

MATHÉMATIQUES A L'ÉCOLE NORMALE

TOME 3

(première partie)

# MESURE

Jean Marie DIDRY  
Jean LAMBERT  
Gérard MATHIEU  
Michel SIBILLE



Trois des rédacteurs de ce volume ont lâchement abandonné le quatrième au moment d'écrire cette introduction. Ils lui laissaient ainsi la tâche d'expliquer au lecteur attentif des introductions aux tomes 1 et 2 que celui-ci n'est pas encore le dernier. Mais cela n'est qu'illusion, ce volume n'étant que la première partie du tome 3. Pour le reste il nous faut avouer une relative baisse d'allégresse : en ce jour d'octobre 1984 on ignore la forme que vont prendre les études à l'École Normale et donc le style à donner à la suite.

Rendez-vous à bientôt quand même.

un volontaire ( ? ) de l'équipe rédactionnelle

•



◆ I - INTRODUCTION.

- 1.0 - Dans la partie III du tome I (les nombres) on a enrichi l'ensemble des nombres entiers afin de pouvoir mesurer des longueurs :
  - les fractions sont nécessaires pour mesurer certaines parties d'un segment coupé, par exemple, en 5 morceaux égaux,
  - $\pi$  a été introduit pour mesurer la longueur d'un cercle de rayon 1 ,
  - $\sqrt{2}$  a été introduit pour mesurer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 .

De plus, d'un point de vue pratique, les nombres décimaux ont été définis pour améliorer la finesse d'une mesure en ajoutant des graduations à la règle que l'on obtient en reportant une unité.

Pour tout ceci on a admis que le concept de "mesure" était intuitif, les nombres étant alors ce qui sert à mesurer.

● 1.1 - Qu'est-ce que mesurer ?

Supposons, au contraire, que l'on soit pourvu de l'ensemble des nombres réels (et des constructions mathématiques permettant de définir ces nombres de manière indépendante de la mesure). A toute courbe on cherche à associer (si cela est possible) un nombre qui serait sa mesure ou encore sa longueur notée  $\ell(AB)$  pour le moment. Cela ne se fait pas de manière arbitraire. Il est clair que si le segment  $AB$  est contenu dans le segment  $CD$  on a  $\ell(AB) < \ell(CD)$  ; de plus, si on place bout à bout les segments  $AB$  et  $BC$  pour former un segment  $AC$  , on a  $\ell(AC) = \ell(AB) + \ell(BC)$  ; on formule donc des exigences analogues pour les courbes.

Plus généralement mesurer est alors un processus qui consiste à associer à chaque élément d'un ensemble d'objets similaires (l'ensemble des courbes, celui des surfaces, celui des solides) un nombre positif ou nul appelé mesure de cet élément et vérifiant des règles analogues à celles



données ci-dessus pour la longueur des segments (on pourrait appeler ces règles : axiome de croissance et axiome d'additivité). En fait le nombre dont il est question est obtenu par comparaison entre l'objet que l'on considère et un objet servant d'étalon.

On n'insistera pas sur les problèmes soulevés par cette définition, en particulier sur le fait que certains objets pourraient ne pas avoir de mesure : toute figure que l'on sait dessiner ou même concevoir peut, en fait, être mesurée.

Dans ce qui suit on donnera quelques méthodes, souvent transposées d'ailleurs de méthodes théoriques, permettant de déterminer la mesure d'une figure (avec une certaine approximation éventuellement).

● 1.2 - Vocabulaire.

1.2.1 - La langue française est particulièrement riche mais, parfois, cette richesse est contradictoire.

Dans le cas des longueurs la situation est claire :

◆ *il ne viendrait à l'esprit de personne de confondre les notions de courbe et de longueur*

Pour les surfaces, c'est-à-dire pour les parties du plan ou de l'espace telles que... (mais que mettre comme définition ?), le vocabulaire usuel est moins précis. On parle de surface habitable d'un appartement (dans ce cas surface est synonyme de mesure) ; on dit l'aire d'un champ (ici l'aire désigne la mesure du champ) ; on dit encore l'aire d'atterrissage (l'aire est alors une surface dans le sens d'objet géométrique).

Pour les solides on trouve aussi deux sens : tout solide a un volume mais le mot volume désigne aussi, parfois, le solide lui-même.

Pour clarifier les choses nous dirons que *l'aire est à la surface (respectivement le volume est au solide) ce que la longueur est à la courbe.*

- Ainsi :
- la mesure d'une courbe c'est sa longueur
  - la mesure d'une surface c'est son aire
  - la mesure d'un solide c'est son volume

1.2.2 - Nous venons ainsi de décrire une structure à deux niveaux : l'objet géométrique d'une part, sa mesure d'autre part.

On trouve aussi décrite une structure à trois niveaux :

- au premier niveau il y a une notion géométrique : la ligne, la surface, le solide...
- au second une notion de longueur, d'aire, de volume,...
- au troisième la notion de mesure

Cette conception décrit le processus suivant :

- On se donne des objets, par exemple des segments. Pratiquement on donne des bâtonnets aux élèves.
- On classe ces objets en mettant ensemble ceux qui ont "la même longueur" (il est inutile de mesurer pour cela, il suffit de mettre côte à côte).
- A chaque longueur (c'est-à-dire à chaque ensemble d'objets coïncidant par juxtaposition) on associe un nombre, mesure de cette longueur.

L'expression "mesure de la longueur d'un segment" plutôt que "mesure d'un segment" ou "longueur du segment" s'explique donc ainsi.

En ce qui concerne la théorie mathématique de la mesure, cela est sans intérêt.

En ce qui concerne la description du processus d'apprentissage chez l'enfant, cette structure à trois niveaux est probablement pertinente. Remarquons, en outre, qu'elle explique peut-être les variations de vocabulaire que nous signalions plus haut.

Pour terminer ce paragraphe nous laissons le lecteur réfléchir sur le sujet avec les exercices ci-dessous :

- Ex. 1.1 : Qu'est-ce qui distingue un cercle d'un disque ?  
Donner des définitions. Existe-t-il d'autres figures géométriques apportant la même distinction ?
- Ex. 1.2 : a) Rechercher dans divers dictionnaires puis définir les mots ou expressions suivants :
  - périmètre d'un polygone
  - circonférence
  - superficie d'un terrain

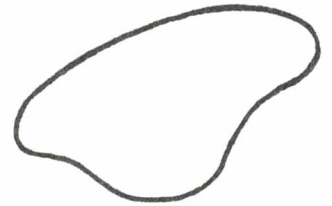
- longueur (respectivement largeur) d'un rectangle
- mesurer le diamètre d'un cercle

b) Peut-on écrire, à propos du périmètre d'un certain rectangle,  $(7 + 8) \times 2 = 30$  cm ?

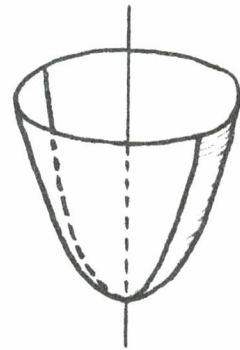
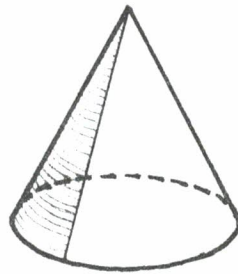
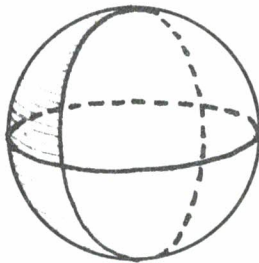
## ◆ II - MESURE DES AIRES.

● 2.0 - Les objets que l'on considère, dans ce chapitre, sont des surfaces planes et éventuellement non planes ; dans ce dernier cas on parle de surfaces gauches.

- Un disque, un rectangle, un domaine plan limité par une courbe continue, fermée, qui ne se recoupe pas sont des surfaces planes.



- Une sphère, la surface latérale d'un cône, un paraboloïde engendré par une rotation d'un arc de parabole symétrique autour de son axe de symétrie sont des surfaces gauches.



- 2.1 - Un exemple fondamental : le rectangle.

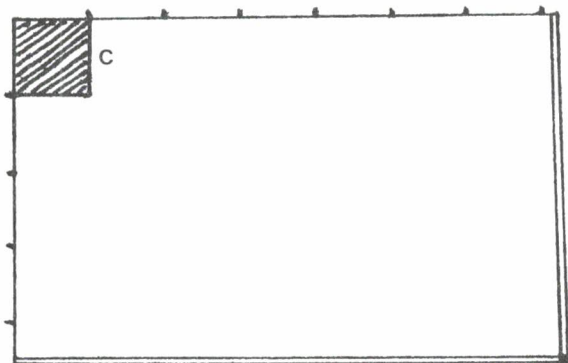
Considérons donc un rectangle dont les longueurs des côtés sont  $a$  et  $b$ .

- Si  $a$  et  $b$  sont des nombres entiers, tout élève de CM dirait qu'il y a  $a \times b$  carrés unités à l'intérieur et donc l'aire de ce rectangle est  $a \times b$ .
- Si  $a$  et  $b$  sont des nombres décimaux ils peuvent s'écrire :

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \quad \text{et} \quad b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m .$$

Pour plus de clarté prenons d'abord un exemple :

$$a = 7,2 \quad \text{et} \quad b = 4,6$$



Changeons d'unité et considérons les petits carrés de côté 0,1 ; il y a alors  $72 \times 46$  tels carrés mais l'unité initiale est l'aire d'un carré C (hachuré) qui comprend 100 tels petits carrés (en noir).

Selon l'unité initiale l'aire du rectangle est alors  $\frac{72 \times 46}{100}$  soit  $7,2 \times 4,6$ .

De manière générale supposons par exemple  $n > m$  et considérons les petits carrés de côté  $10^{-n}$ . On trouve :

$$\overbrace{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n+1) \text{ chiffres}} \times \overbrace{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_m 0 \dots 0}^{(n+1) \text{ chiffres}} \quad \text{tels carrés et puisque l'unité}$$

initiale correspond à  $10^{2n}$  tels carrés l'aire du rectangle est

$$\frac{\overbrace{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \times \overbrace{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_m 0 \dots 0}}{10^{2n}} \quad \text{soit encore}$$

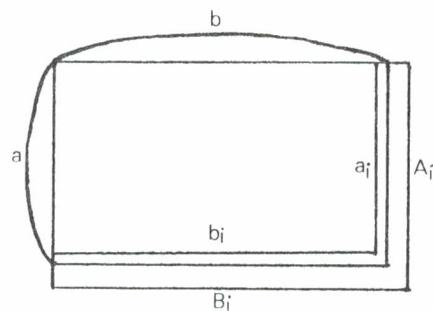
$$\overbrace{\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n} \times \overbrace{\beta_0, \beta_1 \dots \beta_m} \quad \text{autrement dit } a \times b .$$

Ainsi, si les longueurs des côtés sont des nombres décimaux, l'aire est toujours le produit de ces longueurs.

- Envisageons maintenant le cas général où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels.  $a$  (respectivement  $b$ ) peut être encadré de plus en plus finement par des nombres décimaux  $a_i$  et  $A_i$  (respectivement  $b_i$  et  $B_i$ ), (cf. tome 1, pages 96 et suivantes).

Le rectangle considéré contient donc un rectangle d'aire  $a_i b_i$  et est contenu dans un rectangle d'aire  $A_i B_i$ .

Les deux suites  $(a_i b_i)$  et  $(A_i B_i)$  convergent vers le même nombre  $ab$  qui est l'aire du rectangle considéré.



On constate ainsi que le problème de la mesure des surfaces dépend de celui de la mesure des longueurs. Il en serait de même pour la mesure des volumes, l'exemple fondamental étant cette fois le parallélépipède.

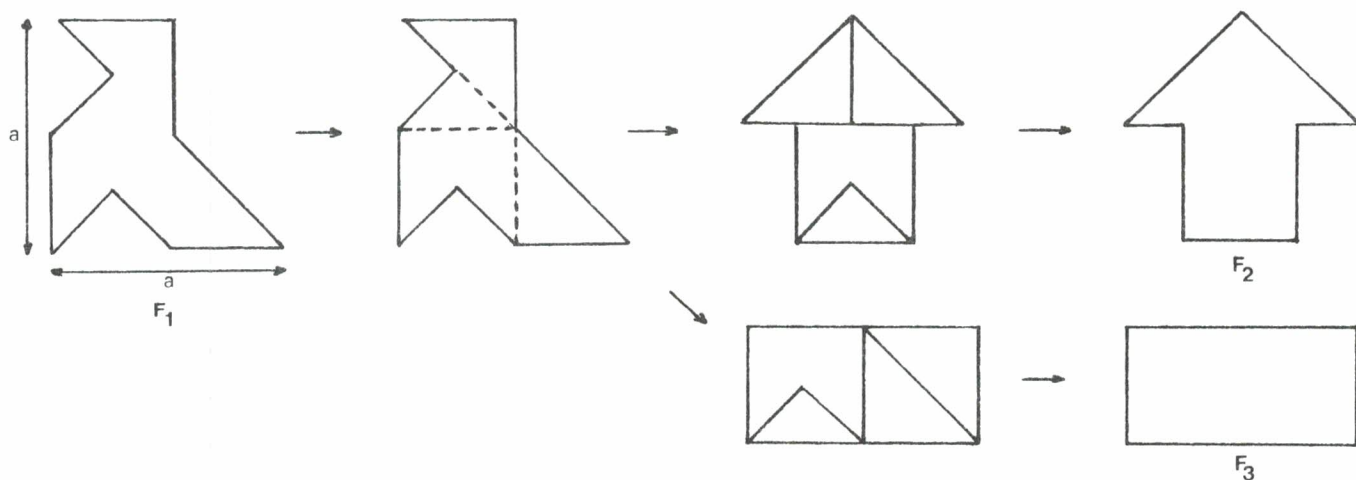
La connaissance de l'aire du rectangle est fondamentale dans le sens où elle permet de déterminer l'aire de tout polygone. Elle nous sera utile dans le procédé du puzzle (voir ci-après) mais aussi dans la méthode par intégration qui est une façon de définir les aires (cf. 2.4.2).

On rencontrera un autre processus d'encadrement avec les quadrillages.

## • 2.2 - Deux méthodes élémentaires.

### 2.2.1 - Procédé du puzzle.

Prenons un exemple très simple :



Les figures  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  ont la même aire. L'aire de la "cocotte"  $F_1$  est donc  $\frac{1}{2} a^2$  soit la moitié de l'aire du carré dans lequel elle est inscrite.



De la même façon on peut trouver des formules de calcul d'aires pour des domaines courants.

- Ex. 2.1 : a) Retrouver, par ce procédé, l'aire du triangle.  
b) Même question pour l'aire d'un parallélogramme.

**N.B.** On envisagera différents cas de figure.

- Ex. 2.2 : a) En décomposant un trapèze, retrouver une formule donnant son aire.  
b) L'aire du triangle peut s'écrire de trois façons :

$$\frac{1}{2} (b \times h) \quad \left(\frac{1}{2} b\right) \times h \quad b \times \left(\frac{1}{2} h\right)$$

correspondant chacune à des décompositions ou/et à des puzzles différents. Retrouver ces trois procédés.

- c) Faire de même pour un trapèze quelconque.

Ce procédé du puzzle a été utilisé depuis très longtemps pour des démonstrations géométriques. L'exemple le plus classique est celui du théorème de Pythagore. En voici une démonstration. Considérons les deux figures ci-dessous :

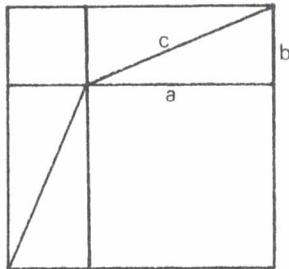


Fig. 1

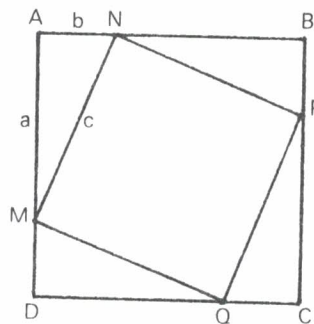


Fig. 2

Ce sont des décompositions différentes de deux carrés égaux. On retrouve sur la figure 2 les quatre triangles rectangles de la figure 1 dont les côtés sont  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Par ailleurs  $MNPQ$  est un losange dont les quatre angles sont égaux puisque les angles  $\widehat{ANM}$  et  $\widehat{BNP}$  se retrouvent en  $\widehat{DMQ}$  et  $\widehat{AMN}$ , en  $\widehat{CQP}$  et  $\widehat{DQM}$  etc.  $MNPQ$  est donc un carré de côté  $c$ .

La considération des figures 1 et 2 montre alors immédiatement que l'aire du carré  $MNPQ$  est la somme des aires des deux carrés intérieurs à  $A'B'C'D'$ . Ainsi  $c^2 = a^2 + b^2$ .

- Ex. 2.3 : La figure 3 est une autre démonstration du théorème de Pythagore. Expliquer et justifier chacune des étapes de cette preuve.

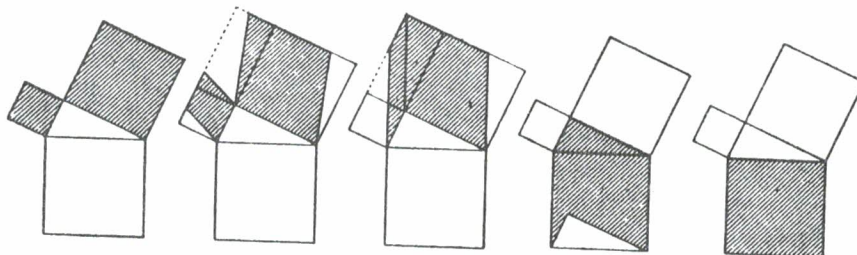


Fig. 3

- Ex. 2.4 : La figure 4 est encore une démonstration du théorème de Pythagore. L'expliquer, la justifier.

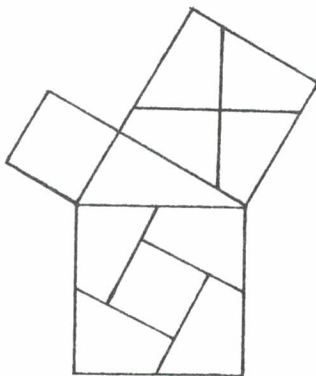


Fig. 4

- Ex. 2.5 : En voilà encore une avec la figure 5. Mêmes questions.

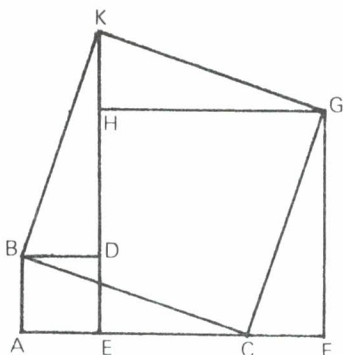


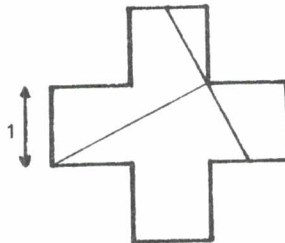
Fig. 5

**N.B.** Pour construire la figure 5 on part du triangle rectangle  $ABC$ , on construit le carré  $AEDB$  puis  $F$  tel que  $AC = EF$ . On construit ensuite le carré  $EFGH$  et on place le point  $K$  comme indiqué, de façon à avoir  $DK = AC$ .

On démontre que, si deux *polygones* sont de même aire, chacun d'eux peut être découpé en un nombre *fini* de pièces qui peuvent être réarrangées pour former l'autre.

Le procédé général est assez compliqué ; l'exercice suivant se situe dans ce cadre.

► Ex. 2.6 : Découper une croix grecque pour obtenir un carré de même aire. Voici une solution ; en trouver d'autres.



**N.B.** On supposera que la largeur d'une branche est 1 ; on calculera l'aire de la croix et le côté du carré cherché. On pourra enfin s'aider d'un quadrillage.

### 2.2.2 - Procédé de la pesée.

Il n'est pas toujours facile ou possible de procéder comme dans le paragraphe précédent, notamment lorsque les surfaces ne sont pas polygonales. Ainsi les deux surfaces de la figure 6 ont la même aire, comme on s'en convaincra en utilisant la formule de l'aire du disque ; cependant le découpage en un nombre fini de pièces est impossible pour des raisons de courbure des bords.

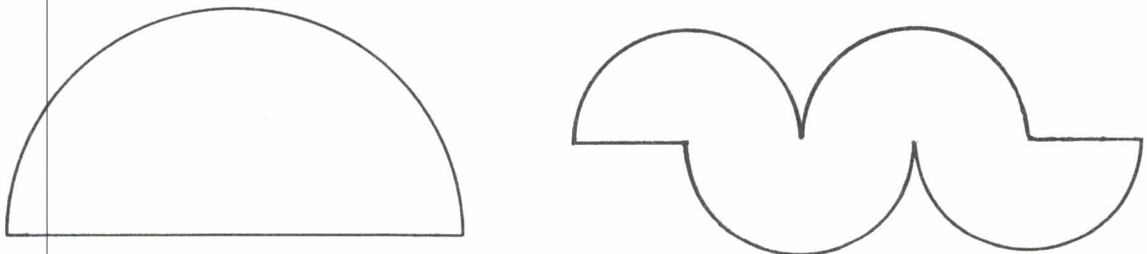


Fig. 6

Dans ce cas on peut encore, pour comparer ces deux surfaces, les découper dans une plaque homogène, de contre-plaqué par exemple, et les peser.



Si l'on veut une mesure de leur aire, il faut les peser, découper dans la même plaque une surface étalon, la peser également, puis faire une division.

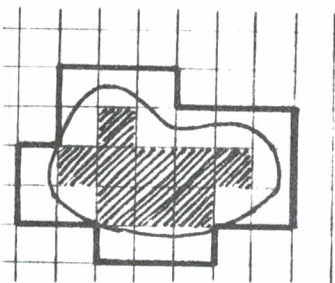
Pour une bonne précision, il vaut mieux avoir une plaque assez épaisse.

► Ex. 2.7 : Procéder ainsi pour avoir une évaluation de l'étendue du département de la Meurthe-et-Moselle (en négligeant, bien sûr, la courbure terrestre et le relief) (cf. page 4).

● 2.3 - Emploi de quadrillages.

2.3.1 - Il s'agit d'un procédé d'approximation assez médiocre. On le développe ici, tout d'abord parce qu'il est employé à l'école élémentaire pour introduire les calculs d'aire et ensuite, parce qu'il permet, par passage à la limite, de définir une notion d'aire plane.

Considérons un domaine  $D$  et élaborons, à partir d'un carré  $C$  dont l'aire est choisie comme unité, un quadrillage de maille  $C$  couvrant le plan. On peut alors compter le nombre  $n_0$  de carrés intérieurs, ce qui donne une évaluation de l'aire par défaut. On peut aussi compter le nombre  $N_0$  de carrés contenant des points de  $D$ , ce qui donne une évaluation par excès.



Ces évaluations pouvant être rudimentaires, l'idée naturelle consiste à subdiviser (en dix, par suite des habitudes que l'on a à utiliser le système décimal) les côtés des carrés pour obtenir un réseau plus fin déduit du précédent. Puisqu'un carré du premier réseau correspond à cent carrés du second, les évaluations de l'aire de  $D$  seront  $\frac{n_1}{100}$  par défaut et  $\frac{N_1}{100}$  par excès et ainsi de suite.

On obtient alors :

$$n_0 \leq \frac{n_1}{100} \leq \frac{n_2}{100^2} \leq \dots \leq \frac{n_i}{100^i} \leq \dots$$

et

$$N_0 \geq \frac{N_1}{100} \geq \frac{N_2}{100^2} \geq \dots \geq \frac{N_i}{100^i} \geq \dots$$

Dans les cas usuels les deux suites  $\left(\frac{n_i}{100^i}\right)$  et  $\left(\frac{N_i}{100^i}\right)$  convergent vers le même nombre  $A$  appelé aire de  $D$ .

Il existe cependant des cas pathologiques pour lesquels les deux suites ne convergeraient pas vers le même nombre.

- **Remarque** : si le quadrillage est disposé autrement sur le domaine considéré, on démontre que la technique précédente conduit au même résultat.

- Ex. 2.8 : En tenant compte de cette remarque, retrouver la formule donnant l'aire d'un rectangle.

L'emploi de quadrillages peut être un procédé expérimental mais il faut penser au caractère fastidieux que cela impliquerait si l'on vous demandait d'évaluer la superficie de la Meurthe-et-Moselle avec du papier millimétré (cf. carte page 4). Dans la pratique l'aire d'un département s'obtient en additionnant l'étendue des différentes communes, lesquelles s'obtiennent par des additions des superficies figurant sur les plans cadastraux.

- Ex. 2.9 : Tracer sur du papier millimétré un cercle de rayon 5 cm et évaluer son aire et le nombre  $\pi$ , en utilisant des carrés de 1 cm puis 5 mm, puis 1 mm de côté.

### 2.3.2 - Effet d'un changement d'unité.

Imaginons maintenant que l'on remplace le carré  $C$  qui a servi à la construction des quadrillages par un autre carré  $C'$  dont la mesure du côté est  $a$  en prenant le côté de  $C$  comme unité de longueur.

L'aire de  $C'$  est, en prenant  $C$  comme unité,  $a^2$ .

L'aire de  $C$  est, en prenant  $C'$  comme unité,  $\frac{1}{a^2}$ .

Considérons à nouveau notre domaine  $D$ . Il peut être approché par un polygone intérieur comportant, au rang  $i$ ,  $\frac{n_i}{100^i}$  carrés du type  $C$  et par un polygone extérieur comportant  $\frac{N_i}{100^i}$  carrés du type  $C$  et dont les aires respectives, en prenant  $C'$  comme nouvelle unité, sont

$$\frac{n_i}{100^i} \times \frac{1}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{N_i}{100^i} \times \frac{1}{a^2} . \quad \text{La différence} \quad \left(\frac{n_i}{100^i} \times \frac{1}{a^2}\right) - \left(\frac{N_i}{100^i} \times \frac{1}{a^2}\right)$$

tend vers zéro et donc, avec la nouvelle unité,  $D$  a une aire  $A'$  qui est la limite de chacune des suites  $\left(\frac{n_i}{100^i} \times \frac{1}{a^2}\right)$  et  $\left(\frac{N_i}{100^i} \times \frac{1}{a^2}\right)$ . Ainsi, avons-nous :

$$A' = A \times \frac{1}{a^2}$$

- **Remarque** : - si l'on remplace  $C$  par un carré  $C'$  plus petit on a  $a < 1$  et l'aire  $A'$  est supérieure à  $A$ .
- si l'on remplace  $C$  par un carré  $C'$  plus grand on a  $a > 1$  et l'aire  $A'$  est inférieure à  $A$ .

Nous pouvons énoncer le résultat ci-dessus autrement ; en notant  $A$  sous la forme  $\text{aire}_C(D)$  il vient :

$$\blacklozenge \quad \boxed{\text{aire}_{C'}(D) = \text{aire}_C(D) \times \text{aire}_{C'}(C)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\text{aire}_{C'}(D) = \frac{\text{aire}_C(D)}{\text{aire}_C(C')}}$$

### 2.3.3 - Bilan sur le point de vue des quadrillages.

Supposons que le domaine  $D$  soit la réunion de deux domaines  $D_1$  et  $D_2$  disjoints ou dont l'intersection est réduite à une ligne ou à un point (domaines adjacents) ; alors :

$$\blacklozenge \quad \boxed{\text{aire}(D) = \text{aire}(D_1) + \text{aire}(D_2)}$$

- Ex. 2.10 : a) Démontrer cette propriété. On distinguera les différents cas mentionnés et on utilisera le procédé qui nous a permis de définir l'aire.
- b) En déduire une formule générale, quelles que soient les positions relatives des domaines  $D_1$  et  $D_2$ .

Une conséquence immédiate (pourquoi ?) de la propriété ci-dessus est que l'aire est une fonction croissante de la surface. Autrement dit :

$$\blacklozenge \quad \boxed{\text{si } D \subset D' \quad \text{alors} \quad \text{aire}(D) \leq \text{aire}(D')}$$

Le point de vue des quadrillages permet donc de définir une notion d'aire pour une famille de surfaces contenant les surfaces usuelles. Cette notion vérifie les deux axiomes cités dans l'introduction : croissance et additivité.

Il est clair, par ailleurs, que *des domaines égaux ont la même aire*. Il suffit, pour s'en rendre compte, de positionner le quadrillage sur l'un et de déplacer le tout sur l'autre domaine.

#### 2.3.4 - Comportement de l'aire par similitude.

Remplaçons maintenant  $D$  par un domaine semblable  $D'$ , le rapport de similitude étant  $k$  (cf. tome 2, page 113). Plaçons un quadrillage construit à partir d'un carré  $C$  sur le domaine  $D$ . La similitude de rapport  $k$  transforme  $D$  en  $D'$ ,  $C$  en un carré  $C'$  dont l'aire, en prenant  $C$  comme unité, est  $k^2$  et le quadrillage de maille  $C$  en un quadrillage de maille  $C'$  (cf. figure 7).

Les nombres  $n_i$  et  $N_i$  relatifs à  $D$  et  $C$  d'une part, et  $D'$  et  $C'$  d'autre part, sont les mêmes (on a seulement réalisé un agrandissement ou une réduction). Ainsi l'aire de  $D'$  selon l'unité  $C'$ , est-elle l'aire de  $D$  selon l'unité  $C$  :

$$\text{aire}_{C'}(D') = \text{aire}_C(D)$$

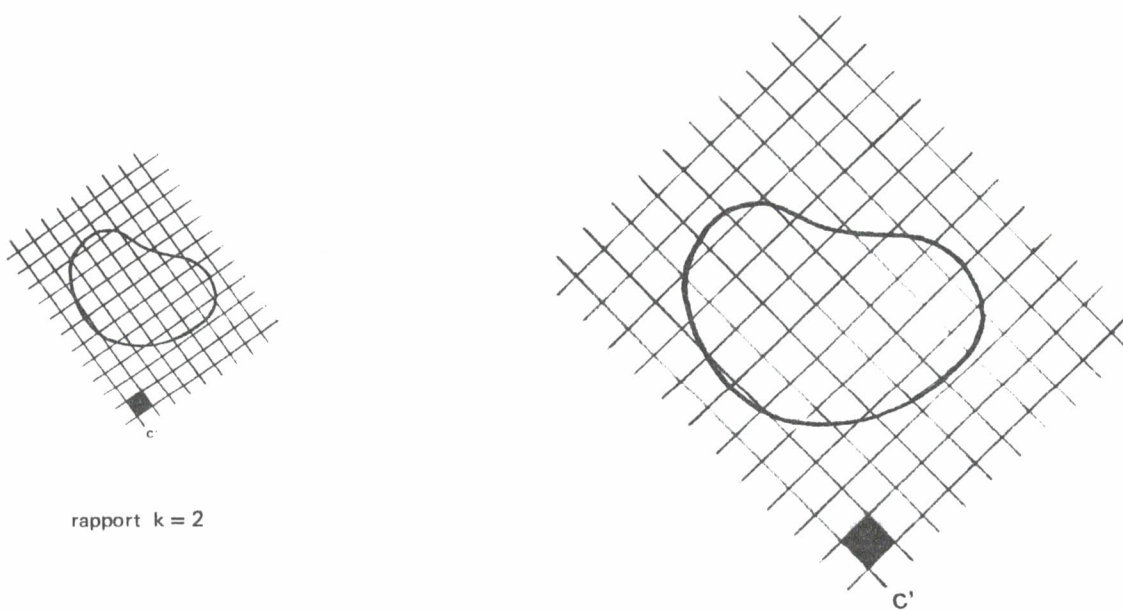


Fig. 7

Mais d'après 2.3.2 on a aussi :

$$\text{aire}_C(D') = \text{aire}_{C'}(D') \times \text{aire}_C(C') \quad \text{ce qui donne}$$

$$\text{aire}_C(D') = \text{aire}_{C'}(D') \times k^2$$

Nous pouvons énoncer :

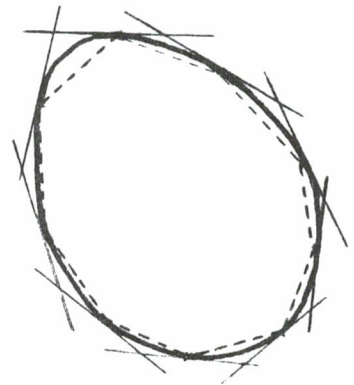
- ◆ dans une similitude de rapport  $k$ , un domaine  $D$  est transformé en un domaine  $D'$  tel que :

$$\text{aire}_C(D') = \text{aire}_C(D) \times k^2$$

- 2.4 - Autres procédés d'approximation.

- 2.4.1 - Approximations polygonales, planimètre polaire.

A l'image de ce qu'on fait pour les longueurs (voir page 6), il est possible de construire, sous certaines conditions, un polygone inscrit et un polygone circonscrit dont les aires sont respectivement inférieure et supérieure à l'aire du domaine  $D$ . Pour cela  $D$  doit être convexe et sa frontière doit posséder une tangente en tout point, sauf peut être en un nombre fini de points. En subdivisant la frontière de  $D$  de manière de plus en plus fine, on obtiendra des approximations de plus en plus précises de l'aire.



Ce procédé a été utilisé par *Viète* (1540-1603) pour trouver une expression remarquable de  $\pi$  (voir exercice ci-dessous).

► Ex. 2.11 : Il s'agit d'approcher l'aire du cercle par l'aire de polygones réguliers inscrits obtenus en doublant le nombre de côtés d'une étape à la suivante.

- a) Appelons  $AB$  le côté d'un tel polygone à  $n$  côtés. Déterminer l'aire  $A_n$  en fonction de  $\alpha$



d'une part, de  $\beta = \frac{\alpha}{2}$  d'autre part (cf. figure 8). On utilisera les notions de trigonométrie indiquées dans le tome 2, pages 120 et suivantes.

b) Trouver une expression simple du rapport  $\frac{A_n}{A_{2n}}$  des aires de deux polygones obtenus successivement dans le procédé.

c) Montrer que :

$$\pi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{r^2 \cos \beta \cos(\beta/2) \dots \cos(\beta/2^k)}$$

d) Prendre  $n = 4$ ,  $\beta = 45^\circ$  (on part d'un carré inscrit) et  $r = 1$  et en déduire :

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

e) Essayer, si l'on dispose d'une calculatrice programmable, de trouver, par ce procédé, des valeurs approchées décimales de  $\pi$ .

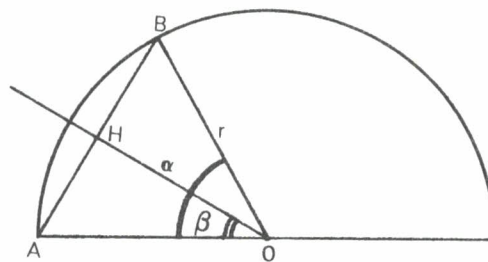
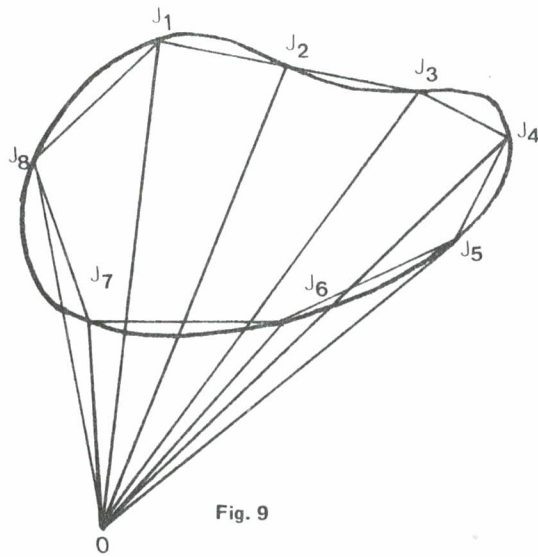


Fig. 8

La méthode d'approximation citée ci-dessus n'est valable que pour des surfaces planes convexes telles que... . On peut néanmoins trouver d'autres méthodes d'approximations polygonales utilisées d'ailleurs dans la pratique.

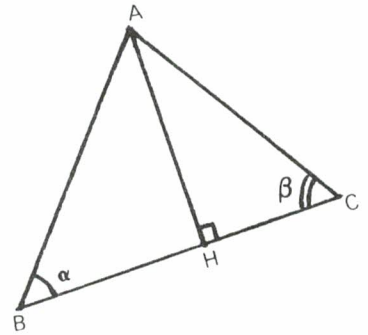
Pour mesurer, par exemple, la superficie d'un étang, on dispose des jalons  $J_1, J_2, \dots$  le long de la rive et en un point  $O$  extérieur. On mesure alors les distances  $J_1J_2, J_2J_3, \dots, J_7J_8$ , puis, par visée,



les angles  $\widehat{OJ_1J_2}$ ,  $\widehat{OJ_2J_1}$ ,  
 $\widehat{OJ_2J_3}$ ,  $\widehat{OJ_3J_2}$  etc. Muni de  
ces données, on peut trouver l'aire  
de chacun des triangles et l'éten-  
due de l'étang :

$$S = \text{aire}(OJ_1J_2) + \text{aire}(OJ_2J_3) + \text{aire}(OJ_3J_4) + \text{aire}(OJ_4J_5) - \text{aire}(OJ_5J_6) - \text{aire}(OJ_6J_7) - \text{aire}(OJ_7J_8)$$

► Ex. 2.12 : Montrer précisément comment  
l'on peut déterminer l'aire  
d'un triangle ABC, con-  
naissant BC et les  
angles  $\alpha$  et  $\beta$ .



Si l'on pouvait poursuivre le procédé indéfiniment en plaçant des jalons de plus en plus proches on aboutirait à l'aire du domaine. Il existe un appareil réalisant pratiquement ce calcul, c'est le *planimètre polaire* (voir photo ci-dessous).

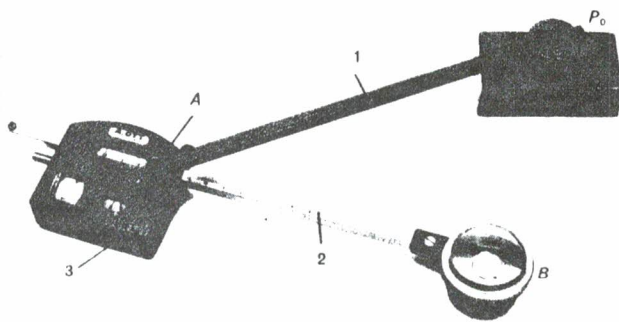


Fig. 1 - Planimètre polaire à un bras réglable. 1 bras polaire; 2 bras traceur; 3 mécanisme enregistreur. (Cliché A. Ott)

En suivant avec B le contour de la surface, on voit apparaître sur un compteur la superficie recherchée.

( $P_0$  est le point fixe O de la figure 9).

Pour plus de détails on pourra consulter l'"Encyclopédie des Sciences et des Techniques".

Une autre méthode est employée dans la pratique, c'est celle des trapèzes. Les géomètres et les employés des entreprises de travaux publics l'utilisent pour évaluer la quantité d'enrobé nécessaire à la

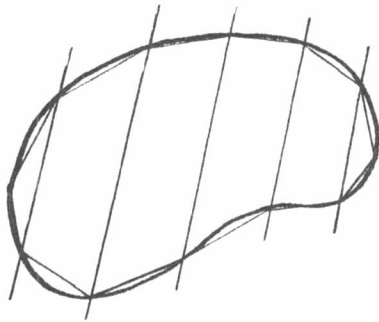


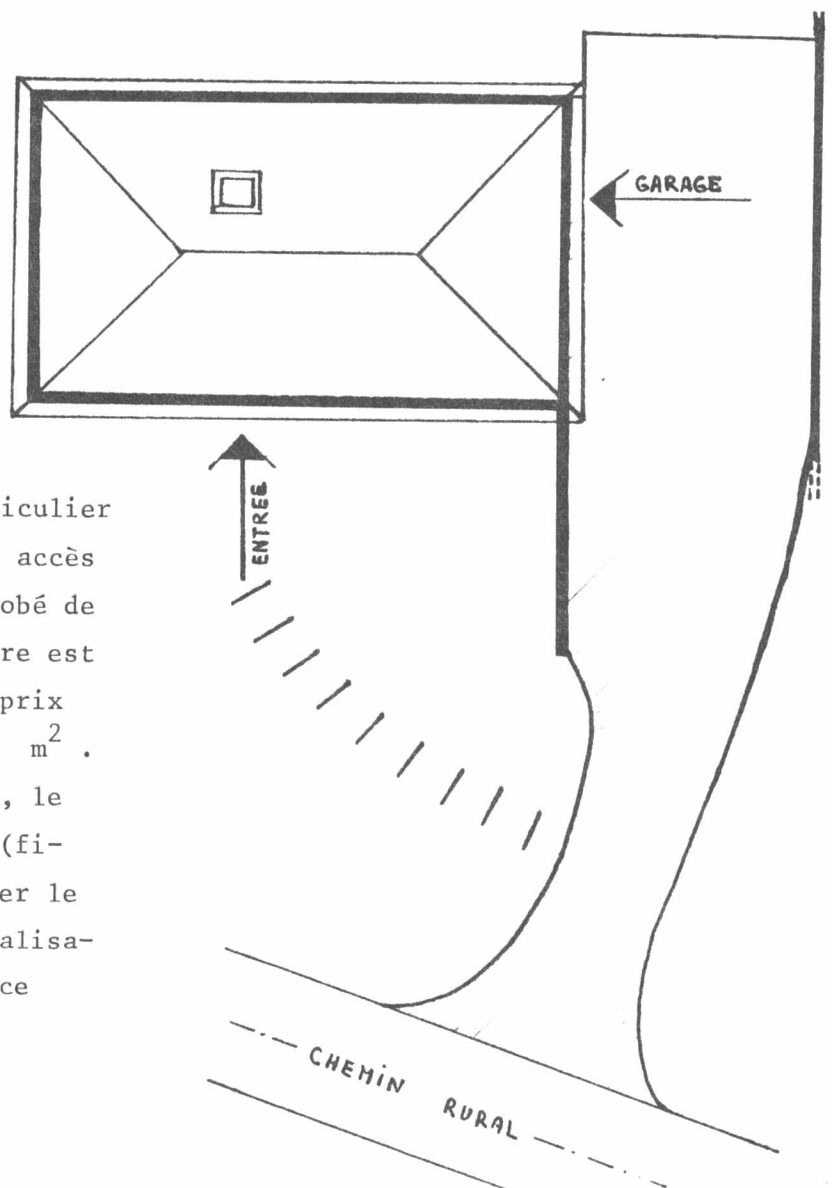
Fig. 10

confection d'une route. On décompose une surface donnée en trapèzes dont toutes les bases sont parallèles (les triangles étant considérés comme des trapèzes particuliers).

On trouve ainsi une valeur approximative de l'aire de la surface considérée.

Lorsqu'on a une surface non convexe, on s'arrange pour compenser les pertes par des ajouts.

ECHELLE 1/200



- Ex. 2.13 : Un particulier fait réaliser un accès de garage en enrobé de bitume. La facture est établie pour un prix TTC de 90 F le  $m^2$ . Voici, ci-contre, le plan de l'accès (figure 11). Indiquer le montant de la réalisation et la surface couverte.

Fig. 11



- Ex. 2.14 : Retrouver la formule donnant l'aire d'un disque. Pour cela on considèrera une suite de polygones réguliers convexes inscrits dans le cercle et une suite de polygones réguliers convexes circonscrits selon la méthode évoquée en 2.4.1. On calculera les aires de ces polygones et on montrera que les suites obtenues sont convergentes.

N.B. On admettra que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

2.4.2 - Vers l'intégration : découpage en rectangles ; planimètre linéaire.

Soit à déterminer l'aire du domaine D ci-contre délimité par la parabole d'équation  $y = 1 - x^2$  et les axes. On peut découper l'intervalle  $[0,1]$  en intervalles de longueur  $\frac{1}{n}$  et donc découper le domaine D en bandes de largeur  $\frac{1}{n}$ . Pour évaluer l'aire de D, on considère l'aire  $S_n$  du polygone contenant D et défini par les grands rectangles de largeur  $\frac{1}{n}$ . De même on considère l'aire  $s_n$  du polygone contenu dans D et défini par les petits rectangles.

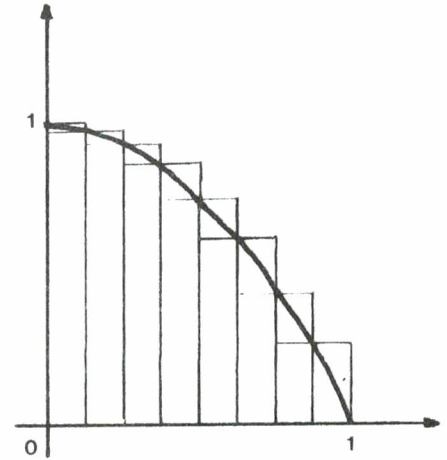


Fig. 12

On a :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{2^2}{n^2} \right) + \dots + \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{(n-1)^2}{n^2} \right]$$

$$\text{et } s_n = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{2^2}{n^2} \right) + \dots + \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{(n-1)^2}{n^2} \right]$$

$$\text{et ainsi } S_n - s_n = \frac{1}{n} .$$

Si  $n$  augmente indéfiniment,  $S_n - s_n$  tend vers 0. L'aire du domaine est alors la limite de  $(S_n)$  et de  $(s_n)$  ; elle se note

$$\int_0^1 (1 - x^2) dx = \text{aire}(D) \quad (\text{ce qui signifie en quelque sorte,})$$

somme -  $\int$  est un S stylisé - des aires de tous les rectangles de longueur  $1 - x^2$  et de largeur  $dx$ ).

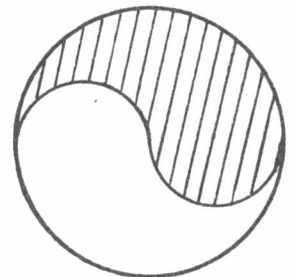
- Ex. 2.15 : Calculer cette aire, soit comme limite de  $S_n$  ou de  $s_n$ , soit en se souvenant des méthodes vues en terminale.

A l'origine de ce procédé, le mathématicien *Cavalieri* (1635) qui considérait une surface comme formée de lignes accolées appelées par lui "indivisibles" et qui énonçait :

"Les figures planes placées entre deux parallèles dans lesquelles des lignes quelconques parallèles aux premières découpent des segments égaux sont égales" (du point de vue de leurs aires).

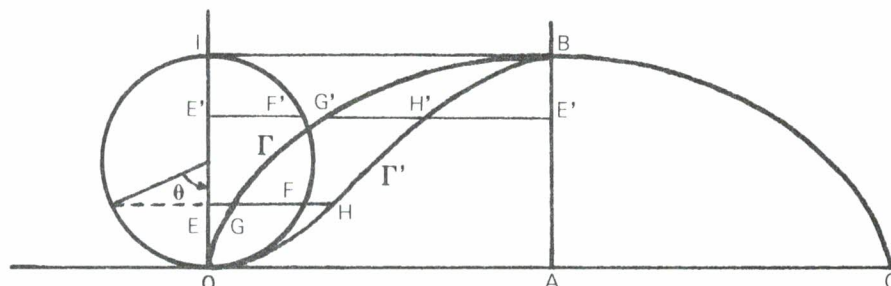
Nous dirions maintenant que les surfaces sont de même aire, l'adjectif "égal" ayant été réservé à des surfaces superposables.

- Ex. 2.16 : a) Montrer, à l'aide du principe de *Cavalieri*, que l'aire hachurée ci-contre est la moitié de celle du disque.
- b) Construire, en utilisant ce même principe et point par point, une figure de même aire que la précédente mais dont une partie de la frontière est portée par une droite.



En utilisant le principe de *Cavalieri*, *Roberval* (l'inventeur de la balance du même nom) a pu calculer l'aire de l'arche de cycloïde (cf. ce tome, page 15). En voici l'idée, développée par *J. Dhombres* dans son livre (1978) : "Nombre, Mesure et Continu ; Epistémologie et Histoire" (cf. exercice suivant).

- Ex. 2.17 : Lire le texte ci-dessous ; démontrer l'affirmation repérée par une accolade. Pour cela on pourra rechercher les coordonnées de G et la distance EF en fonction de  $\theta$ .



On sait qu'une arche de cycloïde (OFBC sur la figure 18) est le lieu d'un point fixe sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite OA (« Ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour achevé » dira Pascal dans son *Histoire de la Roulette* (appelée autrement trochoïde ou cycloïde). Roberval porte une longueur  $GH = EF$  à partir d'un point courant G de la cycloïde, parallèlement à l'axe OA. Il engendre la courbe OI'B. Par symétrie sur le cercle, symétrie répercutée de EH à E'H', le calcul prouve que la courbe lieu de H' divise le rectangle OABI en deux parties égales, si l'on applique le théorème de Cavalieri. Selon ce même principe, l'aire incluse entre les courbes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  égale l'aire du demi-cercle OFI. Bref, l'aire de la

demi-arche de cycloïde vaut en additionnant :  $\frac{HR \cdot 2R}{2} + \frac{HR^2}{2}$ .

On déduit donc que l'aire de l'arche OFBC entière vaut trois fois l'aire du cercle de base.

La définition de l'aire obtenue dans ce paragraphe nous oblige à ne considérer que des surfaces définies à l'aide d'une fonction réelle de variable réelle et délimitées par des parallèles aux axes. Pour évaluer l'aire d'un domaine quelconque D, on décompose alors D en un certain nombre de régions. On peut alors définir les portions de la frontière initiale ainsi déterminées par une fonction et calculer l'aire de chaque région comme indiqué précédemment. L'aire de la surface totale est alors la somme des aires des différentes régions.

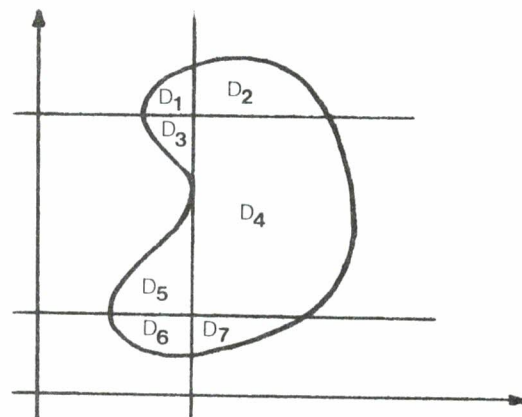


Fig. 13

Il existe des appareils qui réalisent pratiquement les calculs précédents : ce sont les intégrateurs ou planimètres linéaires.

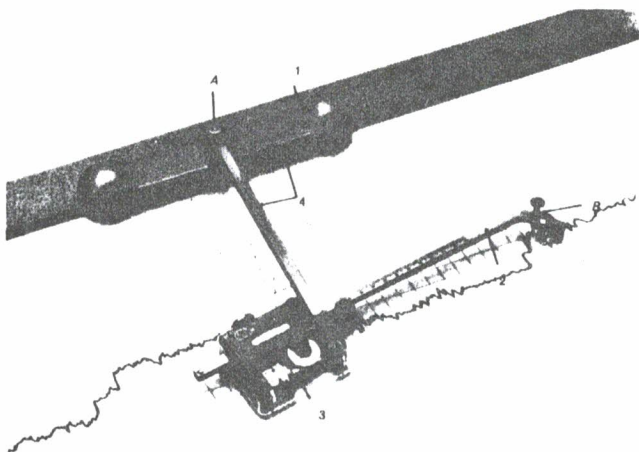


Fig. 2 - Planimètre linéaire. 1 règle-guide; 2 bras traceur; 3 mécanisme enregistreur; 4 chariot et bras polaires. (Cliché A. Ott)

Le chariot A glisse le long d'une règle qui représente l'axe des abscisses ; le traceur B sert à suivre la courbe et un compteur enregistre l'aire évaluée.

Pour plus amples détails, se reporter à l'"Encyclopédie des Sciences et des Techniques".

- Ex. 2.18 : La figure suivante montre un autre planimètre linéaire. Expliquer son fonctionnement et indiquer ce qu'il faudrait faire pour voir apparaître explicitement l'aire évaluée.

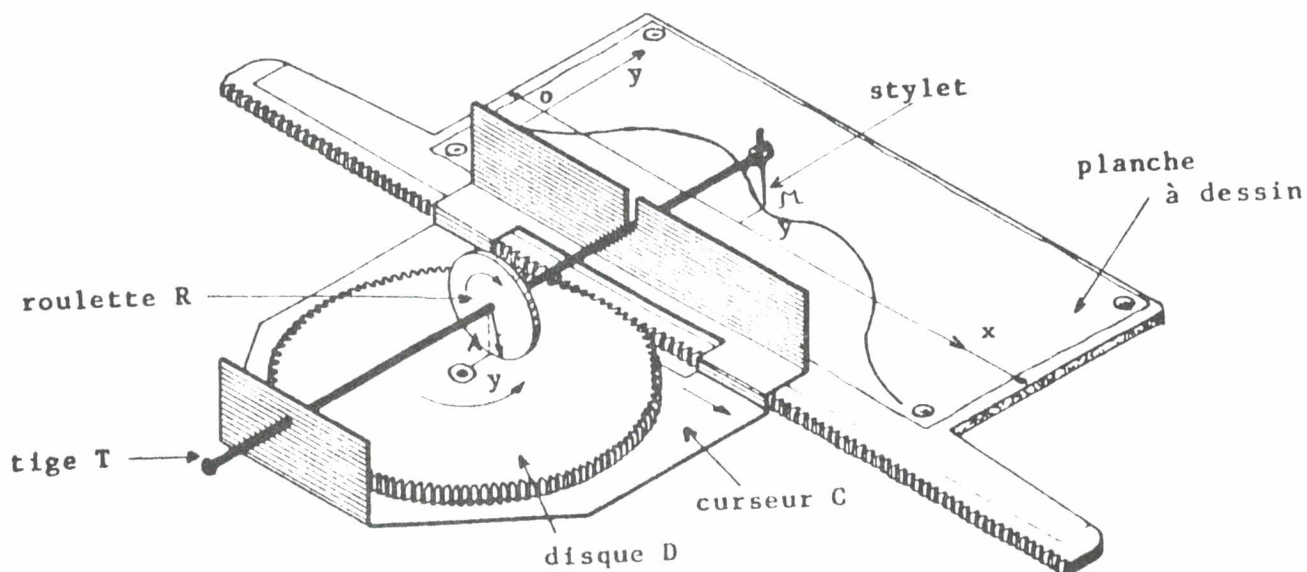


Fig. 14

● 2.5 - Quelques résultats à propos des surfaces gauches.

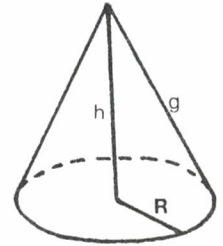
Le cas le plus simple est celui des polyèdres (cube, pavé, pyramides, ...) . Il suffit d'additionner les aires des différentes faces. Ces dernières étant des polygones, cela ne présente pas de difficulté majeure puisqu'on sait facilement calculer l'aire d'un polygone en se ramenant par exemple à des triangles. Les polyèdres font partie des surfaces développables. Les cylindres, les cônes en sont d'autres.

► Ex. 2.19 : On définit un cylindre par sa hauteur  $h$  et le rayon  $R$  de sa base. Calculer l'aire de sa surface développée.

► Ex. 2.20 : On définit un cône :

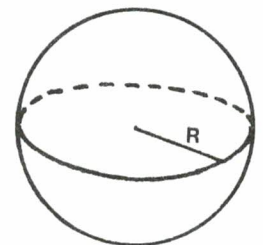
- soit par sa hauteur  $h$  et le rayon  $R$  de sa base,
- soit par  $R$  et la longueur  $g$  d'une génératrice.

Dans les deux cas, calculer l'aire de la surface développée.

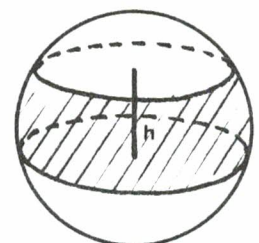


Le cas des surfaces qui peuvent être mises à plat n'est malheureusement pas général ; il suffit d'évoquer la sphère pour s'en convaincre. Des procédés d'intégration donnent alors des formules particulières.

L'aire de la sphère est ainsi  $A = 4\pi R^2$  .

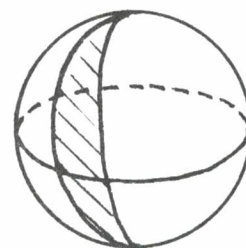


► Ex. 2.21 : On appelle zone sphérique l'intersection d'une sphère et de la portion d'espace située entre deux plans parallèles (on remarque alors qu'une calotte sphérique est une zone sphérique particulière).  
Trouver l'aire d'une telle surface sachant qu'elle est proportionnelle à la distance  $h$  séparant les deux plans.





- Ex. 2.22 : On appelle fuseau sphérique la surface délimitée sur une sphère par deux méridiens. Trouver l'aire d'un fuseau en utilisant un argument de proportionnalité.



- Ex. 2.23 : Le rayon terrestre étant approximativement de 6 350 km, quelle est la superficie de la terre ? Quelle est celle d'un fuseau horaire ?

Il existe un cas particulier où l'on dispose d'un résultat intéressant, c'est celui des surfaces de révolution, c'est-à-dire engendrées par une courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan. On a en effet le théorème suivant :

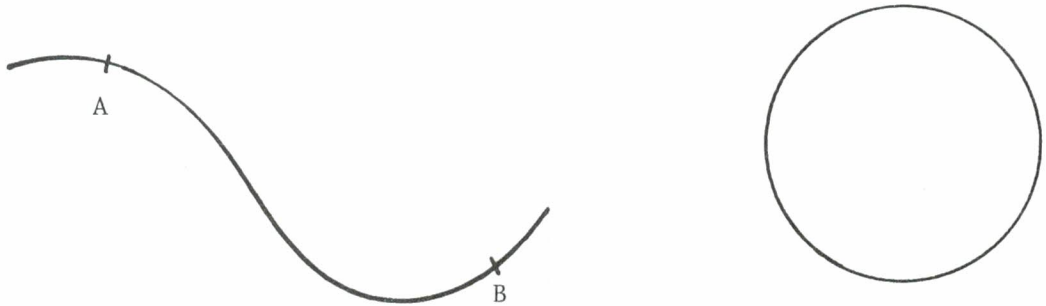
◆ Théorème de Guldin : L'aire d'une surface de révolution engendrée par rotation d'une courbe plane autour d'un axe situé dans son plan et ne la coupant pas, sauf peut-être en ses extrémités, est le produit de la longueur de cette ligne par la longueur du cercle que décrit son centre de gravité.

- Ex. 2.24 : Appliquer ce théorème pour trouver l'aire d'un tore (la courbe considérée étant alors un cercle).
- Ex. 2.25 : Retrouver par le théorème de *Guldin* l'aire de la surface latérale d'un cône.
- Ex. 2.26 : En appliquant le théorème de *Guldin*, déduire la position du centre de gravité d'un demi-cercle.
- Ex. 2.27 : On veut fabriquer une montgolfière en modèle réduit. On a besoin de savoir quelle quantité de papier (ou de toile) on doit utiliser pour la confectionner. Indiquer une démarche expérimentale pour répondre à cette question.

### ◆ III- MESURE DES LONGUEURS

Fixons le peu de vocabulaire qui sera employé dans ce chapitre :

- Une ligne courbe (ou encore courbe) est la trace sur une surface plane ou non d'un crayon bien taillé, dirigée "en continu" par une main ou par tout autre procédé mécanique.



- Une portion de cette ligne comprise entre deux de ces points A et B est un arc de courbe, le segment AB est une corde.
- En joignant deux points A et B par une ligne formée de segments on obtient une ligne brisée ou encore ligne polygonale.



#### ● 3.1 - Aspect pratique

La mesure des longueurs intéresse de nombreux corps de métiers qui ont donné naissance à autant d'instruments de mesure adaptés à leurs besoins.

Le charpentier ou le maçon utilisent le décamètre (ou le double décamètre) à ruban où ne sont portées que les graduations des centimètres ; si le maçon utilise aussi le double mètre où sont gravés les millimètres, il ne tient pas compte de ces derniers. Ce n'est pas le cas du menuisier qui se doit de travailler au millimètre près s'il veut que ses portes ou fenêtres ferment sans forcer tout en "collant" à l'encadrement. Une erreur de 1 mm sur le diamètre d'un piston enlèverait tout rendement au moteur : l'ajusteur travaille au  $\frac{1}{10}$  voire au  $\frac{1}{100}$  de millimètre et utilise des instruments de précision tels que le pied à coulisse ou le palmer.

- Ex. 3.1 : Comprendre les descriptions ci-dessous relatives à ces deux instruments (tirées d'un manuel de 6<sup>e</sup> de 1965).

### 6. Le Pied à Coulisse.

a) Sur une bandelette de carton, marquez tous les centimètres de 0 à 10.

Divisez une seconde bande de 9 cm en 10 parties égales que vous numéroterez également de 0 à 10.

Placez les deux bandes bord à bord comme sur la figure 9, de façon que la division supérieure 9 (S<sub>9</sub>) corresponde à la division inférieure 6 (I<sub>6</sub>) :

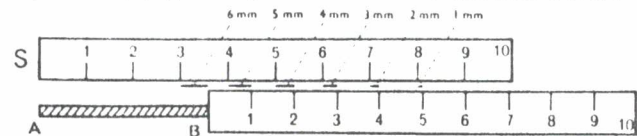


Fig. 9

L'écart entre les deux divisions S<sub>0</sub> et I<sub>0</sub>, c'est-à-dire la longueur de AB, est donc de 3 cm 6 mm, appréciée au millimètre près bien que les graduations ne portent que les centimètres. C'est le principe du **vernier**.

b) Le pied à coulisse (fig. 10) se compose d'une équerre dont la tige est graduée en millimètres, et d'une seconde équerre pouvant glisser le long de la première grâce à un curseur muni d'un vernier. Ce vernier comporte une longueur de 9 mm divisée en 10 parties égales de chacune 0,9 mm. Il permet ainsi de mesurer les longueurs au 1/10 de mm près.

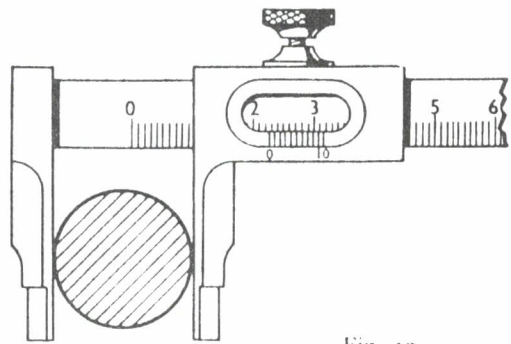


Fig. 10

Sur la figure 10 on peut lire :

Sur la tige, le nombre de mm (par défaut) précédant le 0 du vernier, soit 22 mm

Sur le vernier, le nombre de dixièmes de mm à l'endroit où les deux graduations correspondent, soit 7 dixièmes.

Le diamètre de l'axe est donc de 22,7 mm.

c) Utilisez le pied à coulisse pour mesurer l'épaisseur d'un cahier, d'un livre, le diamètre d'un crayon, d'un stylo, etc. (*Vous devez enserrer l'objet sans jeu, mais sans écrasement.*)

d) Il existe des verniers comportant 19 mm divisés en 20 parties égales. Ils permettent de mesurer à 1/2 dixième, soit à 0,05 mm près.

### 7. Le Palmer.

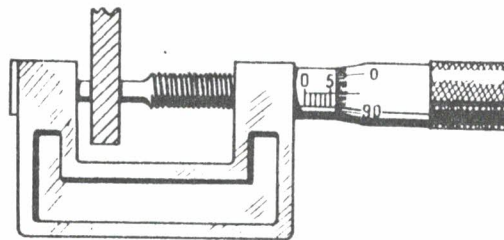


Fig. 11

a) C'est une vis qui se déplace, à raison de 1 mm par tour (pas de 1 mm), dans un manchon fixe sur lequel apparaît le nombre de tours, donc de millimètres (par défaut). Le tambour qui tourne avec la vis est divisé en 100 parties égales. On peut donc y lire, en regard d'un repère porté sur le manchon, le nombre de centièmes de mm. Par exemple, sur la figure 11, on lit 5,95 mm.

b) Utilisez le palmer pour mesurer l'épaisseur d'une feuille de carton, de tôle, le diamètre d'un fil de fer, etc. (*Attention : ni jeu ni écrasement.*)

Même les sportifs sont intéressés à la mesure de longueurs : l'amateur de jogging un peu pervers poussera devant lui son podomètre et pourra ainsi chiffrer ses performances au mètre près tandis que



le cycliste scrupuleux relèvera à l'issue de chaque sortie la distance parcourue à l'hectomètre près !

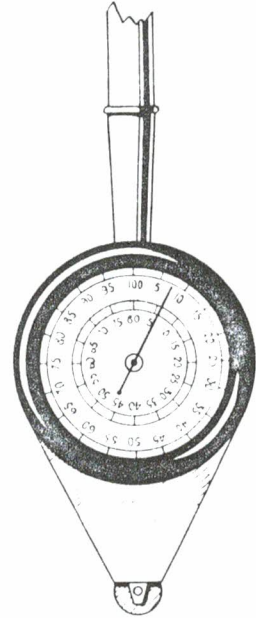
► Ex. 3.2 : Ouvrir un dictionnaire au mot "podomètre" et concevoir les plans d'un tel instrument.

► Ex. 3.3 : Le dessin ci-contre représente un curvimètre.

Quelle est la fonction d'un tel instrument?

Comment l'utilise-t-on ?

► Ex. 3.4 : Concevoir les plans d'un compteur kilométrique pour vélo.



Signalons aussi le mètre de la couturière (qui mesure 1m 50) et qui est gradué en cm, si bien adapté aux courbes des clientes. C'est encore celui-là qu'utilisent les membres du jury pour l'élection de Miss Monde.

Plus souple encore, la simple ficelle est souvent proposée par les enfants lorsqu'on les confronte au mesurage d'une ligne courbe, ce qui utilise implicitement l'idée que la longueur d'une courbe est invariante par déformation "non élastique" de celle-ci.

Enfin, la technique du roulement sous glissement donne aussi de bons résultats quand les objets s'y prêtent comme dans le cas de roues ou de couvercles. Cette idée est même utilisée à l'école élémentaire pour trouver une valeur approchée de  $\pi$ .

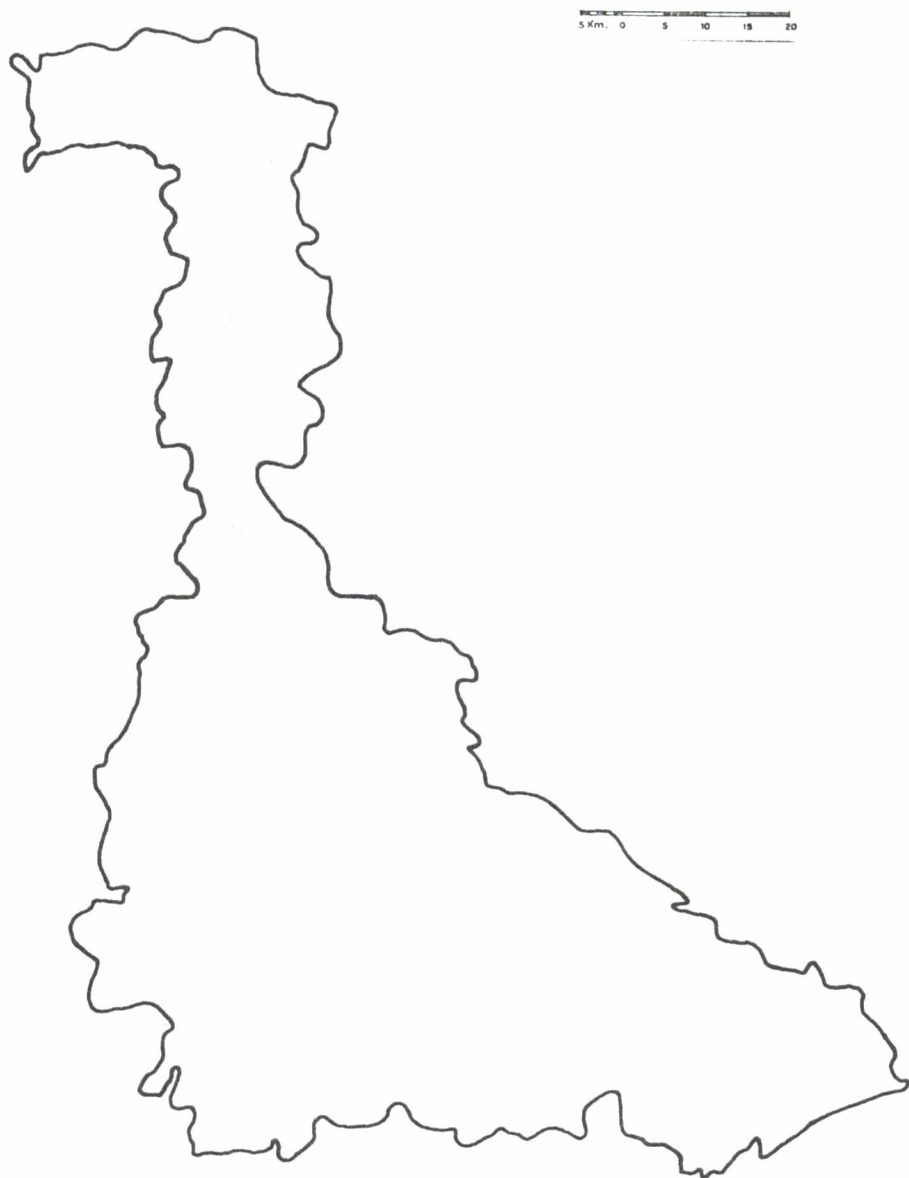
► Ex. 3.5 : Caractériser les domaines du plan dont on pourra mesurer la longueur du bord par ce procédé.

On "montrera" qu'une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que pour tout couple de points (A,B) pris dans le domaine, le segment AB soit entièrement

contenu dans le domaine. On admettra qu'il s'agit là aussi d'une condition suffisante. De tels domaines du plan sont appelés convexes.

On remarquera que partout où le roulement sous glissement donne un résultat, la technique de la ficelle s'applique : en effet un domaine convexe est aussi tel qu'une ficelle tendue autour du domaine touche chaque point du bord (ce qui n'est pas le cas d'un haricot par exemple).

- Ex. 3.6 : Estimer la longueur de la frontière de notre département sur la carte ci-dessous dont l'échelle est indiquée



● 3.2 - Aspect théorique

Il s'agit ici d'établir des formules permettant de calculer la longueur d'une courbe en fonction des paramètres qui la fixent.

Ainsi a-t-on, de manière évidente

$$\text{pour le carré} \quad P = 4 c$$

$$\text{pour le rectangle} \quad P = 2 (L+l)$$

Tant qu'il s'agit d'établir des formules pour la longueur de lignes droites ou brisées tout va bien et la trigonométrie est souvent mise à contribution.

- Ex. 3.7 : Donnez le périmètre d'un polygone régulier à  $n$  côtés inscrit dans un cercle de rayon  $R$ .

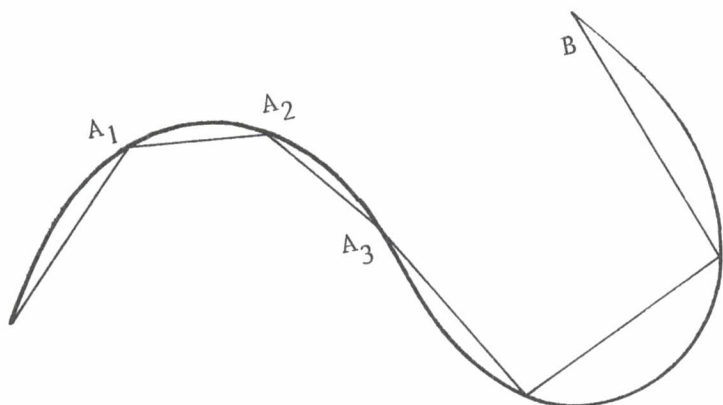
Dans les cas  $n = 4, 8, 6$  ou  $12$  calculez la longueur des différents segments que l'on peut faire apparaître en joignant deux sommets quelconques du polygone.

- Ex. 3.8 : Peut-on creuser un tunnel dans un cube de manière à pouvoir y faire passer un cube un peu plus grand ?

- Ex. 3.9 : Quatre villages sont disposés au sommet d'un carré. Concevoir un réseau routier de longueur minimale permettant de les relier entre eux.

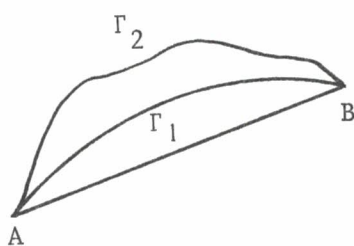
Quand il s'agit de déterminer la longueur de lignes courbes, on essaie de se ramener au problème précédent en cherchant deux lignes polygonales construites à partir de points de la courbe, l'une plus courte que la courbe, l'autre plus longue. On obtient alors un encadrement de la longueur cherchée. En réitérant le processus avec des lignes polygonales "collant" de mieux en mieux à la courbe, on a des chances de voir l'amplitude de l'encadrement tendre vers zéro, ce qui permet alors de trouver successivement toutes les décimales du réel qui mesure la longueur cherchée.

Pour trouver une ligne polygonale plus courte que l'arc de courbe donné, c'est facile : on joint un certain nombre de points successifs sur la courbe par des segments de droite.



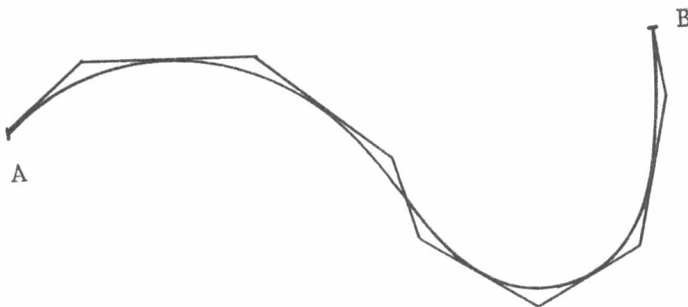
Chacun des segments de la ligne polygonale est plus court que l'arc de courbe de mêmes extrémités : c'est le postulat bien connu sur les longueurs qui affirme que le chemin le plus court pour aller de A en B (sur un plan), c'est la ligne droite.

Le postulat qui permet de construire une ligne polygonale plus longue que l'arc de courbe donné est beaucoup moins connu. Il peut s'énoncer ainsi :



si deux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  joignent A à B, si le domaine limité par  $\Gamma_1$ , et la corde AB est convexe, et si  $\Gamma_1$  est contenu dans le domaine limité par  $\Gamma_2$  et la corde, alors  $\Gamma_2$  est plus longue que  $\Gamma_1$ .

- Ex. 3.10 : Utiliser correctement le postulat précédent pour montrer que l'arc de courbe joignant A à B de la figure ci-dessous est plus court que la ligne brisée de mêmes extrémités.

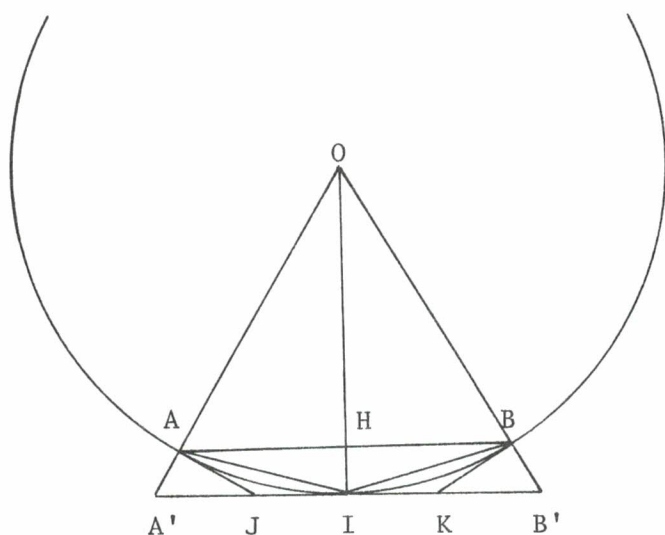


L'exemple fondamental qui illustre cette méthode est celui de la recherche de la longueur d'un cercle en fonction de son rayon.

L'idée, dûe à Archimède, est de construire une suite de polygones inscrits et circonscrits au cercle ayant à chaque étape deux fois plus de côtés qu'à l'étape précédente.

Soit donc  $\Gamma$  un cercle et  $\ell(\Gamma)$  sa longueur.

A tout polygone régulier  $p_n$  à  $n$  côtés inscrit dans  $\Gamma$ , on associe un polygone régulier à  $n$  côtés,  $P_n$ , circonscrit à  $\Gamma$ , comme le montre la figure ci-dessous :



$AB$  est un côté de  $p_n$ ,  $H$  est le milieu de  $AB$ ,  $OH$  coupe  $\Gamma$  en  $I$  et la tangente en  $I$  à  $\Gamma$  coupe  $OA$  en  $A'$  et  $OB$  en  $B'$  :  $A'B'$  sera un côté de  $P_n$ .

$I$  est bien sûr milieu de  $A'B'$  (pourquoi ?) .

Soit  $J$  le point d'intersection de la tangente en  $A$  à  $\Gamma$  avec  $A'B'$  et  $K$  celui de la tangente en  $B$  à  $\Gamma$  avec  $A'B'$   $IJA$  et  $BKI$  sont isocèles (pourquoi ?)

On associe alors à  $p_n$  le polygone régulier à  $2n$  côtés  $p_{2n}$  inscrit dans  $\Gamma$ , dont un côté est  $AI$  et le polygone régulier à  $2n$  côtés  $P_{2n}$  circonscrit à  $\Gamma$ , dont un côté est  $JK$ .

► Ex. 3.11 : Etablir que  $\ell(p_n) < \ell(p_{2n}) < \ell(\Gamma) < \ell(P_{2n}) < \ell(P_n)$  (sans faire de calculs)

Il n'est pas trop difficile de montrer que

$$(1) \quad \ell(P_{2n}) = 2 \frac{\ell(p_n) \ell(P_n)}{\ell(p_n) + \ell(P_n)} \quad \text{et} \quad \ell(p_{2n}) = \sqrt{\ell(P_{2n}) \ell(p_n)} \quad (1)$$

En effet les triangles  $B'BK$  et  $B'IO$  sont semblables (pourquoi ?).

D'où

$$\frac{IO}{B'O} = \frac{KB}{KB'} = \frac{KB}{IB' - KB} \quad \text{car} \quad KB = KI$$

De même, on a par Thalès :  $\frac{BO}{B'O} = \frac{HB}{IB'}$

Mais, puisque  $IO = BO$  (rayons du cercle), on a  $\frac{KB}{IB' - KB} = \frac{HB}{IB'}$

d'où  $KB = \frac{HB \cdot IB'}{HB + IB'}$  soit, en doublant :  $JK = \frac{AB \cdot A'B'}{AB + A'B'}$

De plus, les triangles isocèles  $BIA$  et  $BKI$  sont semblables (montrez-le), d'où

$$\frac{AI}{AB} = \frac{IK}{BI} \quad \left( = \frac{IK}{AI} \text{ car } BI = AI \right) \text{ soit : } AI = \sqrt{AB \cdot IK}$$

Comme  $\ell(p_n) = n AB$ ,  $\ell(P_n) = n A'B'$ ,  $\ell(P_{2n}) = 2n AI$  et  $\ell(P_{2n}) = 2n JK$ .

On obtient bien les formules annoncées.

A partir d'un polygone  $p_{n_0}$  régulier à  $n_0$  côtés inscrit dans  $\Gamma$ , on définit maintenant par duplications successives du nombre de côtés, deux suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  en posant :

$$\begin{array}{ll} a_0 = \ell(p_{n_0}) & b_0 = \ell(P_{n_0}) \\ a_1 = \ell(p_{2n_0}) & b_1 = \ell(P_{2n_0}) \\ a_2 = \ell(p_{2^2 n_0}) & b_2 = \ell(P_{2^2 n_0}) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_k = \ell(p_{2^k n_0}) & b_k = \ell(P_{2^k n_0}) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

L'inégalité annoncée dans l'exercice nous assure que

$(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k), \dots$  forment une suite d'interval-

les fermés emboîtés les uns dans les autres contenant tous  $\ell(\Gamma)$ .

Avec un peu de technique on montre aisément à l'aide des formules (1) que l'amplitude de ces intervalles tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini. Cette famille d'intervalles définit donc par son développement décimal un réel unique (Cf. ch. IX, partie "Nombres" du T. 1) qui ne peut être que  $\ell(\Gamma)$ .



Par convention, on note  $\pi$  le réel tel que  $\pi \times 2 = \ell(\Gamma_1)$  où  $\Gamma_1$  est un cercle de rayon 1.

Il ne reste plus qu'à sortir sa calculette !

- Ex. 3.12 : Partons d'un hexagone régulier inscrit dans  $\Gamma_1$  ( $n_0=6$ )  
Etablir que  $a_0 = \ell(p_6) = 6$  et  $b_0 = \ell(P_6) = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

A l'aide des formules (1) calculer  $(a_i, b_i)$   
pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . Combien de décimales exactes le  
dernier intervalle permet-il de donner pour  $\pi$  ?

- Ex. 3.13 : En partant de  $n_0 = 4$ , faire les calculs nécessaires  
pour avoir les 3 premières décimales de  $\pi$ .

Soit maintenant  $\Gamma_R$  un cercle de rayon  $R$ .  $\Gamma_R$  peut être regardé  
comme homothétique de  $\Gamma_1$  dans une homothétie de rapport  $R$ . Dans  
cette homothétie, les polygones utilisés pour approximer  $\Gamma_1$  devien-  
nent des polygones utilisables pour  $\Gamma_R$ , de longueur " $R$  fois plus  
grands" (c'est Thalès). Si  $(a_k)$  et  $(b_k)$  sont les suites définis-  
sant  $\ell(\Gamma_1)$ ,  $(Ra_k)$  et  $(Rb_k)$  seront des suites définissant  $\ell(\Gamma_R)$ .  
Autrement dit, pour tout  $k$  :  $Ra_k < \ell(\Gamma_R) < Rb_k$ .

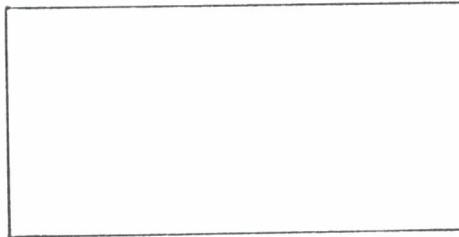
En divisant cette double inégalité par  $R$ , on s'aperçoit que la  
famille d'intervalles  $(a_k, b_k)$  définit aussi le réel  $\frac{\ell(\Gamma_R)}{R}$ . Il en  
résulte que  $\frac{\ell(\Gamma_R)}{R} = \ell(\Gamma_1)$ , d'où la formule qui, depuis, a fait le  
tour du monde :  $\ell(\Gamma_R) = 2\pi R$ .

- Ex. 3.14 : Etablir une formule donnant la longueur d'un arc de  
cercle en fonction du rayon du cercle et de l'ouverture  
 $\theta$  de l'arc

- 1) Quand  $\theta$  est exprimé en degrés
- 2) Quand  $\theta$  est exprimé en radians.

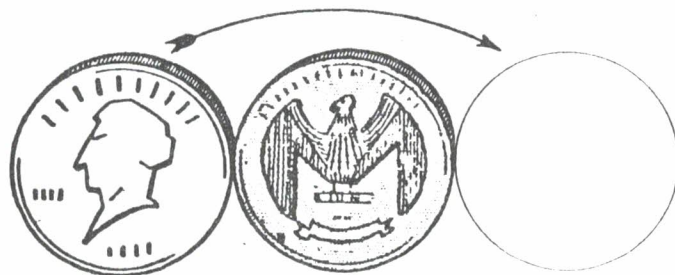
- Ex. 3.15 : La fraternité entre les peuples a enfin permis de ten-  
dre une corde tout autour de l'équateur. Si cette cor-  
de avait un mètre de plus, un chat pourrait-il se glis-  
ser en-dessous ?

- Ex. 3.16 : Un explorateur célèbre raconta une fois qu'après avoir fait 100 km vers le Nord, il s'était retrouvé à son point de départ ! Pouvez-vous dire d'où il était parti ?  
Mais encore ? ...
- Ex. 3.17 : Sur la sphère, quel est le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre ? L'article définit le a-t-il toujours sa raison d'être ?
- Ex. 3.18 : Quelle est la longueur d'un méridien terrestre . Pourquoi ? (vous pouvez consulter la notice historique en fin de chapitre).
- Ex. 3.19 : Quelle est la longueur du chemin le plus court joignant les points A ( $45^\circ$  lat N,  $32^\circ$  long E) au point B ( $35^\circ$  lat S,  $75^\circ$  long E) du globe terrestre ?
- Ex. 3.20 :



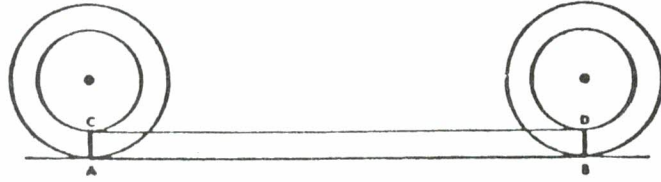
Positionner deux cercles de rayon maximal dans ce rectangle de façon qu'ils ne se chevauchent pas.

- Ex. 3.21 : Quand les pneus de votre voiture sont dégonflés, parcourraient-ils la même distance que quand ils sont gonflés ?
- Ex. 3.22 : Sur la figure ci-dessous il y a 2 pièces. On fait rouler la pièce de gauche le long de la moitié de la circonférence de l'autre. Dessiner la tête dans la position finale.





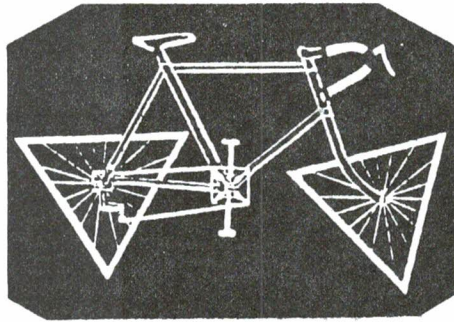
- Ex. 3.23 : Le cercle de la figure ci-dessous a fait une révolution complète en roulant de A en B.



La distance  $AB$  est donc égale à la longueur du grand cercle. Le petit cercle à l'intérieur du grand a aussi fait une révolution complète en parcourant la distance  $CD$ . Puisque  $CD = AB$  et que chaque distance est égale à la circonférence du cercle qui a été déroulé sur elle, le petit cercle et le grand cercle ont même longueur.

Où se situe l'escroquerie dans ce raisonnement ?

- Ex. 3.24 : Etude de quelques vélos singuliers : les roues ne sont pas circulaires mais polygonales.



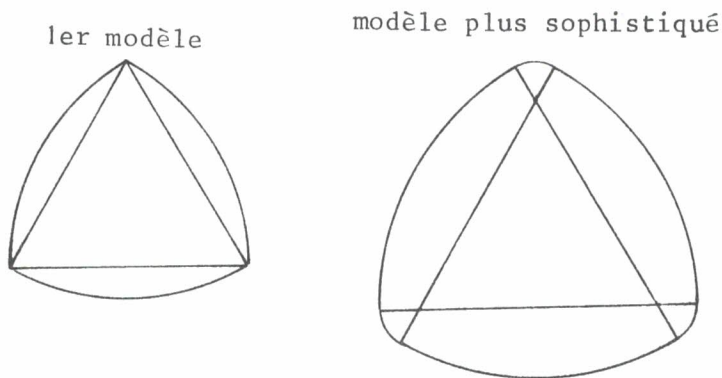
Tracer la courbe décrite par la valve pendant un tour de roue quand celle-ci a la forme :

- d'un triangle équilatéral
- d'un hexagone régulier
- d'un dodécagone régulier
- d'un carré
- d'un octogone régulier

Dans chacun de ces cas, calculer la longueur de la courbe et la distance parcourue par le papillon qui tient

la roue maintenue dans sa fourche et ce, en fonction du rayon du cercle circonscrit à la roue.

On peut penser que si le cycliste est tellement secoué sur son vélo, c'est parce que ses roues n'ont pas un diamètre constant. Qu'à cela ne tienne, nous présentons ici les dernières nées du salon du cycle 82, directement issues de roues équilatérales.



Vérifiez qu'il s'agit bien là de roues de diamètre constant.

Avec de telles roues, le cycliste sera-t-il encore secoué ?

- Ex. 3.25 : Une bobine de fil extra-plate est clouée sur une table préalablement recouverte d'une feuille de papier. On attache un crayon à l'extrémité du fil et on déroule ce dernier en le maintenant toujours bien tendu. La pointe du crayon décrit alors une courbe dont on garde la trace sur le papier.

Construire la courbe obtenue quand le fil a tourné une fois autour de la bobine pour chacune des formes suivantes de la base de la bobine.

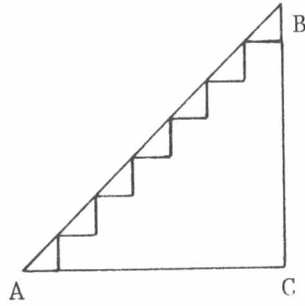
- Triangle équilatéral
- Hexagone régulier
- Dodécagone régulier
- Carré
- Octogone régulier.

Calculer dans chaque cas sa longueur en fonction du rayon du cercle circonscrit à la base de la bobine.

Calculer la longueur de la courbe décrite dans le quatrième cas au bout de 2 tours, 3 tours, n tours.

Voici maintenant quelques exemples destinés à attirer l'attention sur ce fait, contraire à une première intuition, que deux arcs de courbe ayant mêmes extrémités peuvent être infiniment voisins en ayant des longueurs totalement différentes.

1er exemple :



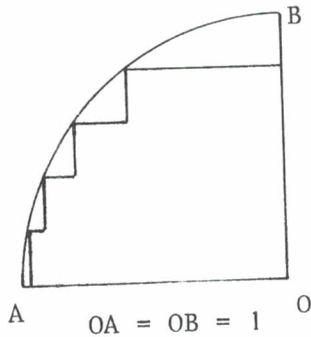
On suppose  $AC = CB = 1$

Soit  $e_n$  une ligne polygonale en escalier régulier à n marches joignant A à B. Sur la figure on a dessiné  $e_7$ .

Il est clair que pour n très grand, la hauteur de chaque "marche", qui vaut  $\frac{1}{n}$ , tend vers zéro et donc  $e_n$  peut être rendue arbitrairement proche de AB.

Pourtant  $AB = \sqrt{2}$  et  $\ell(e_n) = AC + CB = 2$

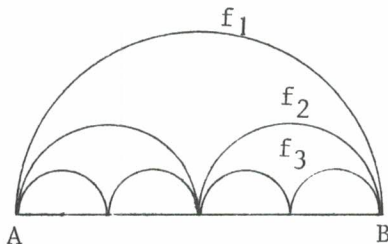
2<sup>e</sup> exemple : il est bâti sur la même idée. Cette fois c'est le quart de cercle  $\overrightarrow{AB}$  que l'on approche par des escaliers  $e_n$  à n marches adaptés à la situation (les marches sont toujours de même hauteur  $\frac{1}{n}$  mais leur longueur varie). On a placé  $e_5$  sur le dessin.



Démontrez que pour n assez grand,  $e_n$  peut être rendue arbitrairement proche de AB.

Mais  $\overrightarrow{AB} = \frac{\pi}{2}$  tandis que  $\ell(e_n) = AC + CB = 2 !$

3<sup>e</sup> exemple : un peu de couture.

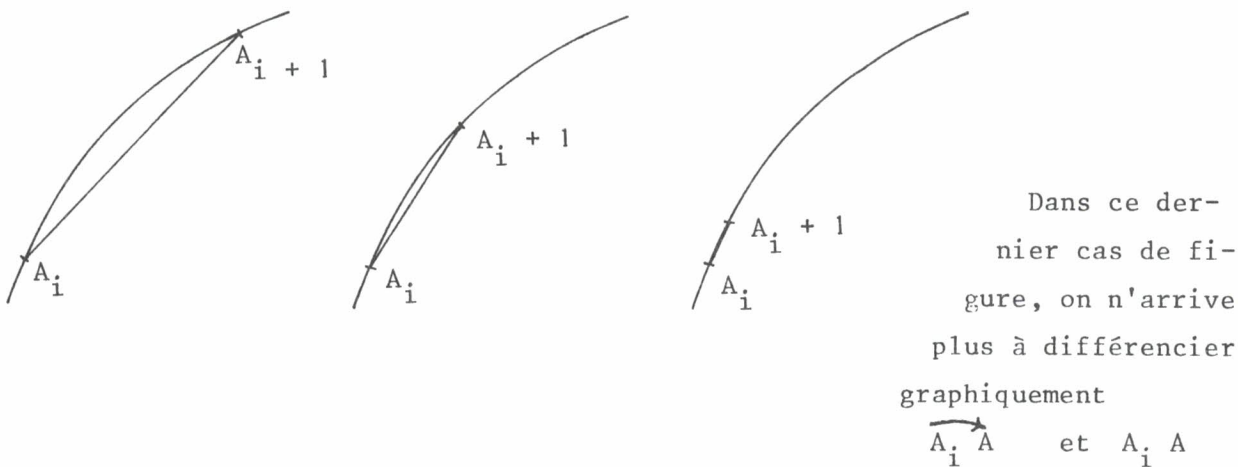


Soit AB un segment de longueur 2 et  $f_1$  le demi-cercle  $\overrightarrow{AB}$ . On construit de proche en proche des festons  $f_2, f_3, \dots$  en remplaçant à chaque nouvelle étape un demi de cercle du feston précédent par deux demi-cercles de rayon moitié, comme l'indique la figure. Le rayon des demi-cercles

composant  $f_n$  est donc  $\frac{1}{2^n}$ . Pour  $n$  assez grand on peut donc rendre  $f_n$  arbitrairement proche de  $AB$ .

Néanmoins  $AB = 2$  et on établira que pour tout  $n : \ell(f_n) = \ell(f_1) = \pi$

En fait, la situation est moins critique que ne le laissent entendre ces exemples. Et le lecteur pourrait presque à juste titre nous accuser de perversité : il n'est effectivement pas raisonnable, pour connaître la longueur d'un arc de cercle, de l'approcher, comme dans l'exemple 2, par des lignes polygonales en escaliers. (Par défaut). Une méthode sensée est bien plutôt pour avoir une valeur approchée d'un arc de courbe, d'extrémités  $A$  et  $B$ , de la jalonner d'un nombre suffisant de points  $A_1 A_2 \dots A_p$  et de mesurer la ligne polygonale  $A_1 \dots A_p B$ . Et plus la subdivision de  $\Gamma$  sera fine, meilleure devrait être l'approximation puisque pour deux points  $A_i$  et  $A_{i+1}$  très rapprochés sur une courbe, l'arc de courbe  $\overset{\curvearrowright}{A_i A_{i+1}}$  se confond pratiquement avec le segment  $A_i A_{i+1}$  :



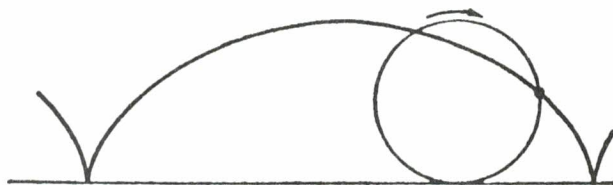
D'un point de vue théorique, on peut démontrer (et on l'admettra ici) que cette conjecture est fondée pour une grande catégorie de courbes qui recouvre en particulier toutes celles incluses dans notre définition naïve au début du chapitre (c'est à dire pour les connaisseurs,

les courbes de classe  $C^1$  par morceaux, l'outil de calcul adapté étant le calcul intégral).

Les exercices qui suivent ont pour objet d'appliquer expérimentalement cette méthode en vue de conjectures plausibles sur la longueur de quelques courbes classiques.

► Ex. 3.26 : Longueur d'un arc de cycloïde.

C'est le cas limite de nos vélos singuliers : les roues sont enfin circulaires. La courbe décrite par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite s'appelle une roulette ou une cycloïde. Cette courbe a fait les beaux jours des mathématiciens du début du 17<sup>ème</sup> (Cavalieri, Roberval, Pascal, l'ont étudiée avec succès).



Construire point par point une arche de cycloïde engendrée par un point d'un cercle de rayon 4 cm. Déga-ger une méthode pour cette construction. De laquelle des deux méthodes exposées ci-après se rapproche-t-elle ? (Méthodes exposées dans un manuel de géométrie expérimentale de 1903 à l'usage des élèves des cours professionnels et des ouvriers).

Partager la base AB (Fig. 120) en vingt-deux parties égales, et numérotter les points de division en allant de A et de B vers le milieu D, et élever en ce point une perpendiculaire DC égale au diamètre du cercle générateur. Décrire ce cercle, et le diviser en vingt-deux parties égales. Numérotter les points de division comme l'indique la figure ; faire passer par chacun d'eux des parallèles à la base.

Le point E de la cycloïde, situé sur la parallèle portant le n° 7,

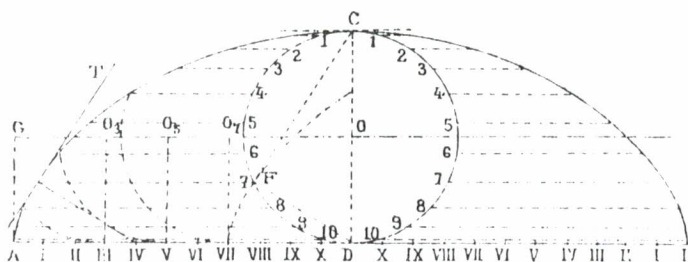


Fig. 120.

s'obtient en prenant 7E égale à AVII ; on déterminera ainsi vingt-deux points de la cycloïde demandée, que l'on réunira par une courbe continue.



La raison de ce tracé est la suivante. Dans la position du cercle générateur, c'est le point C qui engendre la cycloïde; si nous prenions pour point générateur tout autre point, 7 par exemple, nous formerions encore la même cycloïde, seulement elle aurait son origine au point 7 de la directrice, puisque l'arc D7 est égal à la droite DVH. Les deux figures seraient donc séparées par la distance AVH; il est évident que la même distance mesurée sur des parallèles à AC doit exister entre toutes les positions correspondantes des deux points générateurs.

On pourrait encore tracer la courbe de la manière suivante : le centre O du cercle générateur se déplace sur la parallèle GO menée à la directrice AB. Supposons le point générateur C au départ A; quand le cercle a roulé sur la directrice, et que le contact a lieu au point III, le centre est en O<sub>3</sub>, et le point générateur a la même cote que le point marqué 8, il est donc à l'intersection de la parallèle menée par ce point et de l'arc décrit du point O<sub>3</sub> comme centre, avec le rayon du cercle générateur. On déterminerait de même les autres points de la cycloïde.

Expliquez pourquoi on a choisi de partager la base en 22 parties égales (se souvenir qu'une valeur approchée de  $\pi$  à moins de 0,01 près est  $\frac{22}{7}$  )

Refaire un dessin avec une base AB de 22cm. Quelle longueur donne t-on alors au diamètre du cercle pour qu'il engendre une cycloïde de base AB ?

A l'aide des points obtenus pour construire la courbe, donnez une valeur approchée de sa longueur. Que peut-on conjecturer quant au lien entre cette longueur et le diamètre du cercle générateur ?

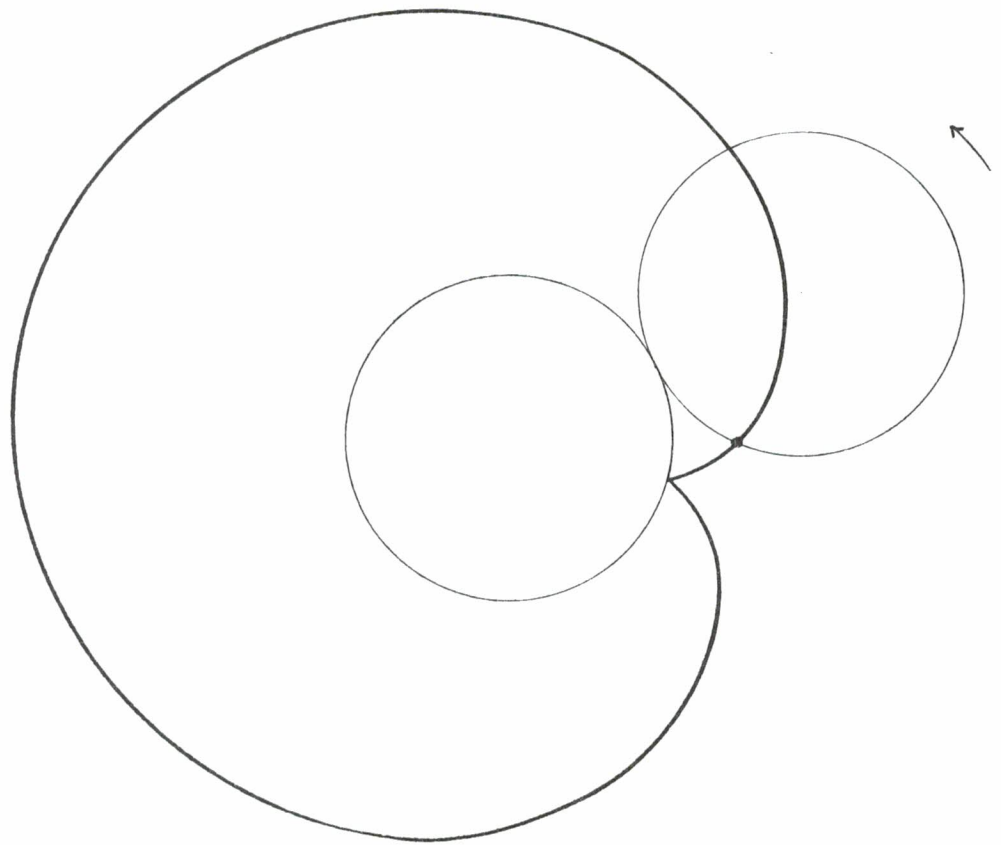
On pourrait démontrer par le calcul que cette conjecture est fondée.

► Ex. 3.27 : Longueur de la cardioïde.

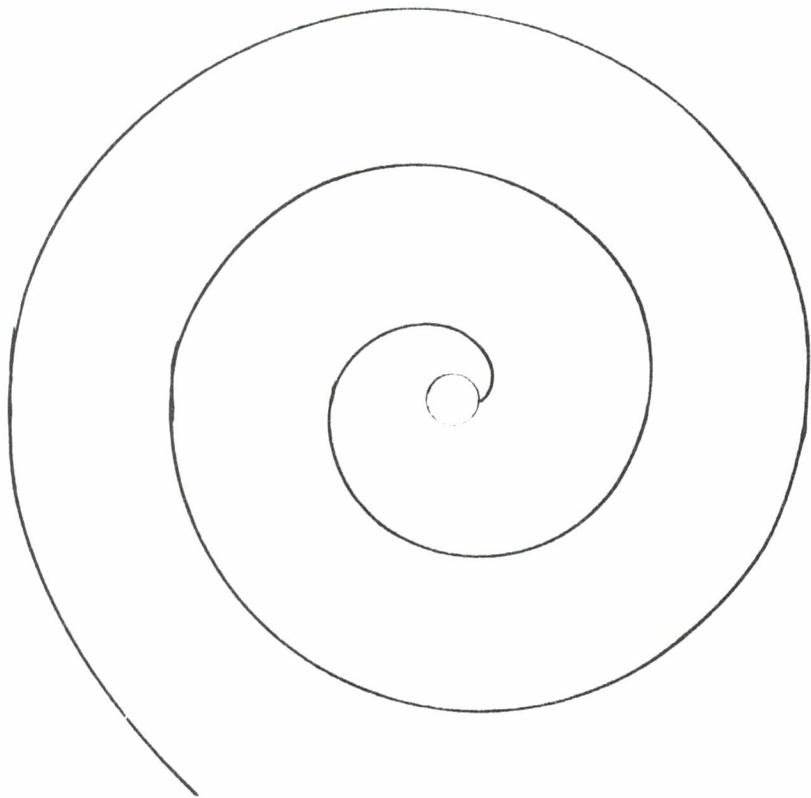
C'est la courbe décrite par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur un cercle de même diamètre.

Reprendre en les adaptant les questions de l'exercice précédent.

(Voir figure page suivante)



► Ex. 3.23 : Longueur d'une développante de cercle.



C'est le cas limite de nos bobines polygonales de l'ex. 3.25.

Autrement dit une développante de cercle est la courbe matérialisée par la pointe d'un crayon fixé à l'extrémité du fil d'une bobine circulaire fixée à la table, lorsqu'on déroule ce fil en le maintenant toujours tendu.

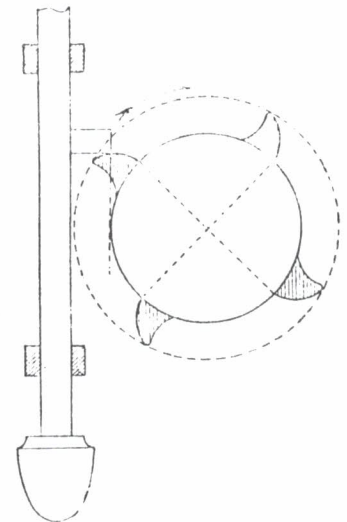
On reprendra les questions du type précédent. Plus précisément on dressera un tableau donnant la longueur des différents arcs de développante obtenus après un demi-tour de dévidage, 2 demi-tours, 3 demi-tours, 4 demi-tours ... jusqu'à conjecturer une loi donnant la longueur après  $n$  demi-tours en fonction de la longueur correspondant à un demi-tour.

On démontrera ainsi que la développante d'un cercle  $\Gamma_R$  de rayon  $R$  est l'homothétique d'une développante d'un cercle  $\Gamma_1$  de rayon  $1$ .

Vérifier que les diverses valeurs approchées pour la longueur de l'arc de développante d'un cercle  $\Gamma_1$  au bout d'un demi-tour semblent donner  $\frac{\pi^2}{2}$  pour valeur exacte (on admettra qu'il s'agit bien là de la valeur exacte).

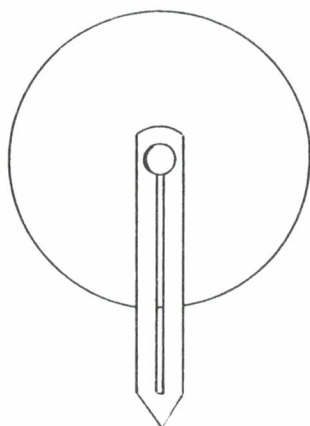
En déduire en fonction de  $n$  et de  $R$  la longueur d'un arc de développante de  $\Gamma_R$  correspondant à  $n$  demi-tours de dévidage.

Signalons que les propriétés des tangentes à une développante de cercle sont utilisées dans le profilage des cames destinées à soulever les pilons. La came agit ordinairement sur un mentonnet fixé à la tige du pilon, et quand elle est taillée suivant une développante du cercle, le pilon est soulevé verticalement.



► Ex. 3.29 : Le paradoxe du tourne-disque ou la spirale d'Archimède.

Collez une feuille de papier sur le plateau d'un tourne-disque et fabriquez une bande de carton présentant une fente longitudinale, et à son extrémité un trou permettant de placer la bande dans l'axe du plateau. Ce bras, qui ne doit pas gêner la rotation du plateau, sera maintenu dans une direction fixe.



Vue de dessus du dispositif

Le plateau tournant à vitesse constante, un marqueur est déplacé, à vitesse constante, de  $O$  vers  $A$ . Ce crayon a visiblement parcouru une distance égale à  $OA$ .

D'un autre point de vue, il a matérialisé à travers la fente une courbe  $S$  (appelée spirale d'Archimède). Sa pointe a donc parcouru une distance égale à  $\ell(S)$

$$\text{D'où } OA = \ell(S) !$$

Dessinez  $S$  à main levée sur le schéma ci-contre, si l'on sait que le plateau a exactement tourné de 2 tours quand le marqueur arrive en  $A$ .

Dans les mêmes conditions de vitesse du marqueur et du plateau, faire un dessin précis de la spirale associée à un plateau de 10 cm de rayon. Donnez une valeur aussi approchée que possible de  $\ell(S)$ .

► Ex. 3.30 : Au choix.

- estimer la longueur du sillon d'une face d'un disque tournant à  $33 \frac{1}{3}$  t/mn dont la durée d'écoute est 22 mn, le sillon étant situé dans une couronne circulaire de rayon  $r = 6,5$  cm et  $R = 14,5$  cm.
- estimer la longueur de papier d'un rouleau de papier hygiénique, les rayons intérieurs et extérieurs étant  $r = 2$  cm,  $R = 8$  cm sachant qu'on dénombre ... spires sur 1 cm.

Question subsidiaire : pourquoi le charmant bambin qui déroulait avec tant de plaisir un rouleau dont nous tairons la marque a-t-il fini sa carrière prématurément ?

Nous n'avons parlé ici que des courbes planes. Pour les courbes gauches, (tracées sur une surface non plane) la technique d'approximation par des lignes polygonales inscrites reste valable sur le plan théorique, et aussi le calcul intégral qui s'y rattache, mais si l'on veut faire quelques mesures expérimentales on est vite confronté à des problèmes insurmontables. Comment faire pratiquement pour mesurer la distance en ligne droite entre deux points d'une boule ? !

Signalons néanmoins un cas où la mesure des courbes gauches se ramène aisément à celle des courbes planes : celui où les courbes sont tracées sur des surfaces développables (par exemple sur un cylindre ou un cône)

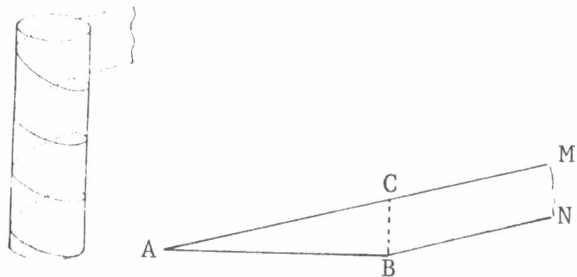
► Ex. 3.31 : Un escalier en colimaçon permettant d'accéder au sommet d'un phare de 50 m de haut s'élève de 2m 50 par "tour".

Il s'enroule sur un cylindre de 4m de diamètre. Les marches ont 1m de large.

Estimer la distance parcourue par le gardien

- pour monter (il prend l'escalier à l'extérieur)
- pour descendre (il le prend à la corde)

Matérialisation d'une hélice circulaire :



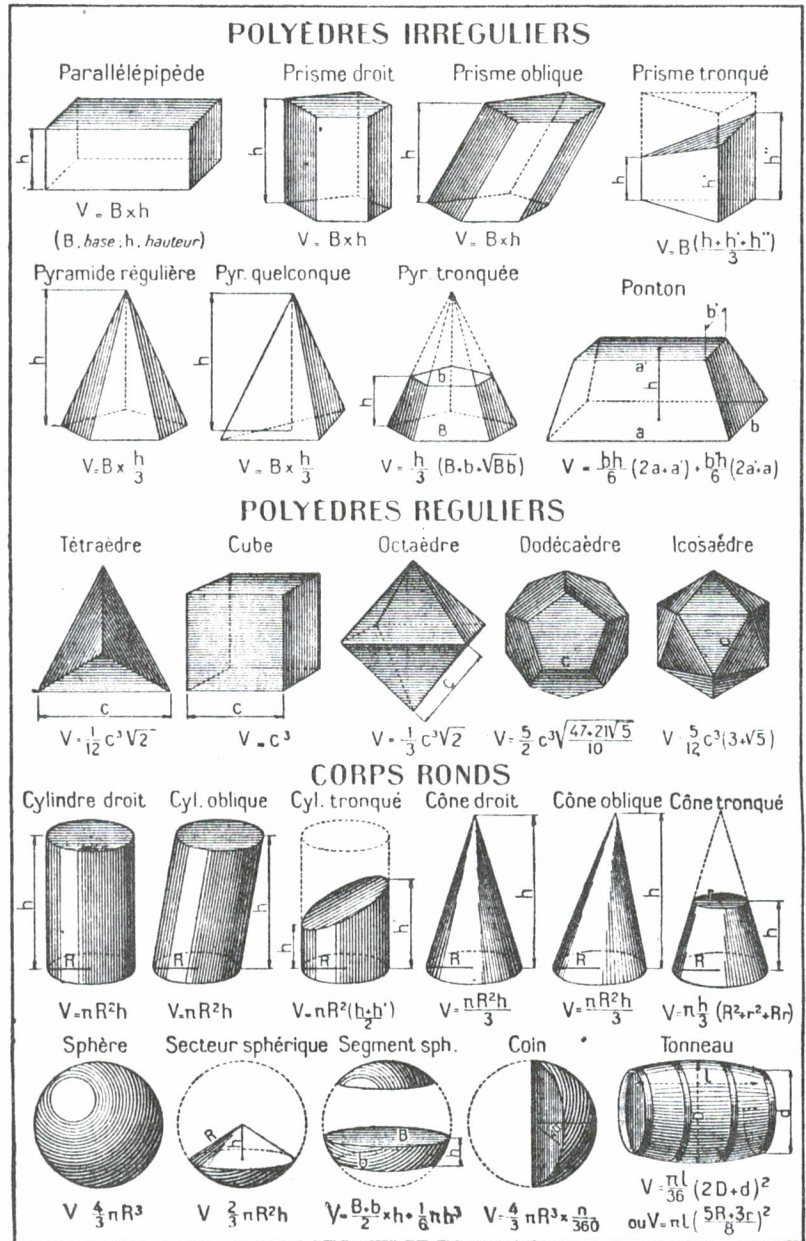


◆ IV - CONCLUSION.

On aurait pu imaginer que le plan de ce chapitre soit : 1) Lignes, 2) Surfaces, 3) Volumes. En fait 2) précède 1), et 3) n'y est pas. Si

les surfaces sont mesurées avant les lignes, c'est parce que c'est plus simple. Et si les volumes ne sont pas mesurés, c'est que c'est à peu près superflu quand on a vu les surfaces car la méthode y est la même (on remplace les petits carrés par des petits cubes). Au niveau modeste où nous nous sommes placés, il n'y aurait eu rien de nouveau dans une étude de la mesure des volumes, sinon quelques complications de calcul et de dessin. Et l'aspect pratique du problème est résolu si on se reporte à la

figure ci-contre, extraite d'une ancienne édition du Larousse, où l'on trouvera les formules donnant les volumes des solides usuels et de quelques autres.



FICHE DE PRÉSENTATION D'UN DOCUMENT

Titre : Mathématiques à l'École Normale - tome 3 (première partie : MESURE)

Date de parution : 4e trimestre 1984

Forme du document - Format : 21 x 29,7

Nombre de pages : 46

Auteur(s) : groupe :

animateur(s) : J.M. Didry, J. Lambert, G. Mathieu, M. Sibille

Public visé : - élèves des Écoles Normales d'Instituteurs  
- instituteurs

Pré-requis du lecteur visé : cf. tome 1

Motivation des auteurs : cf. tome 1

Apport spécifique de ce document par rapport aux autres travaux de même nature :  
pas de travaux de même nature

Contenu du document : théorie élémentaire du calcul des longueurs et des surfaces