4. Diffusion de la chaleur dans une barre. On considère l'équation aux dérivées partielles parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec conditions aux limites

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0$$

et donnée initiale

$$u(0, x) = u_0(x)$$

dans laquelle $u(t, x)$ est une fonction continue sur $[0, \infty) \times [0, L]$ admettant des dérivées partielles continues à l'ordre 1 en t et 2 en x sur $]0, \infty) \times [0, L]$, la donnée u_0 étant supposée continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, L]$. La fonction $u(t, x)$ représente la valeur à l'instant t de la température au point x pour un conducteur linéaire isolé thermiquement sauf aux extrémités maintenues à la température constante 0, le conducteur ayant à l'instant 0 la température $u_0(x)$.

a) Si u est une solution pour la donnée initiale 0 montrer que

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(t, x)dx$$

est continue pour $t \geq 0$, dérivable pour $t > 0$ et décroisante. En déduire l'unicité pour une donnée initiale quelconque.

b) Chercher les solutions stationnaires, c'est à dire de la forme $\phi(x)\psi(t)$, sans tenir compte de la donnée initiale.

c) Montrer que l'on peut écrire $u_0(x)$ sous la forme

$$\sum_{k \geq 1} b_k \sin\Big(\frac{k\pi}{L} x\Big)$$

puis que

$$\sum_{k \geq 1} b_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2} t} \sin\Big(\frac{k\pi}{L} x\Big)$$

résoud le problème posé.

d) Ecrire cette solution sous la forme

$$\int_0^L u_0(y) K(t, x, y) dy$$

où K est exprimé à l'aide d'une série.

Exercices sur la transformation de Fourier

12-1. A l'aide du résultat de l'exercice **3-8** calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$$

introduite dans l'exercice **9-3**; retrouver ensuite la relation

$$g_\alpha * g_\beta = g_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

montrée dans ce dernier exercice.

12-2. Calculer pour $\alpha > 0$ la transformée de Fourier de la fonction

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$$

à l'aide du résultat de l'exercice **4-4**. En déduire la relation

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$$

et montrer que la suite $(f_{1/n})_{n\geq 1}$ constitue une unité approchée dans L^1.

12-3. Montrer à l'aide d'une intégration terme à terme que

$$\mathcal{F}(\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi t)}) = \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+4\xi^2}$$

puis sommer la série de droite en adaptant convenablement l'exercice **4-3**.

12-4. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbf{R}$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et $|f(x)| \leq C(1+|x|^p)$ pour un entier p et une constante positive C.

a) Montrer que f est linéaire en supposant d'abord f dérivable.

b) Etendre le résultat au cas général en utilisant une fonction ϕ de $\mathcal{S}$ telle que $\int \phi = 1$ et exprimant f à l'aide de $f * \phi$.

12-5. Montrer que l'équation différentielle ordinaire

$$x'' - 4x = |t|e^{-|t|}$$

possède une solution intégrale f et une seule que l'on précisera. Que vaut la ransformée de Fourier de f?

12-6. Montrer que pour $\lambda < 1/2$ l'équation intégrale

$$x(t) = e^{-|t|} + \lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|}x(s)ds$$

possède une solution intégrable et une seule que l'on déterminera.

12-7. Fonctions d'Hermite. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_\lambda) \qquad f''(x) - 4\pi^2 x^2 f(x) = \lambda f(x)$$

dans laquelle λ est un paramètre réel.

a) Montrer que si f satisfait $\mathcal{E}_\lambda$ alors, sous certaines conditions à préciser, sa transformée de Fourier la satisfait aussi.

b) Montrer que si on pose

$$f(x) = e^{-\pi x^2} g(x)$$

alors g satisfait l'équation

$$(\mathcal{E}_\lambda) \qquad g''(x) - 4\pi x g'(x) - (\lambda + 2\pi) g(x) = 0$$

et donner la condition sur λ pour que cette dernière équation possède une solution polynomiale g_n unitaire de degré n.

c) Montrer que la fonction f_n correspondante est une fonction propre pour la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ et indiquer la valeur propre associée.

12-8. Diffusion de la chaleur dans une barre infinie. On reprend l'équation aux dérivées partielles de l'exercice **11-4** mais en remplaçant l'intervalle $[0, L]$ par $(-\infty, \infty)$.

a) Montrer que si $\hat{u}(t, \xi)$ est la transformée de Fourier en x de $u(t, x)$ le problème posé se transforme en

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}_0(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$$

sous des conditions que l'on précisera. Montrer que

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

est alors la solution cherchée.

b) Montrer que si u_0 est continue est bornée il en est bien ainsi.

c) Montrer que si u_0 est $2L$-périodique impaire de classe $\mathcal{C}^1$ la solution trouvée coïncide avec celle de l'exercice **11-4**.

d) En déduire

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2} t} \cos(\frac{k\pi}{L}(x-y)) dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-L}^{L} u_0(y) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-2kL)^2}{4t}}$$

dans ce dernier cas.

e) Comment en déduire la formule sommatoire de Poisson

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 \theta} \cos(2k\pi x) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{(x-k)^2}{\theta}}$$

pour $\theta > 0$ et x réel?