I.R.E.M. DE LORRAINE
Université Henri Poincaré Nancy 1

Campus Scientifique Victor Grignard - BP 239 - 54506 VANDŒUVRE-LES-NANCY cedex
Tél. 03 83 68 49 41 *(secrétariat)* - 03 83 68 49 45 *(bibliothèque)* - *Fax.* 03 83 68 43 94

Chronique d'une correspondance très certainement apocryphe

... ou l'improbable Gilberte Pascal

DIDACTIQUES N° 6

© **Edité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques**

Université Henri Poincaré - Nancy I - Faculté des Sciences - B.P. 239 - Vandœuvre-les-Nancy Cedex

Dépôt légal : 1er trimestre 2004

n° *de la publication :* 2.85406-175-6

Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Jean-Pierre FERRIER

Table des matières

Avertissement

Il est généralement imposé aux publications des IREM d'avoir intégré un regard extérieur...

Le présent fascicule remplit certainement la condition requise. Il est en effet par lui-même un regard extérieur sur des textes déjà publiés par ailleurs. Toute la contribution de Gilberte Pascal est une réaction polémique à des travaux déjà diffusés, et qui revendique clairement ce statut.

Fallait-il aller jusqu'à rechercher un avis supplémentaire pouvant déboucher sur une présentation d'ensemble ? On n'a pas fait ce choix.

Qu'aurait-donc apporté un éventuel préfacier ? Relever le caractère polémique du ton ? Le lecteur l'aura remarqué tout seul. Prendre parti, ici pour l'un et là pour l'autre ? Il vaut bien mieux laisser chacun se faire sa propre idée.

Jean-Pierre Ferrier

CHRONIQUE D'UNE CORRESPONDANCE TRES CERTAINEMENT APOCRYPHE

... ou l'improbable Gilberte Pascal

Le texte qui suit relate différents épisodes d'une correspondance peu ordinaire sur quelques thèmes des probabilités élémentaires et, plus précisément, sur les problèmes liés à leur enseignement dans les classes du lycée.

On trouvera successivement ici des échanges à propos d'une question d'équiprobabilité dans un modèle discret, d'une réflexion sur la notion de probabilités conditionnelles ainsi que d'une polémique touchant le domaine des lois continues.

Diverses lettres constituant cette "chronique" ont déjà été publiées dans le Bulletin de la Régionale APMEP *de Lorraine* (LE PETIT VERT) *ou dans* REPERES - IREM *et nous tenons tout d'abord à remercier ici les comités de rédaction de ces deux revues pour l'autorisation qu'ils nous ont accordée de reproduire tel ou tel article.*

PREMIERE PARTIE :

Le problème du petit Blaise... [1]

Nous reproduisons ici, avec l'aimable autorisation des auteurs et de la rédaction du *Petit Vert*, bulletin de la Régionale de Lorraine de l'APMEP, une polémique épistolaire traversant les siècles pour confronter différents points de vue sur la notion de probabilité et ses liens avec la réalité. Cette correspondance a été déclenchée par un agaçant petit problème de probabilités soumis par *Le Petit Vert* (n° 42, Juin 1995) à la sagacité de ses lecteurs.

ACTE I : Un problème proposé par Bernard PARZYSZ :

Un hebdomadaire organise un concours selon le principe suivant : une question est posée aux lecteurs ; il s'agit pour les participants d'inscrire la réponse sur une carte postale, et de l'envoyer au siège de la revue.

Le règlement du concours précise que le gagnant sera « la personne dont la carte aura été tirée au hasard parmi celles portant une bonne réponse ».

Cependant, afin de s'épargner la fastidieuse tâche de trier préalablement les bonnes réponses des mauvaises, les organisateurs décident d'utiliser la procédure suivante : on tire au hasard une carte parmi toutes les cartes reçues ; si cette carte indique la bonne réponse, son expéditeur est déclaré gagnant du concours ; sinon, on opère des tirages successifs (sans remise) d'une carte, jusqu'à obtention d'une bonne réponse.

Blaise, qui a envoyé une carte portant la bonne réponse, se demande si cette procédure ne le désavantage pas par rapport à celle qui figure dans le règlement initial.

Qu'en pensez-vous ?

1 Le début de cette première partie reprend *in extenso* la synthèse rédigée et commentée par Michel HENRY pour le numéro 32 de REPERES (Juillet 1998), intitulée *Chronique d'une correspondance probablement apocryphe* et dans laquelle il relate les début de "l'affaire Gilberte Pascal"...

Dans son n° 43 (Septembre 95), *le Petit Vert* publie trois réponses qui concluent que *la probabilité de gain de Blaise est la même dans les deux cas.* Ces réponses font intervenir de manières différentes la même notion de probabilité conditionnelle. Mais cette notion, fruit de l'élaboration séculaire du modèle probabiliste, est-elle pertinente dans ce problème ? Vous en jugerez...

1) André VIRICEL, sans formalisation, indique que dans le second cas « *tout se passe comme si les mauvaises réponses n'existaient pas* » ; ce qui, en effet, résulte du fait qu'un tirage donnant une mauvaise carte peut être considéré comme nul est non avenu ; la procédure revient alors à effectuer un tirage dans l'ensemble des « bonnes » cartes.

Les deux autres solutions formalisent cette idée en se plaçant dans le cadre de la théorie des probabilités : il est toujours réconfortant, en effet, de constater que, sur tel point particulier, le résultat fourni par la théorie n'est pas contraire à l'intuition. Ce qui concourt à montrer que 1°) la théorie et 2°) la modélisation que l'on a effectuées ne sont pas complètement farfelues.

2) Pol LE GALL procède ainsi :

Soient N le nombre de réponses reçues par l'hebdomadaire et n le nombre de réponses exactes. Appelons A l'événement : « Blaise est le gagnant ».

a) Si l'hebdomadaire respectait la procédure annoncée, on aurait, en tirant au sort parmi les n bonnes réponses : $P(A) = \frac{1}{n}$.

b) Dans la procédure effective, la main innocente chargée du tirage devra, au pire, effectuer $N - n + 1$ tirages, car il y a $N - n$ mauvaises réponses.

Soit A_k l'événement « c'est au $k^{\text{ème}}$ tirage que l'on obtient la première réponse exacte » ($1 \leq k \leq N - n + 1$). Les événements A_k constituent à l'évidence un système complet et on peut écrire :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{N-n+1} P(A \cap A_k) = \sum_{k=1}^{N-n+1} P(A|A_k).P(A_k) .$$

Or, pour tout k, on a $P(A|A_k)=\frac{1}{n}$, car aucune bonne carte n'a été précédemment tirée (il en reste donc n) et, sachant qu'une bonne carte va être tirée, Blaise a donc une chance sur n d'être gagnant.

On obtient alors: $P(A)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-n+1}P(A_k)=\frac{1}{n}$ (puisque $\sum_{k=1}^{N-n+1}P(A_k)=1$, en vertu du fait que les A_k constituent un système complet d'événements). Donc, en ce qui concerne les chances de succès de Blaise, les deux procédures sont bien équivalentes.

3) Venons-en maintenant à la solution de Jacques VERDIER qui, quoique paraissant *a priori* plus calculatoire, ne manque pas non plus d'intérêt (ne serait-ce que parce qu'elle fait intervenir une formule de combinatoire qu'on a rarement l'occasion d'utiliser) :

Nous conservons les notations précédentes, et nous définissons en outre les événements suivants :

F_i : « au $i^{\text{ème}}$ tirage, on obtient une réponse incorrecte »,

B_k : « Blaise gagne au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Nous avons bien sûr $P(A)=\sum_{k=1}^{N-n+1}P(B_k)$. Mais, en remarquant que l'on a $B_k\subset F_1\cap\ldots\cap F_{k-1}$, nous pouvons écrire : $B_k=F_1\cap\ldots\cap F_{k-1}\cap B_k$. La formule des probabilités composées nous donne alors :

$$P(B_k)=P(F_1).P(F_2|F_1).P(F_3|F_1\cap F_2)\ldots P(B_k|F_1\cap\ldots\cap F_{k-1}),$$

soit : $$P(B_k)=\frac{N-n}{N}.\frac{N-n-1}{N-1}\ldots\frac{N-n-k+2}{N-k+2}.\frac{1}{N-k+1},$$

ou encore : $$P(B_k)=\frac{(N-n)!}{(N-n-k+1)!}.\frac{(N-k)!}{N!}=\frac{(n-1)!\,C_{N-k}^{n-1}}{n!\,C_N^n}=\frac{1}{n}\frac{C_{N-k}^{n-1}}{C_N^n}.$$

D'où : $P(A)=\sum_{k=1}^{N-n+1} P(B_k)=\frac{1}{nC_N^n}\sum_{k=1}^{N-n+1} C_{N-k}^{n-1}$.

Evaluons donc $S=\sum_{k=1}^{N-n+1} C_{N-k}^{n-1}$:

En posant $\begin{cases} p=n-1 \\ q=N-n \\ j=N-n-k+1 \end{cases}$ il vient $S=\sum_{i=0}^{N-n} C_{p+j}^{p}$.

Or on sait (ou on démontre par récurrence) que $\sum_{j=0}^{m} C_{p+j}^{p}=C_{p+m+1}^{p+1}$.

D'où $S=C_{p+N-n+1}^{p+1}$. Ou, en revenant aux notations initiales, $S=C_N^n$. Et finalement : $P(A)=\frac{1}{nC_N^n}.C_N^n=\frac{1}{n}$.

Conclusion : Je ne sais si les hebdomadaires qui organisent ce type de concours ont fait appel à un « *consultant en probabilités* » pour savoir si la procédure qui consiste à trier des milliers de cartes, et celle qui consiste à... ne rien faire, sont équivalentes, mais je crois deviner vers laquelle ils se sont dirigés. Et, si ce sont uniquement des raisons d'économie qui ont guidé ce choix, nous sommes maintenant en mesure de les rassurer : il pourront continuer à écrire « *un tirage au sort, effectué parmi toutes les bonnes réponses par Maître X..., huissier, permettra d'attribuer, etc.* » (2), et à faire autre chose. Mais en y réfléchissant bien — me souffle le logicien — il ne s'agit pas d'autre chose, car si l'on tire parmi *toutes* les cartes, on tire *a fortiori* parmi les bonnes...

ACTE II : Une étrange lettre signée Gilberte PASCAL

Peu de temps après la publication du n° 43, *le Petit Vert* recevait cette lettre d'une certaine Gilberte PASCAL, sœur de Blaise (3), et la publiait dans son n° 44 de Décembre 95 :

2 Cf. par exemple *Télé 7 Jours* n° 1841 du 9 sept. 1995.

3 Blaise PASCAL (1623 -1662) avait deux sœurs : Gilberte (Mme Périer, 1620 -1687) qui a publié une *Vie de Blaise Pascal*, et Jacqueline (1625 -1661) qui entra en religion à Port-Royal, abbaye janséniste auprès de laquelle se regroupèrent des solitaires, dits les « Messieurs de Port-Royal » (LEMAISTRE DE SACY, NICOLE, ARNAULD, LANCELOT, HAMONT).

Mademoiselle Gilberte Pascal

à

Messieurs André, Pol, Jacques et Bernard.

Messieurs,

Je ne sais comment vous avez eu connaissance des inquiétudes de mon jeune frère Blaise, mais quelle ne fut pas ma surprise en feuilletant votre petite publication verte datée de septembre, dans la page 24 de laquelle vous vous intéressez à son problème. C'est en effet après avoir appris (je ne sais trop comment) que le gagnant au concours organisé par un hebdomadaire serait tiré au sort parmi les bonnes réponses en utilisant la procédure simplifiée que vous rapportez, qu'il a commencé à me demander si cela aurait une influence sur ses chances de gagner. N'étant pas versée dans les mathématiques, ni même dans le calcul des probabilités, je ne trouvai guère de raisons susceptibles de le rassurer, si bien que c'est avec un profond soulagement que je me plongeai dans votre contribution sur le sujet, dans l'espoir d'y trouver quelqu'argument décisif capable d'emporter sa conviction.

Autant vous le dire d'emblée : aucun de vos magnifiques raisonnements n'a suffi. La jeunesse est le plus souvent d'un entêtement que les reproches ne sauraient entamer et les raisons les plus fondées n'ont généralement pas de prise sur les esprits qui refusent obstinément de les entendre. Vous le savez d'ailleurs sans doute, puisque vous semblez exercer le dangereux métier de professeur. C'est donc à la seule fin de compléter votre expérience (et de vous éviter pareille mésaventure) que je prends la liberté de vous écrire pour vous conter dans le détail l'échec que j'ai subi en voulant utiliser votre article.

J'ai d'abord cru bien faire en lui rapportant l'explication que vous semblez tenir d'un ami logicien : « En réfléchissant bien, lui dis-je en préambule, si l'on tire parmi toutes les cartes, on tire a fortiori *parmi les bonnes... ». L'impertinent me laissa entendre avec perfidie que je ferais mieux de ranger mon latin raisonnant (peut-être a-t-il même voulu dire "résonnant", mais je ne saurais l'affirmer) et de revoir mon français ! Pour lui, la préposition parmi, qui signifie* au milieu de, *doit s'entendre sous le sens commun de* dans l'ensemble de, *avec la seule hypothèse supplémentaire* d'équiprobabilité *propre à garantir l'équité. En d'autres termes, il a prétendu que tirer* parmi *les bonnes réponses impliquait bien d'effectuer le tirage* dans l'ensemble de *toutes les réponses, mais qu'en l'occurrence il serait clair que l'égalité des chances ne serait pas assurée au même titre pour toutes les réponses. Il est donc impossible — pour ces raisons de non équiprobabilité — de considérer que le tirage* parmi *les bonnes réponses induirait* a fortiori *un tirage* parmi *toutes les réponses. Le problème inverse lui parut encore plus clair : effectuer le tirage* parmi *toutes les réponses n'implique en quelque sens que ce soit le tirage* parmi *les bonnes réponses. Prétendre le contraire serait tout simplement estimer qu'il n'y a pas de problème (alors pourquoi le poser ?) ou affirmer que la procédure revient au même pour rétablir l'équiprobabilité. C'est en effet de cela qu'il s'agit, mais « affirmation ne vaut pas réponse », m'a-t-il proféré sentencieusement (et j'ai bien eu l'impression qu'il cherchait en cela à imiter son professeur de mathématiques)...*

Vous comprendrez, je le pense, que j'ai bien vite rangé ce premier argument dont je n'ai sans doute pas eu la capacité qui aurait été la vôtre pour le faire valoir. Mais reculant le moment que je craignais le plus de devoir entrer dans les calculs, j'essayai encore le raisonnement non formalisé en essayant de le convaincre que « tout se passait comme si les mauvaises réponses n'existaient pas » *puisque* « le tirage donnant une mauvaise carte pouvait être considéré comme nul et non avenu ». *Il ne me laissa même pas terminer ma phrase en me conseillant (comme son professeur le lui avait maintes fois enjoint, dit-il) de supprimer les superlatifs rhétoriques destinés à donner du poids à mon affirmation et de ne lui faire part que des éléments de raisonnements effectifs, seuls susceptibles d'étayer ma conclusion. Je dus battre en retraite, là encore, car je sentais bien que cette façon de voir les choses ne contenait pas le moindre argument et je me surpris moi aussi à penser qu'affirmation ne vaut pas réponse, même si elle est renforcée avec un maximum d'effets oratoires : la réponse devait indéniablement résider dans le* « tout se passe comme si »*, mais, n'étant pas à votre place, je ne disposais pas de l'autorité scientifique suffisante pour m'éviter d'avoir à expliquer véritablement le cheminement déductif complet.*

Comme vous vous en doutez, je n'échappai pas à l'obligation que je redoutais d'avoir à exposer de savants calculs auxquels je ne comprends pas *grand chose, mais qui sont cependant propres, si je vous ai bien compris, à justifier que la théorie et la modélisation probabilistes ne sont pas* « complètement farfelues ». *J'avoue toutefois que j'étais tout de même rassérénée, car je m'imaginais que les équations allaient favorablement impressionner le petit Blaise et que cela permettrait enfin de clore le débat. Il me laissa faire en m'observant d'un sourire qu'il me faut bien qualifier de supérieur, et je dois reconnaître que si je conserve encore aujourd'hui quelque rancune à propos de ces événements, c'est essentiellement à cause du malaise que me procure toujours le souvenir de ce sourire goguenard... Mais laissons-là ces sentiments. Une fois les calculs achevés, il alla silencieusement dans la corbeille à papiers pour retirer une dizaine de feuilles froissées qu'il déroula devant moi et sur lesquelles je pus apercevoir les mêmes formules que celles dont je venais à peine de me débrouiller péniblement. « Tu peux, comme moi, me dit-il, mettre tous tes calculs à la poubelle : ils sont insensés et ne prouvent rien ! ».*

Il m'expliqua ensuite qu'il s'était vite rendu compte que la formalisation calculatoire ne rimait à rien puisqu'elle ne faisait que décliner, sur des lignes et des lignes de sommations plus originales et plus intéressantes les unes que les autres, le double fait que l'on supposait à chaque pas :

1°) que les seuls gagnants possibles étaient choisis parmi les n bonnes réponses,

2°) que la procédure n'introduisait aucune différence de statut entre ces différentes bonnes réponses.

Dans ces conditions, ajouta-t-il, il était bien inutile d'aligner des équations pour obtenir ce que l'on avait postulé en permanence : toute bonne réponse aurait inéluctablement une probabilité p *telle que* $n.p = 1$ *! Des procédures de tirages d'apparence encore plus farfelue (comme de choisir tout simplement la première ou la dernière, la plus lourde ou la plus légère des bonnes réponses parvenues) donneront le même résultat à partir du moment où l'on n'introduit dans le modèle aucune clause détruisant la symétrie !*

Cette remarque me parut pleine de bon sens et je ne pus m'empêcher de glisser avec un certain soulagement qu'il devait désormais être rassuré,

4 Le texte qui suit de Michel Henry a été publié aussi dans le n° 44 du *Petit Vert* de Décembre 95.

puisque ses chances de gagner étaient les mêmes dans tous les cas. « Au contraire, me dit-il d'un air espiègle que je lui connaissais trop, il suffit de remarquer que la procédure permet aux plus malins — du moment qu'il n'y a aucune vérification — de compenser à leur avantage l'équiprobabilité des bonnes réponses... La dernière fois, j'ai envoyé une centaine de cartes à mon nom et j'espère ainsi avoir sensiblement amélioré mes chances ! ».

Vous conclurez évidemment avec moi que la jeunesse est particulièrement incorrigible ! Et croyez bien, Messieurs, que je plains souvent les pauvres professeurs de mathématiques qui se heurtent chaque jour à la difficulté de transmettre leurs théories et leurs modèles à des garnements qui ne sont pas dignes de les recevoir et bien incapables de les apprécier. J'espère cependant que les ennuis dont j'ai cru bon de vous faire part seront de quelque utilité pour votre réflexion et votre pratique.

Votre dévouée,

Gilberte Pascal.

ACTE III : Un commentaire iconoclaste de Michel HENRY

A la lecture de la lettre de Gilberte PASCAL, Michel HENRY, sollicité par la rédaction du *Petit Vert* comme « expert irémique », s'est permis quelques commentaires sur les trois solutions du problème n° 42. Il réagit à la lettre de Gilberte PASCAL, relance le débat en proposant deux questions et un exercice... et fait une proposition d'idylle [4] :

Reprenons les données du problème : *« Pour participer à un jeu organisé par un hebdomadaire, chaque candidat envoie sa réponse sur une carte postale. Le gagnant sera celui dont la carte sera tirée "au hasard" parmi les bonnes réponses. Revient-il au même de tirer (sans remise) et "au hasard" parmi toutes les cartes reçues, jusqu'à obtenir la première carte portant la bonne réponse ? ».*

Une réponse positive mérite-t-elle d'être justifiée ? Comment, avec quels arguments ? Les « démonstrations » de André VIRICEL, Pol LE GALL et Jacques VERDIER sont-elles équivalentes ? Répondent-elles aux doutes du jeune Blaise ?

Il semble que non, malgré les explications de sa sœur Gilberte qui ne parvient pas à entamer son scepticisme. Pourquoi ?

Blaise serait-il demeuré à ce point qu'il ne comprenne ni une explication transparente (celle de André VIRICEL), ni un calcul élémentaire (celui de Pol LE GALL), ni bien sûr l'application d'une formule de combinatoire due à l'habileté de Jacques VERDIER ?

Ses *pensées* n'iraient-elles pas plutôt au-delà des pratiques courantes (du moins en classe) de traitement des problèmes de probabilités, pour poser une question de fond sur le statut des objets mathématiques et finalement sur le Savoir ? De ce point de vue, à quels niveaux se situent les réponses de nos trois compères ?

Blaise précise (fin du troisième paragraphe de la lettre de Gilberte) : « [peut-on] *affirmer que la procédure revient au même pour rétablir* l'équiprobabilité. *C'est* en effet de cela qu'il s'agit ». Bonne question ! comme on dit quand on ne sait pas trop. Mais que veut donc dire Blaise par « *rétablir l'équiprobabilité* » ?

La réponse de André VIRICEL reste ambiguë : « *tout se passe comme si les mauvaises réponses n'existaient pas...* ». Où cela se passe-t-il donc ?... Dans la réalité concrète où l'on a mis les cartes postales dans un grand sac, que l'on a bien mélangé ? Y a-t-il alors « équiprobabilité » sur l'ensemble des cartes ? Certains en doutent : le mélange est-il parfait ou a-t-il conservé, malgré tout, un certain ordre dans l'empilement des cartes postales ? Et si, comme Blaise, des lecteurs ont envoyé au journal plusieurs réponses sans que cela soit contrôlé ? (on sort alors de la règle du jeu, mais dans la situation *concrète*, y a-t-il un dispositif de contrôle ?).

A ce niveau, que nous appellerons « *niveau* 0 », la description de l'expérience aléatoire : « tirer une carte au hasard », n'est pas suffisamment fine pour parler de sa reproduction possible un grand nombre de fois (approche fréquentiste), ou pour parler de « géométrie du hasard » dans l'agencement des cartes dans le grand sac.

Manifestement André VIRICEL se place au « *niveau* 1 » de la modélisation : « *Tout se passe comme si* » veut dire : supposons une expérience aléatoire idéale que l'on peut décrire en termes pseudo-concrets par le tirage d'une carte d'un grand sac. L'appréciation que je porte sur le déroulement de l'expérience concrète me permet de faire une hypothèse de modèle : « Les cartes du grand sac sont équiprobables », et je n'ai pas besoin de décrire le dispositif permettant au « *niveau* 0 » de le contrôler. En existe-t-il un en réalité ?

Et « *tout se passe comme si* » prend alors le sens d'une périphrase de « *niveau* 1 », mise pour axiome de modèle : l'hypothèse d'équiprobabilité sur l'ensemble des cartes postales, qui fonde le concept même de probabilité et son fonctionnement dans ce modèle, induit, *par principe*, l'équiprobabilité sur la partie réduite aux cartes postales portant la bonne réponse. André VIRICEL répond alors de manière tautologique à la question de Blaise : la procédure des tirages successifs, décrite au « *niveau* 1 », ne le désavantage pas puisqu'on fait l'hypothèse de modèle qu'elle ne le désavantage pas.

Ainsi Blaise a-t-il raison de prétendre que « *affirmation ne vaut pas réponse* » ...

Qu'en est-il des réponses de Pol LE GALL et Jacques VERDIER ?

On peut constater qu'elles se placent d'emblée au « *niveau* 1 » du modèle faisant l'hypothèse d'équiprobabilité : « $P(A) = 1/n$, si l'on tire parmi les bonnes réponses ». Pour retrouver ce même résultat dans l'autre procédure, Pol LE GALL et Jacques VERDIER introduisent une probabilité conditionnelle : $P(A/A_k) = 1/n$ et, après des calculs plus ou moins savants, obtiennent : $P'(A) = 1/n$, où P' est la probabilité associée à cette autre procédure.

Mais qu'est-ce que $P(A/A_k)$? On est ici en face d'un objet mathématique, prenant son statut au sein de la théorie abstraite des probabilités (la définition de $P(A/B)$ est donnée sans aucune référence au sens *pseudo-concret* des événements A et B). On se place donc à un « *niveau* 2 », celui de la mathématisation. Dans ce cadre, on (le professeur) donne la *définition* : $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, reliant ce nouvel objet à la probabilité *a priori*.

Du point de vue de la théorie mathématique abstraite, cela est consistant. On définit ainsi une nouvelle probabilité avec laquelle on peut faire des calculs (et

Jacques VERDIER ne s'en prive pas !) qui ne font que souligner la pertinence ou l'adéquation de la théorie probabiliste à l'idée que l'on se fait de la réalité (ouf !).

Mais pour donner un sens pseudo-concret à cette probabilité conditionnelle, il faut la mettre en regard du modèle de « niveau 1 ». C'est le problème didactique auquel se heurtent tous nos collègues de terminale :

— Ou bien on reste au « *niveau* 2 » et *on donne la définition* aux élèves. Ils doivent l'apprendre et l'appliquer dans les situations où, par effet de contrat didactique, un accord tacite avec le professeur suffira pour valider les calculs qui en résultent.

— Ou bien on veut lui donner un sens plus concret et, comprimant les « *niveaux* 1 et 2 », on présente aux élèves, une « *justification* » cardinaliste (ou fréquentiste) : si on fait l'hypothèse d'équiprobabilité sur Ω (l'ensemble de toutes les cartes), alors « il est clair que » la trace de la probabilité P sur l'ensemble B des bonnes cartes est aussi équirépartie ; et si P(A/B) est conçue comme le rapport du nombre des cartes favorables à la réalisation de A au nombre total de cartes qui réalisent B, on a par dénombrement « naturel » :

$$P(A/B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card } B} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card } \Omega} \times \frac{\text{Card } \Omega}{\text{Card} B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \; !$$

Alors Pol LE GALL et Jacques VERDIER « démontrent » avec leurs savants calculs un résultat ($P(A) = 1/n$ dans les deux cas) qui, pris comme hypothèse de modèle, sert de justification heuristique à la définition de l'objet P(A/B) qu'ils utilisent à cette fin. Peut-on plus allègrement se mordre la queue ? La solution tordue de Jacques VERDIER (qu'il me pardonne) ferait plutôt penser au recollement d'une bande de Möbius !

Ainsi s'éclairent les propos de Blaise : « *Il m'expliqua ensuite qu'il s'était vite rendu compte que la formalisation calculatoire ne rimait à rien puisqu'elle ne faisait que décliner, sur des lignes et des lignes de sommations plus originales et plus intéressantes les unes que les autres, le double fait que l'on supposait à chaque pas* » ; et rendons hommage à la profondeur de la remarque qui suit, si fidèlement transcrite par sa sœur Gilberte : « *il était bien inutile d'aligner des équations pour obtenir ce que l'on avait postulé en permanence* » !

Bien que Blaise soit à l'aise en mathématiques, notons son comportement pragmatique qui le conduit à une décision de « *niveau* 0 », « *améliorant sensiblement ses "chances"* ». Alors, il reste deux questions et un exercice :

— *Une question mathématique :* Jacques VERDIER utilise une formule peu connue de combinatoire, $\sum_{j=0}^{m} \binom{p+j}{p} = \binom{p+m+1}{p+1}$, pour obtenir le même résultat que Pol LE GALL : P(A) = 1/n . Dans la mesure où : "P(A/B) dans LE GALL" = "P(A/B) dans VERDIER", les calculs pris à l'envers sont-ils une démonstration probabiliste de cette formule ? Qu'en pensez-vous ?

— *Une question didactique :* L'introduction des trois niveaux de description d'une expérience aléatoire vous semble-t-elle éclairante pour comprendre certains paradoxes, certains comportements ambigus des élèves, pour analyser certains contrats didactiques et certains énoncés de Bac ? Précisons à nouveau ces trois niveaux :

« *Niveau* 0 » : description naïve du déroulement d'une expérience effective du *domaine du sensible*, dont la répétition, jusqu'à la stabilisation de la fréquence d'un événement observé, donne à penser sur la complexité des phénomènes aléatoires, tout en constatant dans leur répétition une certaine régularité.

« *Niveau* 1 », dit de la *modélisation* : description codée d'une expérience imaginaire simplifiée, pseudo-concrète, abstraite dans le *domaine des Idées*, porteuse des hypothèses de modèle et du concept de probabilité.

« *Niveau* 2 », dit de la *mathématisation* : dans le cadre d'une théorie mathématique formelle (ensembles,...), introduction d'objets nouveaux (probabilité-mesure) par leurs définitions axiomatiques et formulation d'hypothèses abstraites.

La distinction explicite en classe de ces trois niveaux par des vocabulaires spécifiques (« fréquences » *versus* « probabilités »,...) et par des traitements statutairement différents (déclarations de bon sens, combinatoire et raisonnements adaptés à des situations pseudo-concrètes, applications de théorèmes), vous semble-t-elle pertinente ? Je suis preneur de vos remarques : écrire à Jacques VERDIER, Irem de Lorraine, qui transmettra.

— *L'exercice :* A , B , C *tirent à la courte paille pour savoir qui sera mangé.* A, *le plus costaud, tire le premier ;* B, *son ami, tire en second. Le* hasard *ayant fait son œuvre,* C *n'a plus le choix et prend celle qui reste. Pas de* chance, *il tombe sur la petite. Il ne peut s'empêcher de penser qu'en tirant le premier, sa* bonne étoile *ne l'aurait pas abandonné et que sa main aurait été plus* heureuse.

Question : que répondez-vous à un élève qui pense comme C ?

— *Question subsidiaire* (mais intéressée, mes neurones expriment un certain tropisme : ils sont disponibles pour une relation... platonique, bien sûr) : Qui selon vous est Gilberte PASCAL ? Inscrivez votre réponse sur carte postale à l'adresse de l'Irem de Besançon, la 17ème carte reçue gagnera une brochure.

Acte IV : Une mise au point de Bernard PARZYSZ (5)

L'introduction de trois niveaux dans un processus de modélisation, proposée par Michel HENRY, semble compliquer l'analyse et Bernard PARZYSZ suggère de considérer les *niveaux* 1 et 2 comme deux expressions différentes d'un même modèle se situant dans le monde platonicien des Idées (6).

S'agirait-il seulement d'une question de registres de représentation ? Le formalisme mathématique nous apporte la puissance des outils de calcul de l'analyse, cela mérite-t-il d'être distingué ? Mais Bernard PARZYSZ souligne aussi la présence de deux modèles implicites dans les solutions proposées. La question est donc bien celle du choix du modèle le plus pertinent. Mais comment le déceler ? Voici le texte de Bernard PARZYSZ :

5 Publiée dans le n° 45 du *Petit Vert* de Mars 1996.

6 La poursuite de ce débat au sein de la commission Inter-Irem «Statistique et Probabilités» a abouti à une clarification de cette notion de modèle à des fins d'analyses didactiques pour l'enseignement. On la trouvera dans l'ouvrage de la commission : *Enseigner les probabilités au Lycée*, publié en Octobre 1997, disponible dans les Irem.

Michel,

Ceci constitue, pour ainsi dire, une réponse à ta réponse à la réponse de « *Gilberte PASCAL* ». Comme vous l'avez remarqué, Gilberte et toi, le problème que j'avais proposé était *totalement piégé*. La lettre de Gilberte et ta réponse ont levé le lièvre : peut-être pourrons-nous ainsi faire un peu avancer le *schmilblick* ?

Venons-en donc au sujet du débat : si je te suis bien, tu distingues trois niveaux (hiérarchisés) de description de la situation proposée. Je vais donc reprendre ces niveaux, et t'en proposer ma propre « lecture » qui, me semble-t-il, diffère parfois un peu de la tienne :

— le «*niveau* 0 » serait celui du « concret », de la « réalité » : on a des « *cartes postales en noir et en couleur* » (comme chantait Montand), aux sujets divers, de dimensions variées, apportées plusieurs jours durant au siège du journal dans un certain nombre de sacs postaux, etc. Diverses procédures d'obtention de la carte gagnante sont possibles (et, faute d'information, *a priori* toutes envisageables). Par exemple : choisir un des sacs postaux (comment ?), l'ouvrir, plonger la main dedans sans regarder et extraire une carte (après avoir ou non mélangé le contenu du sac). Ou encore : déverser le contenu de tous les sacs en un grand tas, fermer les yeux et piocher une carte. Ou encore : trier toutes les cartes reçues pour ne garder que celles portant la bonne réponse, puis utiliser la procédure précédente. Ou encore...

A ce niveau, on n'a évidemment pas les moyens de dire quelque chose d'intéressant relativement à la question posée ; on peut tout juste émettre une opinion, éventuellement la défendre en utilisant le « bon sens » (celui de la « sagesse populaire », qui dit aussi bien « *à père avare, fils prodigue* » que « *tel père, tel fils* »), mais sans plus.

— le « *niveau* 1 », serait celui des objets idéaux chers à PLATON, dans lequel les cartes postales, toutes rassemblées dans un même sac, sont *supposées* (c'est donc une *hypothèse*) « indiscernables au toucher » (comme disent les manuels). Le point de vue d'André VIRICEL, comme tu le fais remarquer, se situe à ce niveau ; on peut dire qu'il suppose (mais de façon bien sûr implicite) que chaque carte a la même chance d'être tirée. Nous sommes bien ici dans un modèle de type « pré-kolmogorovien », celui de la « géométrie du hasard » utilisé par les probabilistes du $17^{ème}$ au $19^{ème}$ siècle. Ce niveau permet de fournir des réponses précises et argumentées aux problèmes que l'on se pose, mais il n'y a pas encore de véritable théorie axiomatique globale au sein de laquelle on puisse se placer. Il a néanmoins, historiquement, fourni des résultats importants en probabilités.

Dans le cas de la solution d'André VIRICEL, il y a, à deux reprises, passage d'une procédure à un modèle :

1°) la procédure consistant à rassembler les n bonnes cartes, puis à extraire l'une de ces cartes (*niveau* 0), est modélisée en considérant l'ensemble des bonnes cartes, dans lequel chaque carte à la même probabilité d'être tirée (*niveau* 1) ;

2°) la procédure consistant à rassembler les N cartes reçues, puis à procéder à des tirages successifs d'une carte jusqu'à obtention d'une bonne carte (*niveau* 0), est *interprétée* comme signifiant que les mauvaises cartes ne comptent pas, puis modélisée... par le même modèle que le précédent (*niveau* 1). D'où, évidemment, l'identité des réponses obtenues à la question posée.

Le problème, à mon avis, réside donc ici dans le passage du « *niveau* 0 » au « *niveau* 1 » : *à deux procédures différentes on fait correspondre un seul et même modèle*, ce qui a pour conséquence que la question initialement posée n'a plus de raison d'être, et entraîne la tautologie constatée.

— le « *niveau* 2 » serait celui de la mathématisation, conduisant en particulier à définir un espace probabilisé à partir de l'expérience « concrète » considérée au « *niveau* 0 ». Dans l'exemple qui nous occupe :

1°) A la première des deux procédures ci-dessus, on *peut* associer l'univers Ω_1 constitué par l'ensemble des n bonnes cartes : $\Omega_1 = \{\omega_i / i \in \{1,\ldots,n\}\}$, avec comme probabilité P_1 l'équiprobabilité. Appelant ω_1 la carte de Blaise et A l'événement : « Blaise gagne », on a : $A = \{\omega_1\}$, et la probabilité que Blaise gagne est alors : $P_1(A) = 1/n$.

2°) A la seconde de ces deux procédures, on *peut* associer l'univers Ω_2 constitué par l'ensemble des *(N – n + 1)*-arrangements de cartes (distinctes) reçues (puisqu'il y a au maximum *N – n + 1* tirages), univers du type de celui envisagé par FERMAT dans sa correspondance avec PASCAL au sujet du problème des partis, dans lequel on imagine que l'on continue à tirer des cartes *même après l'obtention d'une bonne carte*. Dans ce cas aussi, on prend comme probabilité P_2 l'équiprobabilité.

En notant B_k l'événement « Blaise gagne au k$^{\text{ème}}$ tirage », on a :

$A = \bigcup_{k=1}^{N-n+1} B_k$, et le calcul de $Card\ A = \sum_{k=1}^{N-n+1} Card\ B_k$ conduit à $P(A) = \dfrac{Card\ A}{Card\ \Omega_2} = \dfrac{1}{n}$, par des calculs voisins de ceux de Jacques VERDIER.

[N.B.: j'ai choisi sciemment cet univers, de façon à ne pas introduire, contrairement à Pol LE GALL et Jacques VERDIER, de probabilités conditionnelles. Notons que ce même espace probabilisé est peut-être (mais on le sait pas) celui qu'ont choisi Pol LE GALL aussi bien que Jacques VERDIER ; dans ce cas, on peut reprendre leurs solutions en se passant des probabilités conditionnelles, ce qui donnera quelque chose du genre ci-dessus.]

Il me semble qu'il s'agit là, au formalisme près, d'une solution qu'auraient pu produire PASCAL ou FERMAT eux-mêmes, puisqu'elle se réduit en fait à des dénombrements et à la « géométrie du hasard ». Et ainsi, plus qu'un passage du « *niveau* 1 » au « *niveau* 2 », la question me semble être plutôt celle du passage du « *niveau* 0 » à « *un niveau modélisé* », c'est-à-dire d'une situation « réelle » à *un* modèle de cette situation, que ce modèle soit complètement formalisé et intégré à une théorie mathématique (*niveau* 2) ou non (*niveau* 1). La formalisation (*niveau* 2) présente l'« avantage » de permettre de faire l'économie du sens des objets manipulés, comme tu le fais justement remarquer (c'est ce qui se passe aussi dans la résolution algébrique de problèmes « concrets ») ; mais encore faut-il, après traitement, pouvoir revenir au sens et interpréter le résultat obtenu dans le « *niveau* 0 ».

D'autre part, je ne partage pas l'avis de Blaise lorsqu'il dit qu'« *il était bien inutile d'aligner des équations pour obtenir ce que l'on avait postulé en permanence* ». Car, en réalité, qu'a-t-on postulé ci-dessus ?

1°) l'équiprobabilité dans Ω_1,

2°) l'équiprobabilité dans Ω_2.

Bien sûr, il y a l'équiprobabilité dans les deux cas, mais il ne me semble pas que l'une de ces deux hypothèses puisse impliquer l'autre, *étant donné qu'il s'agit de deux modèles différents*.

Ce problème est d'ailleurs analogue à celui — plus classique — rencontré à l'occasion de l'étude du schéma d'urne exhaustif, que l'on peut formuler ainsi :

« Une urne contient N_1 boules noires et N_2 boules blanches. Quelle est la probabilité d'obtenir k boules noires :

a) à l'issue d'un tirage simultané de n boules ?

b) à l'issue de n tirages successifs d'une boule, sans remise ? »

Bien sûr, notre « culture probabiliste » fait que nous savons que ces deux probabilités sont égales, mais est-ce si évident pour un élève ? Sans doute que non, étant donné que les deux procédures (*niveau* 0) sont totalement différentes. Il en est de même des modèles canoniquement associés à ces procédures :

— dans le premier cas : l'univers Ω_1 est l'ensemble des parties de l'ensemble B des boules dont le cardinal est égal à n ;

— dans le second cas, l'univers Ω_2 est l'ensemble des n-arrangements d'éléments de E ;

dans les deux cas, l'univers est muni de l'équiprobabilité.

La considération de la surjection canonique de Ω_2 sur Ω_1 (c'est-à-dire un raisonnement ou un calcul, au niveau des modèles) montre aisément que la probabilité de l'événement « on obtient k boules noires et $n - k$ boules blanches » est la même dans les deux modèles. Mais, n'en déplaise à Blaise, *ceci n'est pas une évidence a priori*.

Le malentendu à propos du problème des cartes postales provient sans doute du fait que *les univers et les hypothèses n'ont pas été explicités* dans l'exposé des solutions de Pol Le Gall et de Jacques Verdier. On retombe ici sur l'aspect didactique que tu évoques vers la fin de ton texte : la nécessité d'expliciter le modèle choisi pour rendre compte de l'expérience aléatoire étudiée, contrairement à ce que préconisent certains manuels qui estiment superflue la détermination explicite de l'univers dans lequel on se propose de travailler.

Que conclure, finalement ? Peut-être que, dans un modèle quel qu'il soit, *on ne peut trouver que ce qu'on y a mis*. Dans le cas présent, on ne peut contester — dans la mesure où les règles de traitement sont utilisées correctement — les résultats obtenus au sein d'un modèle, mais on peut contester le choix fait pour les divers modèles (c'est-à-dire, en fait, leur adéquation aux situations « concrètes » étudiées), ainsi que l'interprétation finale des résultats. Ce qui pose d'ailleurs une question débordant largement le cadre des probabilités (et dont la réponse n'est pas simple) : lorsqu'on fait une conjecture et que le modèle infirme cette conjecture, que peut-on en conclure ? Que la conjecture est fausse, ou que le modèle est inadéquat ?

Acte V : Une conclusion agacée de Blaise, aimablement rapportée par Gilberte [7]

Cette discussion sur la pertinence de la modélisation en probabilités et de son intérêt didactique eut le don d'agacer Blaise, qui sentait bien aussi que l'introduction « fréquentiste » de la notion de probabilité en classe de Première risque de faire écran à la beauté des purs raisonnements de « géométrie du hasard ». Sans doute peu impressionné par la remarquable découverte du "théorème d'or" de Jacques Bernouilli, prémisse à la loi des grands nombres, l'une des clés des applications des probabilités aux études statistiques, Blaise propose une métaphore de son point de vue sous la forme d'une élégante résolution d'un petit problème de géométrie, solution que Gilberte elle-même a du mal à comprendre. Mais Blaise n'éprouve pas le besoin de s'expliquer davantage, laissant à la sympathique plume de sa sœur le soin de conclure cette vivifiante polémique.

7 Cet "acte" n'a pas été publié dans *Le Petit Vert*, La lettre de Gilberte Pascal qui suit — ainsi que le paragraphe de présentation rédigé par Michel Henry — sont parus uniquement dans l'article de Repères cité à la note 1.

Mademoiselle Gilberte Pascal

à

Monsieur Jacques Verdier

Responsable de la petite Publication Verte.

Très cher Monsieur,

Permettez-moi tout d'abord de vous remercier de la peine que vous avez bien voulu vous donner pour retranscrire ma lettre précédente dans votre petite publication verte numéro 44... Peut-être vous êtes-vous interrogé sur mon absence de réponse et sur le fait que je n'avais pas jugé bon de réagir à la lettre de ce bienveillant Monsieur Henry, mais il me faut malheureusement vous confier que ceci ne tenait non point tant à ma volonté qu'à celle de mon chenapan de frère Blaise, et que celui-ci n'avait pas cru opportun de me confier son sentiment sur la question jusqu'à présent.

Vous pensez bien qu'aussitôt reçu votre numéro 44 et la contribution de ce bon Monsieur Henry, je me faisais une joie de lui en lire la suave prose : « Mazette ! lui dis-je, et par un Franc-comtois ! quel honneur ! ». Il se pencha bien au départ avec une certaine curiosité sur ce texte, mais ce n'était finalement que pour me faire mieux sentir son désaccord : « Un Franc-comtois fréquentiste ! Quelle horreur ! » grommela-t-il en guise de conclusion, tout en me rendant mon exemplaire si précieux de votre petite publication verte... Sentant alors mon teint s'empourprer quelque peu, je lui fis remarquer qu'il ne s'agissait pas encore, loin de là, de "fréquentation", et que, somme toute, la "proposition d'idylle" qui m'était subsidiairement adressée n'avait rien de contraire aux convenances relationnelles qui se doivent de gouverner les rapports intellectuels et platoniques entre personnes de bonne éducation... « Il s'agit bien de cela ! » s'emporta-t-il comme si j'avais dit une chose complètement déplacée. Puis il s'enferma dans sa mauvaise humeur, maugréa encore quelques mots à propos "d'esprit de finesse" que ce Franc-comtois confondait aussi allègrement avec "l'esprit de géométrie", et il s'enfonça dans une de ces crises mystiques qui, *vous le savez peut-être, le taraudent régulièrement. Inutile alors d'espérer de lui autre chose que des bribes de "pensées" et c'est ainsi que je n'ai rien eu à vous rapporter depuis qui vaille la peine d'un courrier.*

Je lui en voulais évidemment un peu et n'osais plus aborder le sujet. C'est alors que votre numéro 45 me permit de renouer avec celui-ci grâce à la nouvelle lettre que vous y publiez... « Voilà de quoi faire avancer le schmilblick ! », lui dis-je tout d'abord en m'efforçant de ne pas le brusquer... Il prit le texte que je lui tendais et le lut rapidement. « Il a l'air de sous-entendre que tu conclus un peu vite et que ce n'est pas une évidence a priori... *» ajoutai-je finement pour l'intéresser un peu plus.*

« Ah ! Parce que tu trouves qu'il fait vraiment avancer le schbilm... non, le schlimbik ! avec son latin résonnant ?, me rétorqua-t-il, sans doute piqué au vif. D'abord je te ferai remarquer que ce n'est pas moi qui ai dit que c'était évident (au contraire, puisque j'ai modifié à mon profit la modélisation du problème), et que je t'ai simplement fait admettre que les calculs ne servaient à rien puisque le résultat avait été postulé dans le modèle.

— Certes, répondis-je pour le pousser à bout, mais il n'a tout de même pas complètement tort quand il dit qu'il y a deux "univers"...

— La belle affaire ! Et si la secrétaire chargée des cartes réponses en avait jeté la moitié et avait remplacé les cartes manquantes par de vieux papiers gras avant le tirage, que ferait-il, à ton avis ton pousseur de schblimk ?

— Eh bien il inventerait un troisième univers à moitié rempli de papiers gras ; et je suppose qu'il calculerait alors la probabilité du "petit Blaise", comme ils disent !

— Voilà ! Et c'est là que j'ai dit que le calcul était inutile et insensé...

— Mais pourquoi donc ?

— C'est très simple : demande-lui, une fois qu'il aura péniblement calculé la probabilité de gagner du "petit Blaise" (comme ils disent), de te calculer la probabilité de gagner du "petit Pierre" qui, lui aussi, a envoyé sa réponse. Que crois-tu qu'il te répondra ?

— Mais que c'est la même chose ! » m'écriai-je, car je venais enfin de comprendre que le modèle ne permettait pas d'autre estimation... Alors à quoi bon faire le calcul, puisque tout ce qu'il s'agissait de soi-disant démontrer était l'équiprobabilité et qu'elle était postulée implicitement ?

« Mais, ajoutai-je, en essayant de masquer mon intérêt, crois-tu que cet aimable Monsieur Henry avait compris, lui ? ». Il me regarda avec une lueur amusée dans les yeux... fit semblant de réfléchir profondément et dit : « Cela m'étonnerait ! Tu vois bien que tout se passe à ce qu'il appelle le "niveau 1"... S'il avait vu les choses clairement, qu'aurait-il eu besoin de les embrouiller avec ses trois niveaux complètement inutiles !... D'ailleurs, je te signale, ma chère sœur, car tu n'as pas l'air de le savoir, que lorsque l'on dit d'un enseignant des probabilités qu'il est "fréquentiste", cela ne signifie pas du tout ce que tu crois, mais simplement qu'il fait partie de ceux qui s'ingénient à compliquer les choses dans l'esprit des élèves... ».

« Tiens, regarde, je vais t'expliquer... » poursuivit-il. Il me demanda alors de dessiner un hexagone régulier ABCDEF *et de joindre le sommet* A *au milieu du côté* BC, *puis le sommet* B *au milieu du côté* CD, *et ainsi de suite de manière à obtenir à l'intérieur un nouvel hexagone. « Démontre-moi, que le petit hexagone est un hexagone régulier ! » m'ordonna-t-il ensuite.*

Je lui répondis que c'était évident puisque la figure était manifestement symétrique... Il fut un peu déçu que je trouve immédiatement la bonne réponse, mais il le cacha assez bien. Il ajouta : « Eh bien tu vois, eux (et moi avec avant de mettre mes calculs à la corbeille...), ils ne procèdent pas comme cela : ils calculent avec peine la longueur d'un côté et la mesure d'un angle et, pour montrer que l'hexagone est régulier, ils annoncent ensuite fièrement que le calcul donnera la même chose pour tous les angles et tous les côtés et qu'ils sont donc capables de démontrer la régularité de l'hexagone !!... Mais attends, allons plus loin et analysons d'un peu plus près ce que font les "fréquentistes"... » Il reprit son hexagone, le coloria, le déforma, le découpa, le démultiplia sous mes yeux admiratifs. C'était fascinant et limpide, si bien que j'eus l'impression que tout ce qu'il me découvrait avait été frappé depuis longtemps du sceau de l'évidence et de la vérité...

Malheureusement, il retomba ensuite progressivement dans une de ces crises mathématiques qui, vous le savez peut-être, le taraudent régulièrement. Il déformait ses deux hexagones de manière à placer leurs sommets sur diverses courbes, mais je ne pouvais plus le suivre. Je m'attachai donc, pendant ce temps à reproduire toutes les si belles figures dont il avait émerveillé mon esprit... Et j'espère un peu avoir l'occasion de les faire admirer un jour à ce cher Monsieur Henry si nous avons le bonheur d'être enfin présentés...

Recevez donc, très cher Monsieur Verdier, l'expression de ma gratitude pour votre travail admirable (qui est sans nul doute à l'origine de cette magnifique petite publication verte) et transmettez, s'il vous plaît, l'expression de mes meilleurs sentiments à votre ami Franc-comtois si sympathique.

Votre dévouée

Gilberte Pascal.

EPILOGUE : Une lettre non publiée,

Après la publication de tout ce qui précède dans le numéro de juillet 1998 de REPERES, la revue reçut une troisième lettre signée Gilberte Pascal...

Mademoiselle Gilberte Pascal

à

Madame la Rédactrice en Chef de la revue Repères

Madame,

Un délicieux ami Franc-comtois dont je dois malheureusement taire le nom m'a remis récemment un exemplaire de la dernière livraison de votre ravissante revue. C'était un numéro entièrement consacré, je crois, aux calculs sur le hasard et vous avez bien voulu y publier la correspondance que *j'avais tenue naguère avec quelques représentants de cette philosophie. Permettez-moi, s'il vous plaît, de prendre à nouveau la plume pour vous remercier de l'honneur que vous avez bien voulu faire à ces modestes courriers et pour vous conter les réactions de mon toujours aussi chenapan de frère Blaise à ce propos...*

A peine eussè-je constaté qu'une partie de cette belle publication était consacrée à ses remarques sur le "problème du petit Blaise" (comme disaient alors mes éminents correspondants) je me précipitai donc vers mon frère pour lui faire admirer ce que je dois bien un peu, cependant, considérer comme "ma" prose : « Regarde ! m'écriai-je, nous voilà célèbres ! On m'a même laissé entendre que c'était une revue très importante et reconnue ; quelque chose comme la revue de la "nosphère" ou bien de la "noosphère", je ne sais plus très bien ! »

— Diable ! s'exclama-t-il sur un ton que je crus tout d'abord intéressé,... dis plutôt qu'il s'agit encore de tes fréquentations fréquentistes !

Je me gardai bien de répondre car il avait en réalité l'air plutôt agacé et je dois d'ailleurs à la vérité de préciser que c'était au soir de la Saint Jean Chrysostome et que j'avais bien mal choisi mon moment pour le distraire de ses méditations. Je ne sus trop que faire pour réparer mon erreur et il me faut avouer que le remède que j'inventai sur le champ se révéla bien pire que le mal :

« Ne t'emporte pas aussi vite, lui dis-je gentiment, d'ailleurs regarde : ils disent eux aussi, dans le commentaire de l'article que tu te montres "agacé" par les considérations didactiques...

— Les... quoi ? hurla-t-il en s'enflammant un peu plus.

— Eh bien oui ! les problèmes didactiques, si tu préfères ; cela vient du grec didactiko (j'enseigne), et je suppose que cela signifie que les dites considérations ont pour principal intérêt de se poser des questions à propos de l'enseignement des calculs sur le hasard !

— Connais pas ! maugréa-t-il, effectivement agacé. Et ce sont des didactologues... ou des didactomanes... ou des didactopathes qui ont écrit ça ? Et que fait-il donc ton homo didacticus fréquentus *?*

— D'abord ce n'est pas "mon" homo didacticus *! et je n'ai aucune raison de savoir ce qu'ils font ! J'imagine, bredouillai-je en faisant semblant d'improviser,... qu'ils se placent dans un contrat didactique... visant à la transposition des savoirs et au transfert des savoir-faire... et qu'ils cherchent à réussir la dévolution... ... afin de gérer dialectiquement les cadres et les champs conceptuels... dans lesquels opèrent leurs objets-outils... avant de passer à la phase d'institutionnalisation... qui exige, comme chacun sait,... ... la métaphorisation des paradigmes... et l'instanciation préalable des schèmes cognitifs fondamentaux...*

— Juste Ciel ! soupira-t-il avec lassitude »

Mais comme je sentais bien que sa colère s'évanouissait peu à peu, je reprenais moi aussi quelqu'assurance et j'en profitai pour enfoncer le clou :

« Tu ne te rends même pas compte, à force de jouer les esprits forts, que la forclusion du savoir savant, que permet le décalage temporel et institutionnel mis entre le savoir savant et ses avatars didactiques par le procès de transposition, est ce par quoi se constitue l'ordre didactique comme fermé sur soi ! Tiens ! regarde ! ajoutai-je en reprenant mon souffle, ce n'est tout de même pas "n'importe qui" qui peut écrire dans cette revue... et puis ils ont bien l'air de s'y entendre en "géométrie du hasard" : d'abord ils disent que tu ne connais même pas le "théorème d'or de Jacques Bernouilli" !...

— Bernouilli ? Théorème d'or ?... persifla-t-il, je connais bien un Bernouilli, mais il habite Anvers... et pour ce qui est de l'or ! mais note qu'il vient d'émigrer en Suisse... alors au fond, c'est peut-être crédible ! Enfin je te signale que son fils Jacques ne doit pas avoir beaucoup plus de sept ou huit ans... Après les Francs-comtois, tu m'as tout l'air de t'intéresser aux Helvètes au berceau...

— Tsss... tsss..., tu fais le malin ! mais il n'empêche que tu l'ignores bel et bien ce théorème d'or,... suisse ou pas suisse ! Si tu veux tout savoir ils m'ont donné l'impression de dire aussi que c'est la "loi des grands nombres", et que tu aurais dû la prendre en compte pour résoudre ton problème d'équiprobabilité...

— La "loi des grands nombres" ! reprit-il en insistant soigneusement sur chaque syllabe et en commençant à rire un peu nerveusement. Mais qu'ont-ils besoin de nombres, petits ou grands, pour savoir si leur problème est équipro-

bable ou non ? Tu as bien vu qu'à partir du moment où ils supposaient implicitement dans leur "modèle" (comme ils disent) que le calcul qu'ils vont faire pour déterminer la probabilité du petit Blaise (comme ils disent) était le même que celui qu'ils feraient pour trouver la probabilité de Pierre, Pol ou Jacques, il était évident qu'il n'y avait plus besoin de l'effectuer. Que viennent donc faire ici les nombres, aussi grands qu'ils le désirent, alors que c'est simplement un problème de symétrie ! Tout ce que je dis, moi, c'est que si leur "modèle" est symétrique, le résultat est forcément symétrique et qu'il est bien dommage de faire un calcul alors même qu'il lui faudrait être sacrément faux pour donner autre chose que l'équiprobabilité ! »

Il était passé progressivement de sa méditation et de son agacement à une sorte de fou rire incontrôlable. Le souffle lui manquait par instants et tout son visage s'était empourpré à un point tel qu'on aurait pu croire que chaque nouveau soubresaut allait le voir se pâmer sur la table à laquelle il devait se raccrocher fébrilement. Pendant chacune des nouvelles quintes d'hilarité qui l'agitaient et l'agitaient encore, à n'en plus finir, je l'observais un peu inquiète, tout en me défendant comme je pouvais de la contagion de ce rire homérique que je ne lui avais jamais vu manifester jusqu'à présent et dont les éclats retentissent, aujourd'hui encore, dans ma mémoire. Cela dura des heures et je dois dire que je ne sais toujours pas si la cause véritable de son état était dans les considérations "didactiques" qu'il m'avait bien fallu lui infliger ou s'il riait tout simplement de l'incongruité d'un appel à des nombres si grands qu'ils lui paraissaient dépasser l'entendement...

J'étais tout de même relativement soulagée de ne pas avoir eu à m'avancer plus imprudemment dans cette "loi des grands nombres" et je profitai des jours suivants pour relire en détail le numéro qu'on m'avait prêté de votre si belle revue. Je me fis expliquer ce à quoi pouvait bien être utile le théorème d'or en philosophie et didactique du basard. On ne m'épargna aucun détail, on me fit répéter mille et mille fois les principes et leurs corollaires et ce n'est pas me vanter que de dire ici que je finis enfin, au bout de ces heures aussi agréables que studieuses, par comprendre les secrets arithmétiques de ce "fréquentisme" qui déplaisait tant à mon petit frère.

Mais il me faut cependant avouer que toutes les explications qui me furent aussi largement prodiguées en matière de "didactique" ne parvinrent jamais (malgré la patience inépuisable de mon maître) à me faire entrevoir les raisons qui voulaient que ladite méthode soit meilleure que les autres avec les enfants... Et il me suffisait d'ailleurs de penser aux réactions de Blaise pour douter sérieusement devant une pareille confiance didactique !

En désespoir de cause, mon ami songea alors à me prêter un grimoire fort précieux dans lequel je devais trouver la lumière sur toutes ces questions. C'était un ouvrage magnifique du genre de ces vieux antiphonaires à la reliure de cuir flave, savamment ouvragée, et aux feuillets de pur vélin, patinés par les doigts. Celui-là n'était d'ailleurs pas si ancien, vu la grande nouveauté des idées qui y étaient développées, mais on sentait bien que les pages en avaient été tournées et retournées pendant les interminables lectures et que la couverture commençait à souffrir d'avoir si souvent été amoureusement serrée contre soi. Mais bref ! Vous imaginez sans aucun doute mon émotion de pouvoir étreindre à mon tour cette œuvre capitale et, aussitôt que je pus bénéficier de la tranquillité nécessaire, je me plongeai dans la lecture :

> La topogenèse du savoir, dans la relation didactique, répond en synchronie à la différence des rapports au temps didactique de l'enseignant et des enseignés. *(On m'avait prévenue que le style était difficile et parfois même rebutant...)* Pourquoi désigne-t-elle comme fiction le temps didactique institué par la chronogenèse ? Parce qu'elle met en place une situation transactionnelle, qui masque le non-respect de la norme temporelle instituée par la dialectique ancien/nouveau : on va voir comment...

Vous confierai-je qu'au bout de quelques pages de cette eau-là et malgré toute ma bonne volonté je me sentis quelque peu rebutée ? Oserai-je aller jusqu'à vous confesser que je ne trouvais pas seulement cela "difficile et rebutant" mais tout uniment : alambiqué jusqu'à l'amphigourique ? Toujours est-il que mes études en didactique du hasard s'arrêtèrent presqu'aussi vite qu'elles avaient commencé et que je dus me résoudre à affronter mon chenapan de frère nantie d'un bagage impressionnant en philosophie du hasard, mais sans la moindre connaissance des plus petits arcanes de cette "didactique" à *laquelle je m'étais révélée aussi désespérément insensible. La lumière attendue se bornait pour moi, si l'on peut dire, au fugace frôlement d'aile d'un fantôme de ver luisant brusquement évadé d'un paravent de chimères...*

« Te rappelles-tu, lui dis-je un mois plus tard de ce fou rire de la Saint Jean Chrysostome où je t'avais parlé du théorème d'or ? Je pense avoir compris de quoi ils voulaient parler avec leur "loi des grands nombres"...

— « ... ? », se tut-il en me lançant un regard vaguement intrigué.

— Oui en fait, il faut bien comprendre que cela concerne les rapports entre le modèle proprement dit et la situation concrète qu'il s'agit de modéliser... »

Il ne me laissa même pas finir : « Ah bon ? Alors si on leur fait une remarque pour leur signaler qu'il n'ont pas fait leurs calculs intelligemment à l'intérieur de leur modèle, ils répliquent en revenant à la soi-disant situation concrète ? Ils feraient mieux de se demander pourquoi nous autres, frêles roseaux pensants, nous avons besoin de faire des calculs sans voir que la symétrie de la situation les rend inutiles ! Mais j'ai bien l'impression que leur "didactique" (comme ils disent) est surtout la providence du professeur pour noyer le poisson... Que diraient-ils donc si leurs élèves avaient le droit de faire comme eux ? »

J'étais un peu désarçonnée qu'il le prenne sous cet angle où je ne pouvais guère lui donner tort et qu'il revienne ainsi à mon point faible. J'essayai de le ramener au problème du hasard :

« Non, non ! Il s'agit au contraire de simplifier la vie aux élèves en introduisant les probabilités à partir des situations concrètes et de la "loi des grands nombres"... Tu vois, il semble bien que ce Jacques Bernouilli, avec son "théorème en or" ait démontré que si on répète suffisamment l'expérience, on finit par observer la probabilité véritable...

— Ils ont donc répété l'expérience ? Ils ont pris des milliers de lettres et cela des milliers de fois pour tirer une réponse au hasard et ils ont ainsi constaté que c'était équiprobable ? Tu aurais dû me le dire, j'aurais sans doute joué à chaque fois...

— Nn... non, bien sûr qu'ils n'ont pas fait l'expérience... Mais ils auraient pu la faire et ils auraient certainement constaté quelque chose...

— Mmouais ! et si je te demande ce qu'ils auraient pu constater tu vas me répondre qu'ils auraient constaté l'équiprobabilité ! Voilà bien l'art de tourner en rond des "fréquentistes" et, en plus, ils prétendent qu'ils simplifient la vie à leurs élèves. »

Autant de mauvaise volonté commençait à m'agacer un peu, mais je lui expliquai de mon mieux les principes philosophiques de la loi des grands nombres et ce qu'elle permettait : si on faisait une expérience dans laquelle le modèle postulé conduisait à penser que la probabilité de tel événement était très grande, et si l'expérience ne donnait pas cet événement, alors on pouvait légitimement parier que le modèle était faux. Ainsi, lorsque l'on avait affecté à un événement quelconque une probabilité p, le théorème d'or conduisait à penser qu'en répétant suffisamment l'expérience, on avait de grandes chances d'observer une fréquence des apparitions très proche de p ! Dès lors, si on observait autre chose, il fallait en conclure que la probabilité p, prise comme hypothèse initiale n'était pas la bonne...

« Et si la probabilité était la bonne et que le résultat ne soit pas conforme, me fit-il remarquer, qu'est-ce que cela prouve ? Ce n'est jamais qu'une question de hasard, et rien empêche un résultat très peu probable de se produire !

— Justement ! répliquai-je, c'est une question de pari : il est plus sage de changer l'hypothèse que de s'entêter dans un modèle qui exigerait la réalisation d'une expérience dont la probabilité serait dérisoire... »

J'étais assez fière de moi et de la façon dont je m'en était tirée. Il se tut pendant un long moment en méditant sur cette question de pari... Mais c'est lui qui revint à la charge quelques jours plus tard :

« Admettons, me dit-il, le raisonnement de tes fréquentistes. Je doute fort que cela clarifie les idées des élèves et que cela leur apprenne à calculer quelque probabilité que ce soit, mais ce qui me paraît intéressant au plus haut point est dans leur prémice : car ce qu'ils disent, au fond c'est que si un résultat a une très petite probabilité de se produire, alors il a très peu de chances de se produire !...

— Là je ne vois pas bien où tu veux en venir ! mais ce que tu dis me semble frappé au coin du bon sens...

— Si, si ! suis moi bien. Cela a l'air d'une évidence mais ce n'est pas le cas : il y a d'un côté le modèle qui amène à calculer une probabilité et de l'autre la réalité dans laquelle le résultat a ou non des chances de se produire. Tout leur raisonnement consiste à dire que pour être conforme à la réalité il vaut mieux parier sur un modèle dans lequel les événements très rares ont une faible probabilité de se produire.

— Il me semble que c'est de cela qu'il s'agit, concédais-je.

— Bien. Alors figure-toi que j'ai justement gagné à mon concours, dans lequel pourtant (s'il était postulé équiprobable) j'avais une probabilité infime d'être tiré parmi les milliers de cartes gagnantes. Que me faut-il donc en conclure ? Et que vont en conclure les élèves de tes fréquentistes helvetico-francs-comtois ? Comme le modèle me donnait une probabilité dérisoire de gagner et comme j'ai effectivement gagné, je dois, selon leurs principes, en conclure que ma modélisation était peu pertinente et parier de ce fait que le problème réel ne relevait pas d'une modélisation équiprobable. Je dois donc refaire mon modèle de façon à m'attribuer une probabilité nettement plus grande ! Une sorte de "bonne étoile"... ou de "grâce", si tu préfères...

Je ne trouvai quoi répondre et je ne savais pas trop s'il me cachait une partie du raisonnement légitime derrière le sourire ravi qu'il affichait, ou si c'était cette idée de "grâce" qu'il venait de découvrir et de "pari" sur cette grâce qui le plongeaient véritablement dans la félicité. Mais je ne cesse de m'interroger sur ce sujet depuis ce soir extraordinaire de la Saint Jean Chrysostome et je tenais à vous en faire part, dans l'espoir un peu intéressé, je l'avoue, que tous vos "didactologues" et philosophes du basard puissent enfin m'éclairer...

Votre dévouée

Gilberte Pascal. (8)

8 Ce courrier ne fut pas accepté pour publication par le Comité de Rédaction de la revue...

DEUXIEME PARTIE :

Gilberte Pascal consultante...

Comme on l'aura sans doute noté dans la première partie, les informations données indirectement par Gilberte au sujet de son frère tendent à montrer que celui-ci a atteint la période de sa vie à partir de laquelle il ne s'occupera plus guère de mathématiques, mais surtout de religion et de philosophie...

On remarquera d'ailleurs au passage que les divers compte-rendus effectués par Gilberte de ses discussions avec Blaise permettraient peut-être d'éclairer d'un jour nouveau les raisons véritables du virage intellectuel du grand philosophe. Mais nous laissons évidemment le soin aux historiens de creuser de telles hypothèses.

Quoi qu'il en soit, même s'il est devenu parfois difficile pour elle d'interroger son frère sur des questions dont il a perdu le goût, notre épistolière s'est trouvée souvent consultée à propos de sujets proches de celui qu'elle avait étudié avec l'aide de Blaise ou de son ami franc-comtois...

Nous relaterons ici deux épisodes de ce genre, l'un est partiellement paru dans la revue Repères, l'autre est inédit à ce jour.

A. — La vache folle et le ministre...

Au mois d'octobre 2001, le numéro 45 de la revue Repères publiait, dans sa rubrique « Point de vue », un texte de Gérard Kuntz (de l'Irem de Strasbourg) consacré à une réflexion à propos de la fiabilité des tests de dépistage de la maladie dite « de la vache folle »...

Nous reproduisons ici *in extenso* [9] ce *Point de vue* intitulé « Vache folle : probabilités, réalités et... pesanteur(s) » :

Il est rare qu'un problème économique et social d'envergure puisse être éclairé de façon décisive par le recours à des mathématiques du niveau de Terminale S. *Actuellement éditorialiste de l'Express, Claude Allègre en propose un exemple, lumineux au premier abord, qui pourrait être soumis aux élèves. Dans son* « Ephéméride » *du* n° 2591 (1 *au* 7 *mars* 2001), *il écrit :*

« Prenons pour exemple une maladie rare qui atteint, disons 1 individu sur 10000 (ce peut être le Sida ou la maladie de la vache folle). On met au point un test pour détecter si un individu est infecté par la maladie. Ce test donne des résultats fiables dans 99.9% des cas. C'est donc a priori un excellent test. Supposons à présent qu'on pratique le test sur un individu pris au hasard et que ce test soit positif. Quelle est la probabilité que l'individu ainsi testé soit effectivement infecté ? Le calcul des probabilités nous répond sans hésiter 10% (9% exactement). Autrement dit, alors que le test est positif, l'individu a 90% de chances d'être sain ! ».

9 Nous remercions Gérard Kuntz d'avoir autorisé cette réédition.

Et il poursuit : « Si dans notre exemple la maladie atteignait 1% des individus, le test positif sur un individu pris au hasard l'informerait qu'il a plus de 90% de chances d'être infecté ».

J'avoue ma stupéfaction et mon incrédulité à la première lecture. J'ai pris mon stylo et j'ai transformé le texte en arborescence avec des probabilités conditionnelles. Dans le premier cas, la probabilité d'être infecté sachant le test positif est de 9.08% !!! Dans la seconde hypothèse, cette probabilité passe à 90.98%. !!! Les résultats sont irréfutables.

Les tests sont-ils utiles ? demande Claude Allègre. Il déduit des résultats obtenus que :

« Les tests de dépistage ne sont efficaces que pour les maladies fréquentes ou les épidémies. Dans le cas des maladies rares, contrairement à ce que disent les bons esprits, (« le test n'est pas parfait, mais ça vaut mieux que rien »), il faut que les tests soient parfaits. »

« Si on applique un tel test (excellent mais imparfait) pour dépister la maladie de la vache folle et qu'on abatte les vaches testées positives, on va déclencher un massacre bovin généralisé, ruineux et inutile. »

Aucune des personnes auxquelles j'ai soumis le problème n'a eu l'intuition du résultat qu'un élève de Terminale S, armé d'un stylo et formé aux probabilités du baccalauréat, est capable de vérifier. « La connaissance scientifique est l'inverse du bon sens. Croire que l'on peut comprendre le monde avec comme seul bagage le bon sens, même appuyé sur l'intelligence, est une erreur ». *L'instrument qui défie le bon sens, infirme (même armé d'intelligence et de beaucoup d'ordinateurs) face à la réalité complexe du monde, s'appelle les Mathématiques. Le journaliste Claude Allègre rappelle ce que le ministre avait si violemment (et si stupidement) contesté...*

A y regarder de plus près cependant, l'exemple proposé n'est pas aussi limpide qu'il y paraît au premier abord. Il exige une double prise de distance : que signifie « un test fiable à 99.9% ? ». Mais alors, quelles décisions prendre si, lorsqu'on pratique les tests, on obtient les résultats décrits ?

Sans doute Monsieur Allègre considère-t-il que la probabilité d'avoir un test négatif sachant que l'animal est malade (p(N/M)) *est égale à celle* *d'avoir un test positif sachant qu'il est sain* (p(P/S)) *et que leur valeur commune est de* 0,001.

Or il n'y a aucune raison biologique pour que les deux probabilités soient égales. Il serait prudent de les distinguer. Soit $y = p(N/M)$ *et* $z = p(P/S)$. *Soit enfin x la probabilité d'être malade :* $x = p(M)$. *Ces trois nombres sont voisins de* 0 *(x car la maladie est rare, y et z car le test est réputé excellent). Le calcul fait dans ces hypothèses montre qu'à peu de choses près, la probabilité* p(M/P) *d'être malade sachant que le test est positif est de :* $\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{x}}$.

La probabilité p(M/N) *d'être malade sachant que le test est négatif est de l'ordre de xy (ce qui est une excellente nouvelle). On mesure la grande sensibilité de z/x aux variations d'ordre de grandeur de z et x, d'autant qu'il faut s'interroger sur la façon de les obtenir et sur leur fiabilité.*

Comment connaître précisément la proportion x de bêtes malades sachant que l'incubation se fait silencieusement et qu'on n'a pas de tests permettant de conclure ? Et si on se trompait d'ordre de grandeur ? Pour déterminer z faut-il abattre des bêtes réputées saines et analyser leurs tissus cérébraux, au risque d'affoler le consommateur si z n'est pas aussi négligeable qu'on le suppose ? Les choses sont loin d'être simples.

La décision liée à l'application du test (même pratiqué dans les conditions de l'exemple proposé) est loin d'être indiscutable ! La probabilité d'être testé positif est de l'ordre de 1,1 *millièmes. Sur une population de* 10000 *individus, on peut s'attendre à obtenir* 11 *tests positifs. On va donc sacrifier* 10 *bêtes probablement saines sur* 10000. *L'hécatombe annoncée est ramenée à de justes proportions. Peut-on payer ce prix pour la sécurité alimentaire de la population (et/ou sa quiétude psychologique) ? La question est d'autant plus pertinente que la probabilité d'être malade avec un test négatif est de l'ordre du dix millionième ! Le test ne laisse échapper (dans les conditions décrites) aucune vache malade (un millième de vache sur* 10000 *pour les puristes !)*.

La décision est politique et mérite débat. La science permet simplement de calculer l'ordre de grandeur du coût de la décision (abattre toutes les bêtes testées positives). A comparer avec le coût de l'analyse des tissus cérébraux de toutes les bêtes (réputées saines) abattues. La *science ne saurait trancher à la place des citoyens informés du coût de leurs décisions*

Il n'est en revanche point besoin de mathématiques pour réfuter une assertion imprudente (et fausse dans sa généralité) dans laquelle Claude Allègre s'enferre depuis de longs mois et qu'il répète dans le même éditorial :

« Tous les corps tombent dans le vide avec la même vitesse, et c'est vrai aussi dans l'air en première approximation pour des trajets de quelques mètres. Tout le monde aujourd'hui a admis cela, sauf quelques journalistes du Canard enchaîné qui, il y a deux ans évoquaient l'effet de la résistance de l'air exactement comme l'évoquaient les collègues scolastiques de Galilée opposés à sa théorie et insensibles à l'expérience. »

On retrouve la légendaire morgue et le mépris de l'ancien ministre pour tous ceux qui ne partagent pas ses avis, même clairement erronés. Il n'est évidemment pas vrai que dans l'air, même en première approximation, deux objets quelconques tombent à la même vitesse.

Voici deux ballons sphériques de même rayon, *l'un de basket, l'autre publicitaire pour enfant, gonflé à la bouche. La résistance de l'air est la même pour les deux objets. Qui croira qu'ils tombent à la même vitesse ? Qui croira qu'un parachutiste tombe à la même vitesse, parachute ouvert ou fermé ? La résistance de l'air peut être considérable selon la forme de l'objet, et conduire à un mouvement de chute uniforme (parachute ouvert), alors que l'objet de même poids (et de forme compacte) tombe de manière accélérée avec une vitesse limite très supérieure à la vitesse avec le parachute ouvert. La masse de l'objet a (et elle seule) une influence décisive dans le premier exemple.* Masse et forme jouent évidemment un rôle dans la chute des objets non ponctuels dans l'air.

Les mathématiques mettent en évidence (si on en éprouve le besoin) les paramètres pertinents de la chute des corps dans l'air. Si l'on suppose que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse (cas des vitesses pas trop importantes), à la forme de l'objet (k *est le* Cx) *et à l'aire de la projection de l'objet sur le plan perpendiculaire au déplacement* (S) *on obtient l'équation différentielle :*

$$mx''(t) + kSx'(t) - mg = 0$$

dont la solution (avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$) est :

$$x(t) = g(\frac{m}{kS})^2(e^{\frac{-kSt}{m}} - 1) + \frac{mgt}{kS}$$

Dans le cas où $\frac{kSt}{m}$ est voisin de 0 (mais alors seulement), le développement de Taylor à l'ordre 2 de $x(t)$ restitue : $x(t) = 0.5\, gt^2$.

Le paramètre pertinent est $u = \frac{kSt}{m}$. Si u est grand, le mouvement observé ne coïncidera avec le mouvement dans le vide que dans un intervalle infinitésimal, et non sur quelques mètres (10). On voit en particulier que la masse joue un rôle, comme le confirme l'expérience.

Les mathématiques peuvent éclairer certains problèmes économiques et scientifiques. Elles évitent à l'esprit honnête de répéter durant des années les mêmes erreurs. Mais elles ne peuvent rien pour qui décide d'avoir raison contre l'évidence.

Gérard Kuntz

La revue Repères reçut alors une réaction signée Gilberte Pascal, qu'elle publia dans le numéro suivant sous forme de « Point de vue », intitulé : « A propos de modélisation ». En voici le texte :

10 Prenons g = 10 et t = 1 seconde. Les distances parcourues en mètres sont 4.98 (u = 0.01), 4.84 (u = 0.1), 3.67 (u = 1), 1.6 (u = 5), 0.9 si u = 10. A comparer avec les 5 mètres parcourus dans le vide.

Le « point de vue » paru dans le numéro de septembre sous la plume de Gérard Kuntz et intitulé « *Vache folle : probabilités, réalités et... pesanteur(s)* » a certainement dû intéresser les amateurs d'exercices sur les probabilités composées, les nostalgiques de Monsieur Claude Allègre, ainsi que les passionnés de la chute des corps. Il se trouve cependant que le ton et les analyses employés par l'auteur pour convaincre de la « puissance des mathématiques » me semblent appeler quelques remarques... ([11])

Dans un premier temps, l'exemple choisi (ou le prétexte, si l'on préfère) est celui d'un test permettant de détecter une maladie rare. Le problème résonne un peu comme les bons vieux problèmes de robinets : *« Prenons pour exemple une maladie rare qui atteint, disons 1 individu sur 10000* [...]. *On met au point un test pour détecter si un individu est infecté par la maladie. Ce test donne des résultats fiables dans 99.9% des cas.* [...] *Supposons à présent qu'on pratique le test sur un individu pris au hasard et que ce test soit positif.*

Quelle est la probabilité que l'individu ainsi testé soit effectivement infecté ?... »

Grâce au calcul des probabilités, le Ministre et Gérard Kuntz répondent *« sans hésiter »* : *« ... alors que le test est positif, l'individu a 90% de chances d'être sain ! »* et tirent alors la morale de l'histoire. Chacun des deux est d'accord pour considérer que le test est « excellent mais imparfait » mais que les mathématiques viennent « d'éclairer de façon décisive un problème économique et social d'envergure ». La seule divergence qui les sépare (peut-être) est de nature « sociétale » : le Ministre pense que le risque est de *« déclencher un massacre bovin généralisé, ruineux et inutile »* alors que Gérard Kuntz pense que *« l'hécatombe annoncée est ramenée à de justes proportions. »* et se demande s'il n'est pas légitime de *« payer ce prix pour la sécurité alimentaire de la population (et/ou sa quiétude psychologique) »...*

Evidemment, mon but n'est pas de rentrer ici dans un débat pour savoir si la quiétude des populations doit ou non (re)passer par les hécatombes de l'Antiquité, ou pour savoir si Monsieur Allègre se fait une idée plus ou moins juste de la sensibilité des lecteurs de l'Express en mettant l'accent sur le côté ruineux de tels massacres. Il serait bien difficile, en tout cas, de mesurer l'impact exact d'une analyse

11 cet article doit beaucoup à mon frère Blaise.

aussi *scientifique* dans un contexte où l'on a pris l'habitude de supprimer la totalité des troupeaux présentant un seul cas de maladie et où la menace d'épidémies relativement bénignes entraîne — sans autre forme de procès — l'immolation de millions d'animaux dont le seul crime fut de brouter dans les mauvaises contrées. On peut penser, en l'occurrence, que le « pigiste » Claude Allègre doit bien nourrir sa chronique hebdomadaire d'une façon ou d'une autre et qu'il n'est donc pas indispensable d'y répondre ailleurs que dans les rubriques spécialisées...

Il me semble en revanche que certaines phrases de Gérard Kuntz comme celle-ci : *« La connaissance scientifique est l'inverse du bon sens. Croire que l'on peut comprendre le monde avec comme seul bagage le bon sens, même appuyé sur l'intelligence, est une erreur ». L'instrument qui défie le bon sens, infirme (même armé d'intelligence et de beaucoup d'ordinateurs) face à la réalité complexe du monde, s'appelle les Mathématiques. »* ou celle-là : « *La science permet simplement de calculer l'ordre de grandeur du coût de la décision* »,... énoncées à propos d'un tel exemple de « modélisation-du-monde-qui-nous-entoure » méritent qu'on s'y arrête quelques instants. Les problèmes de robinets ne s'accompagnaient pas de tant d'emphase aussi véritablement naïve que faussement utilitaire, mais il apparaît de plus en plus que l'air du temps tende précisément à essayer de nous faire croire — et tout particulièrement à propos des problèmes de probabilités et statistiques — que c'est avec de tels arguments que pourrait (ou devrait) être « sauvé » l'enseignement des mathématiques.

Bien sûr, l'auteur a partiellement ressenti le côté irréaliste d'un exercice fondé sur la notion de *« test fiable à 99.9% »*, mais il évacue la réflexion au profit d'une sorte de fiabilité « à deux vitesses » qui serait différente pour les animaux sains et les animaux malades... Le seul résultat est de renforcer le côté « probabilités composées » de la pseudo-modélisation à laquelle nous avons droit ; et tant pis pour l'élève qui aura déjà du mal avec l'inévitable « arborescence »,... tant pis pour celui qui se demandera ce que peut bien signifier un test donnant des résultats « fiables dans 99,9 % des cas »... alors que le but de l'exercice est de montrer qu'il se trompe neuf fois sur dix ! Comment l'élève pourrait-il d'ailleurs se permettre de penser que la réponse à cette question est aussi simple que celle-ci : *l'exercice n'a aucun autre sens que d'être un exercice, et il ne faut surtout pas lui chercher de signification pratique vraiment réaliste.*

La première raison à cela est particulièrement évidente : c'est qu'il n'y a en aucun cas besoin de probabilités composées (arborescentes ou non) pour avoir une idée du résultat. En effet, si le test se trompe une fois sur mille avec des animaux sains, cela revient à dire qu'il fournit dix « faux positifs » lorsqu'on le fait passer à dix-mille animaux sains ([12]), donc en y ajoutant le « vrai positif » malade que l'on a glissé parmi ces dix-mille animaux, il est clair que l'on se retrouve en face de onze « positifs » dont un seul est théoriquement malade...

On voit d'abord par là que la « fiabilité » supposée pour les animaux malades n'a d'intérêt que pour obliger le test à ne pas se tromper sur le seul animal malade testé, et on voit ensuite que le but de l'exercice n'est en fait que de « faire des calculs exacts » pour raffiner le résultat au millième près... et s'empresser de donner des valeurs approchées... Mais c'est exactement cela un exercice : *il n'a d'autre sens que d'être un exercice !*

Doit-on pour autant en conclure que « les mathématiques ont permis d'éclairer de façon décisive un problème économique et social d'envergure » ? A le proclamer sans raison, on risque fort, au contraire, de renforcer l'idée (prise cette fois au pied de la lettre) que « la connaissance scientifique est l'inverse du bon sens » ! Comment, en effet, Gérard Kuntz peut-il affirmer que le problème de la vache folle peut être « éclairé » par une analyse de cette nature ?

Qui donc connaîtrait un test « fiable dans 99,9 % des cas » et se poserait la question de savoir si cela est susceptible ou non de déclencher une *hécatombe ruineuse* ? J'ai déjà fait remarquer plus haut que personne, de toute façon, ne semble se poser ce genre de question au sujet des hécatombes, mais ce n'est évidemment pas là-dessus que je veux insister ici. La question posée est essentiellement celle qui interviendrait éventuellement à propos de l'utilisation de la « science » dans la vie des citoyens : qui peut bien disposer d'un test « fiable à 99,9 % » et quelle *signification* peut-il bien donner à cette expression ?

Il est clair en effet que celui-ci peut légitimement s'entendre demander *comment* il a mesuré cette *fiabilité*, et il est clair aussi que l'on peut se demander quel sens il peut bien y avoir à définir ainsi une notion de *fiabilité a priori*,... si ce n'est pour les besoins de l'exercice ! Car il ne s'agit pas de mettre en cause le chiffre annoncé (il pourrait tout aussi bien s'agir de 90 %, 99 % ou même de 99,999 % !)

12 c'est une méthode que je tiens d'un ami franc-comtois et fréquentiste.

mais de comprendre ce que recouvre exactement la notion invoquée en comprenant d'abord comment elle a bien pu être mesurée.

A-t-on, par exemple, fait passer 1000 fois le test à un même animal sain pour s'apercevoir que le résultat était faux une fois ? A-t-on ensuite réitéré cette expérience un assez grand nombre de fois pour conclure que la moyenne des erreurs conduisait à prévoir une probabilité de un échec sur mille ? A-t-on au contraire choisi n fois 1000 animaux sains (et comment ?...) pour s'apercevoir que l'on avait n erreurs de test ?... A-t-on fait une « modélisation » théorique qui a permis d'obtenir le résultat sans même pratiquer l'expérience ?...

Je laisse au lecteur le soin d'inventer toutes les procédures susceptibles de lui plaire, et je lui fais même grâce (il l'aura sans doute remarqué) de la mesure de fiabilité pour les animaux malades !

On aura deviné sans peine que cette fameuse fiabilité est avant tout inventée pour les besoins de la cause, que cette cause soit un exercice, un éditorial de Ministre ou un point de vue dans Repères... Car la vraie question de l'échec du test est essentiellement de savoir *à quoi tient concrètement un résultat erroné* : s'agit-il d'une *erreur de manipulation* au laboratoire ou s'agit-il d'une *raison biologique* tenant à l'animal testé ?

Dans le premier cas, il est naturel de penser que le simple fait de *refaire passer* le test ne laisse pratiquement aucune chance de se tromper une deuxième fois : on pourrait donc dire que le test est « parfait » (du moins en ce qui concerne les animaux sains) puisque les faux-positifs seront éliminés à la seconde passation. Dans le second cas, l'explication tient à la biologie elle-même. C'est-à-dire que le test recherche en réalité un caractère biologique dont la possession est obligatoire pour être malade, mais qui ne suffit pas à caractériser la maladie. En d'autres termes, on a affaire à des *positifs-sains* parce que l'on n'a pas prise sur des caractères possédés exclusivement par les malades et que l'on est amené à détecter une population un peu plus grosse...

Mais alors *ou bien* le test est parfait (pour les animaux sains) parce que les échecs sont de nature « aléatoire », *ou bien* il va présenter un taux d'échec irréductible qui tient essentiellement au pourcentage d'animaux qui portent le caractère testé par rapport, d'une part à la population ambiante (ici : un millième) et d'autre part à la population malade (ici : dix positifs-sains pour un malade)...

Dès lors, à qui fera-t-on croire que la « fiabilité » ait pu un seul instant être considérée comme *envisagée a priori* alors qu'elle s'avère (et de façon incontournable) comme *constatée a posteriori* ? L'exemple choisi par le Ministre est donc parfaitement artificiel. Il convient sans doute aux lecteurs de l'Express et c'est, si l'on veut, le prétexte à un exercice qui en vaut bien d'autres... mais on voit mal la raison pour laquelle Gérard Kuntz tient à en faire l'emblème d'une modélisation qui prouverait que les mathématiques ont une influence aussi artificielle sur les problèmes de société !

Il faut donc le constater : l'intrusion « tellurique » dans l'éducation nationale du Ministre Claude Allègre aura non seulement laissé des traces pendant son passage, mais elle provoque encore aujourd'hui des « répliques » lorsque des sujets sensibles apparaissent au détour de quelque rubrique journalistique. Cela ne serait qu'un phénomène plutôt amusant à observer s'il ne traduisait en réalité une profonde déstabilisation de l'enseignement même des mathématiques : que tente de faire d'autre Gérard Kuntz que de « venger » les mathématiques des attaques du physicien Claude Allègre qui les avait mises en demeure de justifier de leur existence ?

Pris à contre-pied, d'une certaine manière, par l'exemple des probabilités sur lequel il est d'accord avec le chroniqueur de l'Express, il s'ingénie alors (dans un deuxième temps) à revenir chicaner le Ministre sur sa fameuse phrase :

« Tous les corps tombent dans le vide avec la même vitesse, et c'est vrai aussi dans l'air en première approximation pour des trajets de quelques mètres. »

Pensant (ou faisant semblant de croire) que les physiciens n'ont jamais remarqué que les plumes, les feuilles de papier, les ballons de baudruche et tous les corps qui « volent » sont susceptibles de ne pas tomber à la même vitesse que les autres, Gérard Kuntz entreprend de prouver à Claude Allègre qu'il a bel et bien tort d'avoir oublié tous ces cas...

Las ! C'est alors le mathématicien (désespérément brouillé avec la notion de modélisation ?...) qui donne l'impression qu'il va « établir une démonstration » de tous les phénomènes litigieux sous le prétexte qu'il fait appel à une « équation mathématique » !...

Et si chacun restait plutôt à sa place ?

Gilberte Pascal

B. — Le problème du jeu de franc-carreau...

Fin 2003, l'Irem d'Aquitaine publiait un fascicule d'activités destinées au lycée et consacrées aux probabilités sous le titre : « L'esprit des lois continues » (13).

Nous nous intéressons ici au passage dans lequel les auteurs reprennent le célèbre problème de Buffon sur le jeu de franc-carreau, et nous nous attachons plus précisément au paragraphe 2.4. intitulé : « Des modèles implicites ? ».

Les auteurs ne nous ayant pas accordé l'autorisation de reproduire le passage concerné, nous résumons ici les passages importants pour la discussion et nous renvoyons le lecteur à la publication originale pour le texte complet...

B. 1. — Les pièces du dossier.

Le problème original auquel s'intéressa Buffon était celui-ci (14) :

« Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau ; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire qu'il couvrira un des joints qui les séparent ; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande les sorts de chacun de ces joueurs. »

---

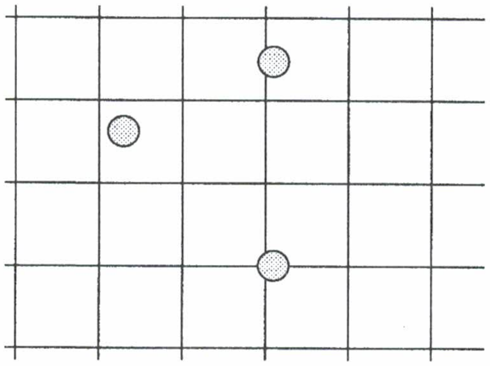
13 La publication est intitulée : *L'esprit des lois continues. Enseignement des probabilités au lycée.* ISBN 2-85665-10-2003. Les auteurs sont : BARBAZO Eric, BOUSCASSE Jean-Marie, POMES Roland, PUYOU Michel, TERRACHER Pierre-Henri. La préface est signée Claudine ROBERT.

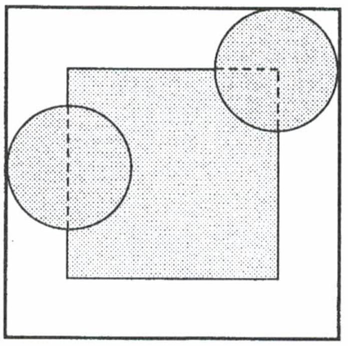
14 Voir par exemple : « LA MEMOIRE DES NOMBRES » (actes du Colloque de la Commission Inter-Irem d'Epistémologie et d'Histoire des Mathématiques de Cherbourg), l'article de Frédéric METIN.

Sans chercher à déterminer vraiment toutes les probabilités en question, il calcula notamment celle d'obtenir « franc-carreau » avec des carrelages réguliers de diverses formes. Comme les auteurs de l'Irem de Bordeaux, nous nous limiterons à cette même probabilité dans le cas d'un carrelage formé de pavés carrés.

Voici le raisonnement de Buffon :

> « *Je cherche d'abord le sort du premier joueur & du second ; pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux une figure semblable, éloignée des côtés du carreau de la longueur du demi-diamètre de l'écu ; le sort du premier joueur sera à celui du second, comme la superficie de la couronne circonscrite est à la superficie de la figure inscrite ; cela peut se démontrer aisément, car tant que le centre de l'écu est dans la figure inscrite, cet écu ne peut être que sur un seul carreau, puisque par construction cette figure inscrite est partout éloignée du contour du carreau d'une distance égale au rayon de l'écu ; & au contraire dès que le centre de l'écu tombe au dehors de la figure inscrite, l'écu est nécessairement sur deux ou plusieurs carreaux. Puisque alors son rayon est plus grand que la distance du contour de cette figure inscrite au contour du carreau ; or, tous les points où peut tomber ce centre de l'écu sont représentés dans le premier cas par la superficie de la couronne qui fait le reste du carreau ; donc le sort du premier joueur est au sort du second, comme cette première superficie est à la seconde, ainsi pour rendre égal le sort de ces deux joueurs, il faut que la superficie de la figure inscrite, soit égale à celle de la couronne, ou ce qui est la même chose, qu'elle soit la moitié de la surface totale du carreau.* » [15]

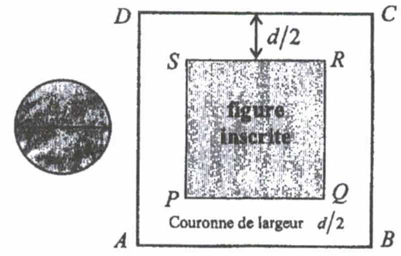




15 Les figures ne sont pas dans le texte de Buffon.

Jugeant d'abord « amphigouriques » les explications de Buffon pour justifier la condition géométrique précédente, les auteurs commencent par apporter les éclaircissements indispensables :

> « La pièce de diamètre d se trouve à franc-carreau dans le carré ABCD, si et seulement si son centre est à l'intérieur du carré PQRS obtenu après suppression dans le carré ABCD de la bordure (ou couronne) de largeur $d/2$; c'est, on ne peut plus clair. »



Puis ils critiquent les hypothèses probabilistes de Buffon :

> « Par son extraordinaire capacité d'ajustement de la réalité à ses désirs, BUFFON nous fait prendre pour argent comptant deux positions qui pour le moins méritent d'être examinées de plus près :
>
> 1. *Le modèle uniforme sur un carreau. Il considère que la position du centre de la pièce dans un carreau suit une distribution uniforme dans ce carreau, puisque, selon lui, c'est le rapport des superficies (aires) qui va sceller le sort de chaque joueur.* [...]
>
> 2. " *Un carreau suffit* ". C'est un tour de passe-passe pratiqué par la quasi-totalité des auteurs préoccupés du problème : chacun s'accorde à considérer comme allant de soi que la probabilité de franc-carreau *sur tout le carrelage* est calculée par celle de franc-carreau *sur un carreau.* »

Et s'intéressent alors à deux choix de modélisation. Un premier modèle, dit « du damier uniforme », consiste à considérer une densité constante sur tout le carrelage ; il en découle évidemment (et très aisément) le résultat obtenu par Buffon. Un deuxième modèle, dit « du carreau uniforme » semble nécessiter des calculs beaucoup plus sophistiqués :

> « Cette fois, l'hypothèse est faite que, *quel que soit le carreau dans lequel vient s'immobiliser le centre de la pièce, la position de ce dernier suit la distribution uniforme du carreau.* »

Ce qui signifie que les auteurs considèrent désormais que l'action du joueur revient à choisir d'abord « au hasard » un carreau avec une certaine distribution de probabilité $(p_n)_{n \geq 1}$, puis — une fois ce carreau fixé — à effectuer sur celui-ci un lancer obéissant à une loi de probabilité de densité uniforme... [16]

Une page de calculs plus tard, le résultat est évidemment le même que celui obtenu par Buffon... Il reste aux auteurs à comparer leurs deux modèles :

> « *Comparaison de deux modèles*
>
> Il est immédiat que le modèle du « damier uniforme » implique que la distribution du centre de la pièce dans chaque carreau du damier est celle de la loi uniforme ; il ne l'est pas moins que la réciproque est fausse (un contre-exemple est facile à bâtir). »

puis à les confronter aux résultats expérimentaux :

> « *Confrontation modèle - résultats expérimentaux*
>
> Une feuille de format A_2 pavée de 160 carreaux (16 × 1O) de 4 cm de côté et une pièce de 5 Euros (diamètre : 2 cm) nous ont permis d'engager l'expérience à peu de frais, selon *le protocole expérimental* suivant :
> — la « feuille A_2 » est étalée sur le bureau et le lanceur confortablement assis devant la feuille ;
> — lorsque le centre de la pièce sort du damier des 160 carreaux, le « coup » est annulé ;
> — 1000 lancers valides de la pièce de 5 Euros sont effectués ;
> — 6 séries de 1000 lancers sont réalisées par 6 volontaires. »

Les résultats obtenus sont : 26,2 %, 26,1 %, 26,7% , 24,1 %, 27% et 23,8 % dans une situation où les trois modèles donnent une valeur théorique de 25 %. Et les auteurs remarquent :

> « Notons qu'avec [la] seconde modélisation *il n'est pas " idiot " (bien au contraire) d'additionner les résultats obtenus* : ce qui donne 1539 positions de franc-carreau sur 6000 lancers. En effet, si la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ varie d'un lanceur à un autre, ceci est sans importance, puisque nous avons vu que p était indépendant de la suite $(p_n)_{n \geq 1}$. »

avant de parachever leur étude :

16 En d'autres termes : si les probabilités (p_n) sont distinctes la loi du lanceur a une densité discontinue sur le carrelage, mais uniforme sur chacun des carreaux.

« Adoptée par BUFFON et bien d'autres, la démarche chronologiquement décrite par :

Étape 1 : on ramène le problème de franc-carreau à un seul carreau ;

Étape 2 : on adopte tel modèle probabiliste sur un carreau (loi uniforme par exemple).

véhicule implicitement l'idée que l'étape 1 relève de la seule simplification de la situation à l'étude, *alors qu'elle s'inscrit pleinement dans le processus de modélisation probabiliste*, via la propriété de conditionnement : « [la probabilité sur chaque carreau] ne dépend pas de n ».

et de conclure :

Séduisant et subtil, ce tour de passe-passe ne saurait être mis tel quel dans des mains inexpertes, n'est-ce pas ?

[...] Le problème de Franc-Carreau semble faire une jolie carrière (star-system oblige ?). Pourtant, l'autopsie (volontairement) scrupuleuse que nous venons de pratiquer nous laisse circonspects quant à sa pertinence didactique :

— il ne peut s'agir d'un exemple « simple » de problème de modélisation, ne serait-ce que parce que le modèle implicite d'uniformité (sur tout le carrelage) largement sous-tendu par l'idée que nous nous faisons du protocole expérimental ne se développe pas comme prévu par la plupart de ses promoteurs (sauf à ne pas y regarder de près) ;

— à moins d'esquiver ce raisonnement délicat et ambigu qui permet de se ramenar à un seul carreau, nous avons du mal à voir dans ce problème une situation propice à l'introduction des lois uniformes.

Bref, exemple tout à fait édifiant à bien des égards. »

Ceci clôt le passage du fascicule consacré au jeu de franc-carreau. Notons encore que la préface de cette même brochure revient partiellement sur la question. Voici deuxextraits du passage concerné :

[...] La tradition consiste le plus souvent à dire que le centre du palet arrive sur un des N carrés du quadrillage selon une loi uniforme, mais on reste très évasif sur le pourquoi de cette loi uniforme et sur ce qui se passe plus globalement. Le problème du Franc-Carreau est repris ici, plus globalement et les auteurs montrent que si on note p_i la probabilité, pour un lanceur donné, que le centre du palet arrive dans le carreau i, alors si on suppose que, pour tout $i = 1, ..., N$, la loi conditionnelle sur le carreau i est uniforme, alors pour toute loi $(p_1, \ldots, p_N)$, la probabilité p que le palet ne rencontre pas la frontière d'un carreau vaut $((c-d)/c)^2$, où c est la longueur des côtés des carrés du quadrillage. Autrement dit, cette probabilité p ne dépend pas de $(p_1, \ldots, p_N)$. [...]

et l'auteur(e) propose une amélioration :

Mais allons un peu plus loin, au plan de la modélisation et de la statistique. D'abord, pourquoi considérer des lois conditionnelles uniformes ? Et est-il raisonnable de choisir un modèle $(p_1, \ldots, p_N)$ à $N-1$ paramètres (qui ne tient pas compte des liens entre les paramètres : si un carré a une forte probabilité d'être atteint, ses voisins aussi et plus on s'approche du bord, plus les probabilités sont faibles). En fait, pour modéliser la situation de lancer du palet, on va considérer que le centre du palet arrive sur la surface suivant une loi de probabilité continue P de densité f où f dépend du lanceur, mais pas du quadrillage [...] ; la probabilité p_i sera ici l'intégrale de la densité f sur le carreau i ; on suppose alors que les carreaux sont *suffisamment petits* pour pouvoir considérer que sur chaque carreau, la densité f est constante : ce qui revient à approcher la loi conditionnelle sur chaque carré par la loi uniforme. [...]

B. 2. — Une première réaction de Jean-Pierre Ferrier

Après la lecture des pages qui précèdent, Jean-Pierre Ferrier (Directeur de l'Irem de Lorraine) rédigea une analyse critique de la méthode employée pour résoudre le problème de Buffon [17]. *En voici le texte :*

17 L'essentiel du texte qui suit a été transmis aux auteurs (qui n'ont pas souhaité répondre sur le fond) et aussi à Gilberte Pascal dont Jean-Pierre Ferrier souhaitait connaître l'avis (ainsi que, si possible, celui de son frère...). La réponse de Gilberte Pascal est donnée plus loin.

Une autre analyse du jeu de franc-carreau

J.-P. Ferrier, Irem de Lorraine

Cherchons d'abord à simplifier les choses. Si l'on se tient vers le milieu d'une grande chambre pour jeter l'écu, autant la supposer sans limites. On se placera donc dans la situation idéale d'un carrelage infini.

Cependant cela n'a pas de sens de choisir un point — le centre de l'écu — au hasard dans le plan. Ce faisant on fait l'hypothèse implicite d'une invariance, à savoir l'invariance par translation. Or il ne peut exister dans le plan — comme déjà sur la droite — de loi invariante par translation ; il existe une seule mesure non nulle invariante, à un facteur près, et elle est de masse totale infinie.

Représentons la chambre par le plan $\mathbf{R}^2$ et le carrelage par le réseau $\mathbf{Z}^2$. Comme les translations entières n'affectent pas l'événement considéré, au lieu de chercher une mesure invariante sur le groupe $\mathbf{R}^2$ lui-même, nous allons en chercher une sur le quotient $\mathbf{R}^2 / \mathbf{Z}^2 = (\mathbf{R} / \mathbf{Z})^2$. Il est alors facile de vérifier qu'il existe une loi de probabilités invariante et une seule. C'est la mesure $dxdy$, c'est-à-dire l'aire usuelle, ou encore la loi uniforme. Le quotient est un tore, mais on peut sans inconvénient l'assimiler à un carreau, car il est improbable que le centre tombe sur les bords.

On peut donner de cette présentation une version moins pédante. Choisissons une fois pour toutes un carreau. Imaginons qu'après chaque lancer un petit robot ramène le centre par des transations entières dans ledit carreau, sachant que le cas d'une indétermination est improbable. Cette opération ne change pas le résultat. On peut donc se ramener à un seul carreau.

Noter que l'idée de l'invariance par l'action d'un groupe est générale. Elle a été pointée il y a longtemps déjà par Jean-Louis Ovaert. Dans les problèmes géométriques, il s'agit du groupe des déplacements. Il n'existe évidemment pas de loi invariante sur ce groupe. Aussi se place-t-on, quand on le peut, sur un espace homogène compact, quotient du groupe par un de ses sous-groupes. C'est possible pour le jeu considéré, mais partir du groupe des déplacements du plan donne un modèle inutilement plus compliqué. Comme l'écu est circulaire, on peut se contenter des translations. C'est ce qu'on a fait.

Maintenant on a dit que, dans une chambre assez grande, le joueur lançait près du centre. Cela semble contredire le fait qu'il lance l'écu au hasard. Pour en avoir le cœur net, prenons un exemple simple, celui d'un joueur dont le lancer est modélisé par une densité gaussienne g_σ centrée à l'origine, supposée être aussi vers le milieu de la chambre, et d'écart-type σ. Tant que σ n'est pas trop grand, on peut supposer la chambre infinie. La probabilité que l'écu rencontre les murs de la chambre est en effet très faible. On obtient la loi sur le tore en sommant sur les translations entières. Elle est ainsi donnée par :

$$h(z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^2} g_\sigma(z+m)\,.$$

Une telle somme s'évalue aisément, grâce à la formule sommatoire de Poisson, comme étant :

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}^2} e^{2\pi i\,\mu . z}\,\hat{g}_\sigma(\mu)$$

où

$$\hat{g}_\sigma(\zeta) = \hat{g}_1(\sigma\zeta) = e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2} . e^{-2\pi^2\sigma^2\eta^2}$$

si $\zeta = (\xi, \eta)$. La série double commence par la constante 1. Ensuite viennent quatre termes qui sont de l'ordre de

$$e^{-2\pi^2\sigma^2}$$

et qui permettent d'apprécier l'écart par rapport à la loi uniforme, vu la rapidité de convergence de la série. Or dès que $\sigma = 1$, on obtient une valeur ridiculement petite. Pour $\sigma = 1/2$, déjà, c'est de l'ordre du centième.

Evidemment le choix d'une loi gaussienne peut paraître artificiel. On l'accordera volontiers, même si l'accumulation des incertitudes a tendance à produire, par convolutions successives, une loi plus ou moins gaussienne. Cependant on n'a fait ce choix que pour apprécier le rôle de la dispersion. Or le résultat est surprenant. Il n'est pas nécessaire que les carreaux soient suffisamment petits en comparaison de l'écart-type. Il suffit qu'ils soient du même ordre. Il serait donc étonnant qu'une expérience réelle puisse déceler quoi que ce soit de non uniforme.

Maintenant un calcul élémentaire montrerait un phénomène analogue, à défaut d'être aussi spectaculaire, pour une densité suffisamment régulière, de classe C^2 ou C^3 avec des majorations convenables. Ici j'atteins les limites de ma compétence. Que signifie, pour un statisticien, une densité régulière? Je l'ignore.

Ce qu'il y a de remarquable dans ce jeu est que l'on obtienne une loi presque uniforme en moyennant des lois qui sont tout sauf uniformes. Si l'on regarde par exemple la loi gaussienne conditionnée au fait que le centre de l'écu atteigne un carreau donné assez loin du centre, on trouvera une densité vraiment très pentue. Surtout, l'écart de la loi moyennée avec une loi uniforme est considérablement plus petit que les variations de la densité initiale en jeu.

Passons maintenant au cas d'une chambre de dimensions vraiment réduites, qu'on représenterait par un damier 7×7, en gardant notre joueur gaussien centré avec le damier. Puisque les gaussiennes se scindent, on peut travailler en une seule dimension, sur les sept intervalles de longueur 1 qui constituent le segment $[-7/2\,,\,7/2]$. Si l'on élimine les lancers pour lesquels le centre tombe à l'extérieur, la sommation se limite à

$$\sum_{-3\,\leq m\,\leq 3} g_\sigma(x+m)\,.$$

à considérer dans $[-1/2\,,\,1/2]$. Il faudrait encore normaliser, à cause des coups nuls, mais c'est sans importance puisqu'il s'agit d'apprécier seulement l'uniformité.

En fait il s'agit de calculer

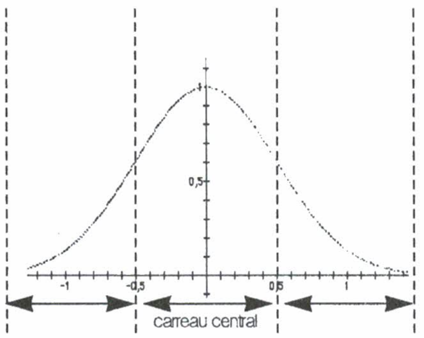
$$\sum_{-3\,\leq m\,\leq 3} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+m}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{sur } [-1/2\,,\,1/2]\,.$$

La petite calculette graphique du Macintosh s'en acquitte à merveille.

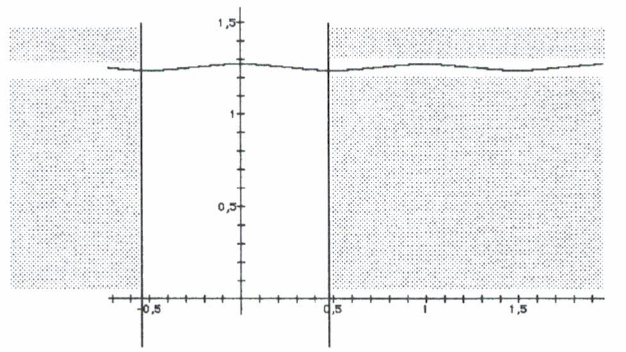
Commençons par le cas où l'écart-type est réduit, et où les coups nuls sont donc peu fréquents...

Voici ce qu'on obtient pour $\sigma = 1/2$, $\sigma = 1/\sqrt{2}$ et $\sigma = 1$. Les graphiques sont à lire entre $-1/2$ et $1/2$. On a fait figurer le défaut d'uniformité δ , qu'il faudra doubler pour tenir compte des deux dimensions.

• $\sigma = 1/2$, $\delta = \pm 1{,}4.10^{-3}$

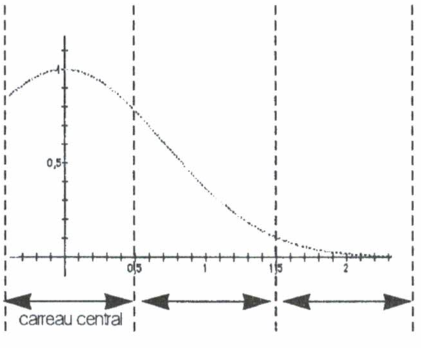


loi du lancer sur le carrelage

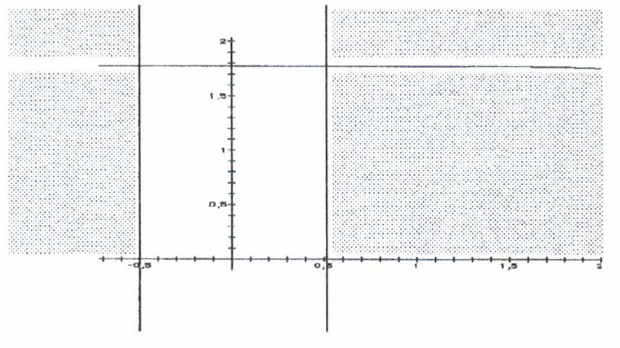


loi ramenée à un seul carreau

• $\sigma = 1/\sqrt{2}$, $\delta = \pm 10^{-4}$

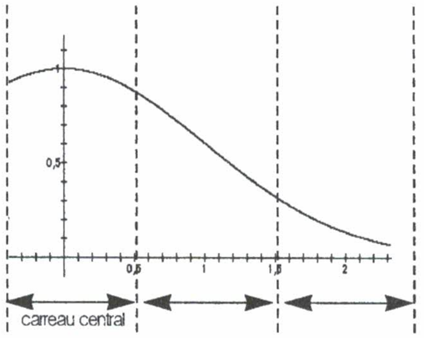


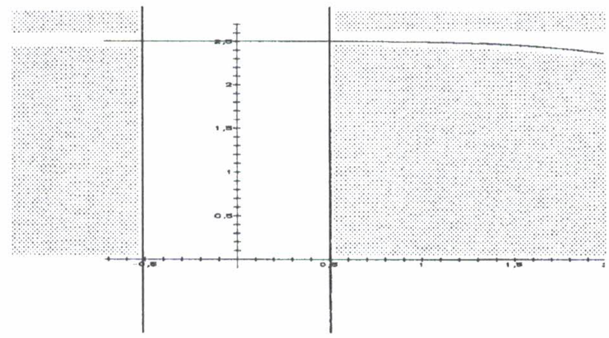
loi du lancer sur le carrelage



loi ramenée à un seul carreau

• $\sigma = 1 \, , \, \delta = \pm \, 3.10^{-4}$



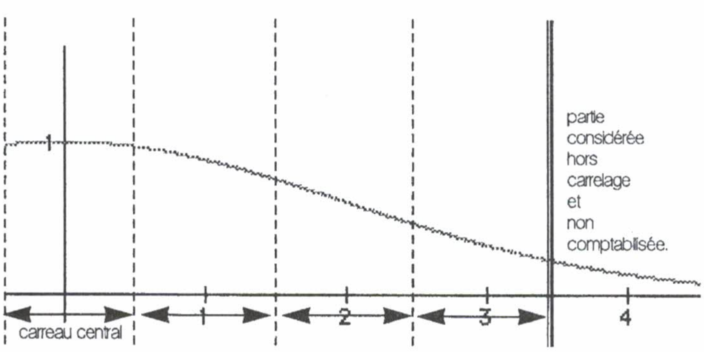


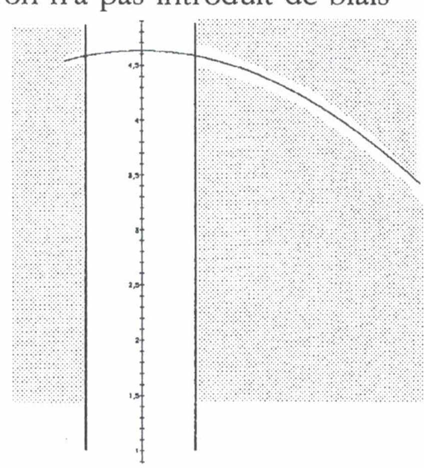
loi du lancer sur le carrelage *loi ramenée à un seul carreau*

Avec le plus petit écart-type, on note une ondulation sensible, même si elle reste de faible amplitude. Avec les deux plus grands, aucun défaut n'est visible.

Passons au cas d'un écart-type un peu plus grand encore, par exemple $\sigma = 2$. Un défaut d'uniformité sensible apparaît maintenant. Il s'explique parce que l'élimination des lancers dont le centre est en dehors du damier élimine d'abord des cas où l'écu coupe les joints du carrelage. Aussi toute expérience devrait-elle noter le nombre de lancers éliminés, pour savoir si l'on n'a pas introduit de biais avec le protocole d'élimination.

• $\sigma = 2 \, , \, \delta = \pm \, 0{,}5.10^{-2}$





loi du lancer sur le carrelage *loi ramenée à un seul carreau*

B. 3. — La réponse de Gilberte Pascal

En réponse à sa lettre, Jean-Pierre Ferrier reçut le texte suivant :

Gilberte Pascal

à

Monsieur Jean-Pierre Ferrier

Directeur de l'Irem de Lorraine

Cher Monsieur Ferrier, J'ai bien reçu votre dernier envoi contenant la brochure sur les probabilités éditée récemment par l'Institut aquitain. Ce texte m'a beaucoup intéressée (ainsi que votre critique argumentée) et je vous en remercie infiniment, d'autant que vous me faites le bien trop grand honneur de solliciter mon avis sur la question du jeu de franc-carreau.

Je dois d'abord vous dire qu'un ami franc-comtois m'avait déjà fait connaître le célèbre et magnifique texte de Monsieur de Buffon sur ce sujet et que je l'avais communiqué à mon frère Blaise dans l'espoir d'obtenir ses réactions. C'était à l'époque désormais lointaine où celui-ci s'intéressait encore un peu aux choses mathématiques et je comptais bien profiter de sa hauteur de vue et de sa lucidité exceptionnelles pour recueillir quelques éclaircissement sur un ou deux points qui m'échappaient. Ses commentaires ne m'avaient guère surprise. Dans un premier mouvement, devançant quasiment la lecture, il sembla emballé par la nouveauté et la hardiesse de l'analyse, reprenant lui-même les étapes des calculs ou des raisonnements, m'apportant au passage les explications nécessaires sur les subtilités qui m'avaient rebutée, s'émerveillant de l'usage que faisait l'auteur des belles propriétés qu'il avait lui-même jadis démontrées à propos de la courbe appelée *roulette*, que vous nommez aujourd'hui, il me semble, *cycloïde*... Ensuite, dans un deuxième temps, et comme à son habitude hélas, il ne se mit plus qu'à chercher la critique et à rassembler les griefs les plus artificiels vis-à-vis de l'auteur : ici une erreur de calcul, là une affirmation insuffisamment étayée, ici encore un passage soi-disant amphigourique, etc., etc.

Il vivait certainement assez mal, en l'occurrence, le fait qu'à vingt-six ans le jeune Monsieur de Buffon venait d'accomplir un pas énorme dans la Géométrie du Hasard et qu'il n'avait plus rien à envier à l'œuvre de mon frère sur ce genre de sujet... Comme de coutume, j'analysai donc ces réactions injustes (qui passeraient chez quiconque pour une simple marque de pignouflisme) comme la conséquence de cette forme de jalousie qui anime très fréquemment les grands génies intellectuels. Mais j'ajouterai que, pour ma part, je ne trouvais nullement « amphigourique » telle démonstration parfaitement limpide et rigoureuse du fait que le centre de l'écu devait se trouver dans telle partie du carreau (à moins de trouver plus virtuose une explication du genre : « c'est on ne peut plus clair. »), pas plus que je ne trouvais véritablement déplacé d'écrire que le choix du modèle uniforme n'avait besoin, pour être « pleinement démontré, que d'être bien entendu »... A moins de considérer que la rhétorique aura fait un progrès substantiel lorsque l'on se contentera de dire la même chose en déclarant : « convenons que la probabilité mise en jeu suive une loi uniforme » !

Mais revenons à la publication que vous m'avez envoyée.

Vous l'avez sans doute déjà pressenti : ma première impression est que les auteurs ont indéniablement une curieuse attitude vis-à-vis de l'histoire des sciences et, probablement même, vis-à-vis de toute pensée qui sorte un peu de leurs habitudes langagières. Cela n'a peut-être pas une grande importance sur le plan du contenu mathématique, mais j'avoue que cela me gêne toujours en matière de formation, qu'il s'agisse de celle des enfants ou de celle des professeurs auxquels le fascicule se prétend destiné. Cela étant, je dois convenir aussitôt que certains passages m'ont paru dignes d'intérêt, et tout particulièrement, en effet, celui de la modélisation du jeu de franc-carreau sur lequel vous aviez eu l'obligeance d'attirer mon attention... Il est évidemment inutile que je reprenne ici les détails du problème et de ses diverses difficultés ; il me semble en vérité que ce sont ces difficultés mêmes qui caractérisent le problème et que l'on ne peut guère être en désaccord avec les auteurs lorsqu'ils concluent que le niveau d'analyse atteint par leur étude exige avant tout d'être épargné aux élèves ! J'en prendrai pour preuve, personnellement, deux aspects essentiels dont la discussion me semble particulièrement intéressante compte tenu de la mode actuelle : celui de la recherche d'un « modèle » et celui de la « simulation »...

1) A propos de « modélisation »...

Dans un premier temps les auteurs signalent le « modèle de Buffon » (lequel se ramène trop cavalièrement à leur goût à un seul carreau) et proposent comme amélioration possible deux autres modèles : d'abord celui dit du « damier uniforme », puis celui dit du « carreau uniforme ».

Apparemment (je veux dire au seul prix d'une banale simplification de fraction) nul ne saurait douter que le « modèle de Buffon » n'est rien d'autre que le *modèle uniforme*. Le ton condescendant adopté par les auteurs tend d'ailleurs à faire oublier que Monsieur de Buffon n'était nullement en train de « modéliser », mais qu'il était rien moins qu'en train *d'inventer un principe de modélisation* d'une puissance inconnue jusqu'alors ! Et qui fait le sujet même de notre fascicule : la notion de *loi continue*... Excusez du peu et voyons ce que nos modélisateurs professionnels sont capables d'apporter, aujourd'hui, à la méthode artisanale de jadis !

Pour nous montrer que la simplification du problème au cas d'un carreau ne doit pas être un *jeu de passe-passe* mais qu'elle doit « *s'inscrire pleinement dans le processus de modélisation probabiliste* », ils ne nous épargnent ni les *familles au plus dénombrables* de carreaux, ni la *mesure de Lebesgue*, ni une kyrielle de notations savantes, ni... un calcul de trois lignes dont la difficulté principale réside dans la mise en facteur de « p » dans une sommation particulièrement élémentaire ! Pas d'amphigouri donc (encore que...), mais pas non plus la moindre explication justifiant les hypothèses admises : pourquoi, et comment, s'autoriser les *probabilités* *discontinues* ? pourquoi supposer les lois conditionnelles *uniformes* sur chacun des carreaux ? La rédactrice de la préface a dû ressentir ces manques évidents. Peut-être même a-t-elle eu (elle aussi) cette impression que l'on se contente surtout, en définitive, de « rouler des mécaniques » : on assène des affirmations péremptoires que l'on aurait bien du mal à rendre convaincantes une fois dégagées du fatras de formalisme pédant derrière lequel elles sont avancées.

Il faudra donc au lecteur se souvenir de cette préface pour découvrir un fil conducteur à la démarche (*loi globale propre au lanceur* et *approximation localement uniforme*) ainsi que quelques contraintes naturelles qui demandent à être prise en compte pour que le modèle soit réaliste (carreaux *suffisamment petits*).

J'avoue d'ailleurs au passage ne pas très bien comprendre cette nécessité apparente d'approcher une loi continue par une loi discontinue... On comprend bien le fond de l'affaire : « pourquoi ne pas approcher par une loi *localement uniforme*... puisque c'est là-dessus que l'on veut terminer... ». Mais cela présente cependant deux inconvénients majeurs qui ne sont pas surmontés :

a) d'abord est-il bien logique de trouver plus intéressante, à la fin, une densité discontinue, alors que c'était précisément pour éviter l'arbitraire des (p_n) d'un carreau à l'autre que l'on s'était efforcé de démarrer l'explication en introduisant une loi continue ?...

b) ensuite la légitimation repose uniquement sur une invocation des mots magiques *approximation* et *suffisamment petit*, alors que le moins que l'on puisse attendre d'un « professionnel moderne » consisterait précisément dans le moyen d'expliciter, non seulement du type de *petitesse* requise, mais aussi la nature précise de la *distance* retenue ainsi que sa justification par rapport au problème posé...

Bref, il est clair que la difficulté est effectivement de concilier l'introduction d'une *loi du lancer* qui se doit d'être une loi continue (et pourrait bien être, *in fine*, une loi normale...), avec l'idée d'atteindre de manière assez naturelle un résultat uniforme par rapport à la géométrie des carreaux. Mais les auteurs ont beau faire. D'une part le passage à une loi discontinue laisse véritablement l'impression d'un *tour de passe-passe* qui ne correspond à aucune légitimité physique : comment croire un seul instant qu'en restreignant la loi sur une petite portion qui aurait le mauvais goût d'être à cheval sur deux carreaux, on doive avoir plus de chance de tomber d'un côté du joint plutôt que de l'autre ? D'autre part, faute en tout cas d'explications complémentaires, on voit mal ce qui, *intrinsèquement*, pourrait justifier une *approximation localement uniforme* : d'abord (comme vous l'avez remarqué) les restrictions d'une loi (qui serait par exemple normale) aux divers carreaux peuvent être très loin de la loi uniforme, et ensuite il est difficile de ne pas penser que — par exemple pour la norme L^1 qui semblerait naturelle ici — il est possible de trouver une foule d'approximations qui seront *plus proches* que l'approximation en escalier tant convoitée... mais qui seront modelées sur des lois non uniformes sur chacun des carreaux !

Pour tout vous dire, c'est ce problème (en liaison avec le choix de Monsieur de Buffon de ramener le problème à un seul carreau) qui m'avait posé d'énormes difficultés et que les lumières de mon frère m'avaient aidée à surmonter lors de l'épisode que j'évoquais au début de cette lettre. Je tâcherai de vous résumer plus loin les grandes lignes de ses explications mais j'en reste là pour le moment sur la question de la mise au point théorique du modèle...

2) A propos de « simulation »...

Une fois dotés des deux fameux « modèles » déjà évoqués, les auteurs nous décrivent une expérimentation intéressante à propos de laquelle je voudrais à mon tour solliciter votre avis. Il me semble en effet qu'elle invite à se poser un certain nombre de questions auxquelles vous avez déjà réfléchi sur un plan plus général, alors que je les découvre personnellement à l'occasion de cette lecture.

La première interrogation qui n'a pas manqué de me toucher est celle-ci : *à quoi pouvait bien servir d'obliger six personnes à lancer chacune au moins mille fois une pièce sur une feuille de papier quadrillé ?* J'ai cru comprendre qu'il ne s'agissait pas là de la mise au point d'un châtiment particulièrement cruel destiné aux élèves dissipés, mais j'avoue que je saisis encore assez mal le but d'une telle expérience.

En effet, les auteurs disposent donc de deux *modèles* (voire trois, s'ils ne renient pas celui de Buffon) qui, en tout état de cause, leur donnent le même pronostic, c'est-à-dire un taux de 25% de réussite. Ils n'attendent donc pas de l'expérience un verdict qui leur permettrait de départager ces modèles. Par ailleurs, ils reconnaissent eux-mêmes que l'expérience mise en place est, au fond, essentiellement adaptée à l'un des deux modèles (celui des *carreaux uniformes*)... Enfin, il ne me semble pas que l'on puisse, pour les mêmes raisons, comparer le protocole expérimental à celui du *problème initial* !

Je ne pense pas, au demeurant, que le joueur de franc-carreau étudié par Monsieur de Buffon, qui *doit lancer en l'air un écu dans une pièce carrelée*, puisse se permettre notamment de mettre au point une technique pour que sa pièce de monnaie « ne tombe pas trop loin »... C'est un peu comme si l'on mettait en place une expérience destinée à tester le jeu de croix ou pile en encourageant le joueur à poser le plus doucement possible sa pièce afin qu'elle n'effectue pas de mouvements trop désordonnés !

A supposer, donc, qu'elle ait un but (et je souhaiterais votre point de vue sur ce point), l'expérience n'en a guère de très précis par rapport au problème du franc-carreau proprement dit. Ne pourrait-on à bon droit pointer ici une certaine « capacité d'ajustement de la réalité » à leurs désirs de la part des auteurs qui, à force de se prendre au jeu de leur modèle, ont fini par transformer petit à petit le problème initial de manière à ce que la réponse proposée s'ajuste mieux à l'énoncé final ?

Cela étant, la deuxième interrogation à laquelle je n'ai pu échapper est la suivante : *compte tenu du fait que l'expérimentation sur la feuille quadrillée est explicitement rapportée au modèle du* carreau uniforme*, ne devrait-elle pas servir, précisément, à valider les conjectures faites pour établir celui-ci ?*

Je m'explique. Conformément à ce qui a été dit plus haut, ce modèle repose avant tout sur l'introduction d'une approximation relativement discutable de la *loi du lanceur* par une loi « localement uniforme » dont il est évident qu'elle va avoir l'effet attendu (c'est-à-dire la solution de Buffon). Mais *ce qu'il s'agirait de valider*, c'est précisément *cette hypothèse* ! Et comme elle permet de conclure que le résultat sera indépendant du lanceur, pourquoi le but de l'expérience n'est-il pas posé clairement ? L'expérience est pourtant simple : on étudie six lanceurs différents (avec *a priori* des lois différentes) et la première (et peut-être la seule) question digne d'être posée est la suivante : *les résultats obtenus seront-ils significativement différents ou non ?*

Bizarrement, les auteurs ne se posent à aucun moment cette question. Ils s'ingénient au contraire à obscurcir le problème par une remarque qui laisse perplexe : « il n'est pas idiot [...] de rassembler les résultats » pour obtenir une expérimentation unique portant sur six mille essais...

Admettons-le pour l'instant. Mais dans quel but est-il donc si intéressant de rassembler les six observations ? Est-ce pour obtenir à toute force un résultat très proche du 0,25 attendu ? Est-ce pour que l'on ne se pose surtout pas de questions sur les écarts éventuels entre les expérimentateurs ? Est-ce pour pouvoir glisser au passage que le modèle a permis de *démontrer l'indépendance* vis-à-vis de la loi du lanceur ? C'est justement ce dernier point qui motivera la troisième question sur laquelle j'aimerais vous consulter : *en admettant qu'il puisse y avoir un intérêt ici à regrouper les résultats des six lanceurs pour n'en faire qu'un échantillon de six mille essais par rapport à un même problème, vous semble-t-il possible de justifier cela en se fondant (comme les auteurs) sur l'argument suivant : « si la suite* (p_n) *varie d'un lanceur à un autre, ceci est sans importance, puisque nous avons vu que p était indépendant de la suite* (p_n). *» ?*

Il me faut bien reconnaître que je n'arrive pas à comprendre le fond de cette justification. Je suis prise en permanence dans le dilemme suivant :

— Ou bien cela viendrait du simple fait que les six modèles correspondant aux six joueurs donnent tous une probabilité finale de 0,25... Mais cela signifierait-il qu'il suffise de pratiquer une autre expérience qui donnerait aussi, en théorie, une probabilité de succès de 0,25 pour pouvoir ajouter les résultats aux précédents ? Si c'est le cas, pourquoi les auteurs ne se sont-ils pas contentés de compter les occurrences de pile-pile dans un lancer de deux pièces au jeu de croix ou pile... et d'ajouter les résultats aux précédents ?

— Ou bien ce n'est pas de cela qu'il s'agit et la structure interne du modèle doit être prise en compte... Mais alors combien de pages d'explications leur faudrait-il pour mettre au point la démonstration de cette propriété regroupant six suites (p_n) différentes, compte tenu du fait qu'il a déjà fallu une page entière dans le cas trivial qui a été développé ?...

En définitive, tout cela laisse une impression assez décevante : les auteurs adoptent une attitude insupportable à l'égard de Monsieur de Buffon mais le lecteur ne laisse pas de se demander quelle réelle plus-value ils ont fini par apporter eux-mêmes à sa manière de traiter le problème.

Il est clair que la solution proposée par le jeune Buffon repose sur des simplications : faute d'informations utilisables sur la forme de la pièce, sur la méthode des lanceurs ou sur les reliefs du carrelage on voit mal comment quantifier le problème autrement qu'en admettant que « tout se passe comme si » les contributions sur chaque carreau étaient parfaitement semblables... Mais prétendre en faire plus (et en disposant des outils de l'analyse actuelle !) supposerait que l'on propose autre chose qu'un *tour de passe-passe* dérisoire.

Comme je vous l'ai dit tout à l'heure, je tiens de discussions avec certaines personnes compétentes quelques lueurs qui pourraient peut-être, me semble-t-il, contribuer à poser le problème d'une façon un peu plus simple que toutes celles qui ont été évoquées jusqu'ici. J'avais, au départ, demandé naïvement à Blaise pourquoi Monsieur de Buffon donnait l'impression de ne traiter le problème que sur un seul carreau, sans étendre son raisonnement à tout le carrelage...

« Ce n'est pas d'un carreau qu'il s'agit, m'avait alors sermonnée mon petit frère. Monsieur de Buffon ne travaille pas sur UN carreau, mais sur LE carreau. Sur une espèce de carreau *générique*, abstrait si tu préfères, mais censé rassembler tous les carreaux du carrelage ! » Puis il m'avait expliqué que, chaque fois que le centre de la pièce tombait à tel endroit précis d'un carreau quelconque, il suffisait de marquer le point obtenu sur ce carreau de référence... et que, par cette méthode, le problème se ramenait effectivement à la considération d'un carré unique sur lequel il restait à comprendre la loi utilisée par le hasard pour fixer la position relative de l'écu vis-à-vis des joints du carrelage.

Evidemment, c'est un peu la même idée que celle de votre robot, et en y réfléchissant, j'ai compris que cela n'est rien d'autre que de définir *l'espace quo-*

tient du carrelage (fini ou non...) par la relation d'équivalence évidente induite par les translations élémentaires construites sur les côtés d'un carreau. On obtient effectivement ainsi un carreau (ou un *tore*, si le carrelage est infini...) que l'on peut à bon droit considérer comme « générique », et sur lequel il reste à fixer la loi qui va modéliser le problème. Monsieur de Buffon a choisi de s'en tenir (en quelque sorte) à la loi uniforme. On pourrait tout aussi bien choisir une autre loi si, d'aventure, la forme bombée des carreaux donnait à la périphérie une plus grande probabilité d'être atteinte que le centre...

Mais cela étant posé, rien n'empêche de chercher à partir d'une *loi de lancement* sur le carrelage (par exemple normale) la loi « quotient » obtenue sur le carré « quotient ». Un événement (i.e. un point du carré quotient ou un voisinage d'un tel point) correspond par définition à la réunion des zones correspondantes sur tous les carreaux et il n'est pas difficile d'en déduire que la densité de probabilité s'obtient en additionnant les restrictions de la densité choisie à chaque carreau du carrelage.

Dans ce cadre la question de justifier la loi uniforme qui pourrait en résulter au final ne consiste pas (contrairement à ce que font nos auteurs) à se simplifier la vie par une hypothèse *a priori*, ou même à invoquer de façon floue une mystérieuse approximation... Si l'on veut faire mieux que Buffon, il s'agit de mettre en évidence des arguments qui permettent de se convaincre vraiment du fait que l'on est en face d'un phénomène de compensations entre les carreaux qui aboutit à « lisser » et à rendre constante la loi finale...

Votre calcul personnel à partir d'une loi normale montre que, même sans la supposer excessivement *étalée* — mais, bien évidemment, pas trop *pointue* —, une telle compensation est surprenante au delà de toute espérance. On constate donc que la symétrie ou la régularité de la loi permettent effectivement de rééquilibrer les inégalités entre des restrictions qui sont souvent loin d'être uniformes carreau par carreau.

A l'inverse, si la loi n'est plus supposée normale, il devient plus problématique de se persuader vraiment de ce que l'on espère au fond de soi-même ! En vérité, l'argument suggéré dans la préface pourrait fournir une piste, mais il ne tient pas. Il conviendrait d'abord d'en corriger quelque peu le principe : il ne s'agit pas *d'approcher* la loi globale par une loi localement uniforme, mais il s'agit de *majorer* et *minorer* celle-ci par des lois en escalier. Cette majoration et cette minoration devront fournir ensuite (après passage au quotient) un encadrement suffisamment serré de la loi quotient pour montrer que l'on peut assimiler celle-ci à une loi de densité constante...

Mais c'est alors analogue à un problème élémentaire d'intégration : il suffit d'encadrer la densité globale entre deux fonctions en escaliers *relatives au carrelage donné* de manière à ce que leurs intégrales diffèrent suffisamment peu. Malheureusement, même en supposant la fonction approchée raisonnablement *étalée*, on s'aperçoit très vite que, pour obtenir un petit encadrement à l'arrivée il faut supposer les carreaux d'une petitesse *ayant le même ordre de grandeur*... Or cela signifie précisément que ce n'est pas par cette voie que l'on finira par obtenir la conviction que la loi quotient peut être supposée uniforme ! L'étalement de la loi initiale ne suffit pas,... Et sa symétrie est inutile puisqu'une demi-somme de deux densités normales assez plates aboutit évidemment au résultat que vous avez trouvé,... Peut-être une régularité et une monotonie contrôlée sur chaque carreau suffiraient-elles à elles seules pour entraîner le fait que les parties *montantes* équilibrent sensiblement les parties *descendantes* ? ...

Bref. On rêve à une sorte de « loi des grands nombres » qui donnerait des conditions suffisamment larges sur la *loi globale du lancer* permettant de conclure que les compensations d'un carreau à l'autre auront presque toujours lieu et conduiront à une loi quotient très proche de la loi uniforme ... Mais qui le saurait ?

Ce qui me paraît en revanche un peu plus inattendu réside dans votre dernier exemple, celui du cas où l'écart-type est égal à deux et où le carrelage est limité à sept fois sept carreaux. Il est clair que le fait d'avoir négligé les carreaux extérieurs a une incidence, certes minime, mais assez sensible sur la non uniformité de la loi quotient... Cela va une fois de plus à l'encontre de l'intuition proposée par nos auteurs. Leur expérience sur la feuille quadrillée consiste à considérer sans scrupules que le « coup est annulé » lorsqu'il sort de la feuille, alors que cette façon de faire est susceptible, précisément, d'apporter un biais à l'uniformité attendue !

D'une certaine manière, ils donnent l'impression de postuler tout benoîtement que « *tout se passe comme si les mauvais lancers n'existaient pas* » ; ce qui résulterait du fait qu'un lancer tombant en dehors de la feuille « *pourrait être considéré comme nul et non avenu* »... Je me demande où ils ont pu aller chercher une idée pareille... Je tâcherai d'en parler à Blaise ; peut-être cela lui redonnera-t-il le goût de réfléchir à la géométrie du hasard...

Votre dévouée,

Gilberte Pascal

TITRE : Chronique d'une correspondance très certainement apocryphe *ou...* L'improbable Gilberte Pascal
AUTEURS : Jean-Pierre FERRIER, Michel HENRY, Gérard KUNTZ, Pol LE GALL, Bernard PARZYSZ, Gilberte PASCAL, Jacques VERDIER, André VIRICEL
PUBLIC VISE : Enseignants de lycée et d'université
RESUME : Le texte qui suit relate différents épisodes d'une correspondance peu ordinaire sur quelques thèmes des probabilités élémentaires et, plus précisément, sur les problèmes liés à leur enseignement dans les classes du lycée. On trouvera successivement ici des échanges à propos d'une question d'équiprobabilité dans un modèle discret, d'une réflexion sur la notion de probabilités conditionnelles ainsi que d'une polémique touchant le domaine des lois continues.
NOTE : Recueil de textes très polémiques...
MOTS CLE : Equiprobabilité, probabilités conditionnelles, loi de probabilité uniforme.