Université Henri Poincaré NANCY 1
I.R.E.M. DE LORRAINE

Campus Scientifique Victor Grignard - BP 239 - 54506 VANDŒUVRE-LES-NANCY cedex
Tél. 03 83 68 49 41 *(secrétariat)* - 03 83 68 49 45 *(bibliothèque)* - *Fax.* 03 83 68 43 94

Enseigner l'essentiel en mathématiques

Jean-Pierre Ferrier

DIDACTIQUES N° 7

© Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université Henri Poincaré - NANCY I - Faculté des Sciences) - B.P. 239 - 54506 VANDOEUVRE-les-NANCY CEDEX
Dépôt légal : 2ème trimestre 2004
n° de la publication : 2.85406-177-2
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Jean-Pierre FERRIER

PREFACE

Jean Dhombres

Le titre qu'a choisi Jean-Pierre Ferrier — Enseigner l'essentiel en mathématiques — a le très grand avantage d'éviter une dissertation sur l'existence de l'essentiel, pour traiter la question de savoir ce que l'enseignement au collège et au lycée scientifique peut gagner à se présenter comme un essentiel. Quel est donc le sens du verbe "gagner" ? C'est parce que Ferrier analyse l'incohérence épistémologique des contenus enseignés, qu'il est motivé à entreprendre une réflexion de type épistémologique qui débouche sur des propositions. Dans les annexes de son fascicule, il ne se livre donc pas au féroce décapage des exercices de mathématiques auquel il nous a habitués, et fait concrètement des suggestions.

Ainsi, pour la géométrie au collège, seuls trois outils sont retenus : les cas d'égalité du triangle, le triangle rectangle et la trigonométrie qui lui est associée, enfin l'équation de la droite (ax+b), équation dite équivalente au théorème de Thalès. Tel était déjà le point de vue d'Auguste Comte, lorsqu'il relisait Descartes et rédigeait un Traité élémentaire de géométrie analytique en 1843. Comte écrivait au profit de l'enseignement élémentaire des mathématiques, et la cohérence qu'il avait était celle de la philosophie positive. Elle est avant tout une rationalisation des étapes nécessaires au progrès de l'esprit humain, et les mathématiques jouent alors un rôle spécifique pour éliminer les idées "métaphysiques", dont la présence à l'école serait une catastrophe intellectuelle. Il faut aussi entendre Comte vitupérer contre les académiciens géomètres de son époque, qu'il accuse de ne pas avoir compris la raison pour laquelle ils enseignaient. Ces mathématiciens, dont Michel Chasles, préféraient une "belle" géométrie synthétique à la géométrie analytique aux calculs lourdauds. Comte rétorquait avec son exemple de l'équation de la droite, devant remplacer le théorème de Thalès. Comte inventait d'ailleurs l'expression de "coefficient angulaire", qui est longtemps resté une expression mathématique usuelle, créant ainsi un objet géométrique de pensée pour celui qui calcule alors même qu'il s'agit d'un coefficient . Ferrier a des volontés semblables, et elles peuvent aller jusqu'à des interdits : par exemple lorsqu'il déduit qu'il ne faut pas "introduire les transformations, comme les symétries axiales ou centrales, pour s'en servir de point de départ d'une démonstration". Son point de vue d'un nécessaire retour à la " géométrie élémentaire du XIXe siècle " ne présente donc pas l'ambiguïté de prétendre revenir à la géométrie euclidienne. L'exemple de l'assimilation du théorème de Thalès à l'équation cartésienne de la droite en est la preuve.

Si j'ai ainsi pris cet exemple, mineur dans l'économie du texte de Ferrier, c'est que j'espère ainsi donner à comprendre que le lecteur visé par le texte exigeant de Ferrier est celui qui veut réfléchir à la nature de ce qui fait mathématiquement sens dans l'enseignement. Il ne faut donc pas prendre les mots épistémologiques de Ferrier en un sens vague, mais toujours les associer aux mots mathématiques venus d'abord. Ainsi, pour cette géométrie, Ferrier reprend une expression de Bkouche selon lequel la géométrie est la première "science physique" : il a bien raison, à condition toutefois d'ajouter ce qui est bien connu des mathématiciens, mais moins des philosophes, dire que cette science a, depuis Descartes, dépassé un certain point de vue de réalité phénoménale et que la vision physique passe par une écriture d'algèbre, par exemple par la si simple algèbre contenue dans le traitement de la droite cartésienne. On aura compris que, pour Ferrier, l'essentiel de la géométrie élémentaire est dans la liaison entre un calcul simplement mené et la réalité des corps géométriques. Dans l'essentiel est entendu un certain type de démonstration.

D'emblée, Jean-Pierre Ferrier se justifie de parler d'enseignement dans le Secondaire, alors qu'il ne le pratique pas lui-même. Il s'appuie en effet sur des textes produits par les Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques et sur l'expérience que ces Instituts ont capitalisée. Je lui fais tout à fait confiance à propos de cette expérience, et d'ailleurs il est directeur d'Irem. Et il a en outre son expérience de professeur d'université, de formateur, donc d'enseignants du second degré. Aurait-il mieux fait de citer plus précisément quelques publications des Irem , et d'apporter au débat les divers points de vue. Jean-Pierre Ferrier a ici choisi une autre voie, souvent préférée par les auteurs dans les Irems : celle de faire valoir avec une certaine passion son point de vue. Alors on ne s'ennuie pas du tout à la lecture d'un tel texte, car on voit passer des idées mathématiques qui peuvent structurer un enseignement. J'assure le lecteur qu'il lira avec intérêt les propositions de Ferrier sur la notation fonctionnelle, sur l'intégrale, etc., et il serait mal séant pour moi de les résumer, car tout l'intérêt est dans le cheminement. La force dialectique de Jean-Pierre Ferrier force finalement le lecteur à s'interroger sur ce que lui, lecteur, pense vraiment. N'est-ce pas l'essentiel ?

Une incohérence majeure d'ordre épistémologique consiste pour Ferrier à parler d'interdisciplinarité entre mathématiques et physique, et sa crainte est de voir ainsi disparaître l'unité de la science. Mais il convient de considérer que physique et mathématique constituent deux moments distincts de l'esprit. On peut approuver, mais alors la question devient celle de savoir comment, à l'école, l'on peut revenir du moment physique au moment mathématique, pour en changer la signification. Souvent des questions de cet ordre furent posées à l'école dans l'histoire. Je ne prendrai que la question de la notation vectorielle : c'est en France un physicien, Paul Langevin, et non un mécanicien ou un mathématicien, qui l'imposa finalement. En faisant comprendre que la notation n'est pas celle d'un segment orienté, mais désigne un élément d'un espace vectoriel, c'est-à-dire un objet se comportant d'une certaine façon selon des opérations, par exemple l'addition dans $\mathbf{R}^3$ se faisant suivant la diagonale d'un parallélogramme (j'ai bien dit parallélogramme).

Rien dans une flèche ne désigne cette addition, que la physique des forces fait pourtant saisir dans des cas concrets comme les poulies et les poids attachés (donc dans un plan). Mais justement, au début du XXe siècle, la physique des forces était considérée comme mathématiquement incorrecte, à la suite de cirtiques anciennes de d'Alembert, reprises par Comte ! Langevin a donc dû lutter contre les mathématiciens, et tout le poids attribué à la tradition analytique d'un Lagrange, pour leur faire admettre une notation que permette de voir les espaces vectoriels (je dis bien les espaces vectoriels). Je suis tout à fait d'accord avec Ferrier pour dire que l'espace vectoriel n'est pas une application des mathématiques à la physique, mais je pense que le moment de la compréhension du vectoriel passe des mathématiques

(avec une notation et une flèche pour désigner un objet), à une physique déjà modélisée (l'addition plane, ou composition par exemple de deux forces ou de deux vitesses), et revient à une mathématique pour avoir l'espace vectoriel. Je crois que de nombreuses brochures des Irems ont dit cela dans le passé (mais sans doute pas toutes). Je suis sûr que ces brochures gagneraient à être repensées dans le cadre de TPE, car c'est souvent cette addition des forces qui fait la modélisation mathématique, et ses difficultés. Je ne peux qu'approuver ce qu'enjoint Ferrier : "que les enseignants d mathématiciens prennent un peu de l'exemple de leurs collègues physiciens !". Mais, si l'on suit sa logique, a-t-il raison de dire qu'il leur restera assez de place pour le formalisme et la rigueur ? N'y a-t-il donc pas de rigueur dans le formalisme des espaces vectoriels que je fais remonter, un peu par provocation, à Langevin ? Une fois de plus, dans l'éducation mathématique, il faut être modeste, c'est-à-dire tenter d'objectiver les raisons de ce qui "marche" dans une classe, et pour cela rien ne vaut la mise en commun critique entre professeur d'expériences. Les Irems, Ferrier en conviendra, ont offert par le passé, et offrent encore aujourd'hui de bons lieux pour le faire.

INTRODUCTION

Le présent document est une première tentative pour définir en quoi peut consister cet *essentiel* que l'on cherche à enseigner en mathématiques. Sa fonction est de faire réagir, soit en enrichissant le discours soit en montrant certains écueils, et en s'appuyant dans les deux cas sur ce tout qui a pu être écrit par les uns et les autres et sur l'expérience des IREM bien sûr.

Pour commencer on aborde principalement le *collège* et le *lycée scientifique*. C'est en effet là que le travail des IREM est le plus riche et le plus facilement accessible. On part d'un constat, certes non unanime, celui d'un enseignement des mathématiques qui serait *sinistré*. Ce constat est fait lui-même de plusieurs éléments. Le premier, et le plus important, est le fait qu'un élève puisse traverser toute sa scolarité, et même réussir, sans ne jamais rien *comprendre*. Bien sûr il est difficile de s'entendre sur le sens de comprendre; en revanche on s'accordera aisément sur ce que signifie ne rien comprendre du tout. Si l'on se réfère à l'étymologie, et donc aux racines *cum* et *prehendere*, on pense à l'incapacité de relier entre eux les divers aspects, le savoir se résumant à un réflexe concernant chacun pris isolément.

Un autre élément du constat est lié au contenu de l'enseignement. On ne peut en nier l'importance, quel que soit le mode de construction du savoir auquel on se réfère. Malheureusement le contenu actuel de l'enseignement des mathématiques au collège ou au lycée est fondamentalement *incohérent* en plusieurs occasions. C'est le cas pour la géométrie du collège de laquelle on discutera en détail. Le paradoxe est que la présentation choisie conduit à bâtir de prétendues démonstrations en se fondant sur une observation passive. A ce compte-là on aurait pu observer directement le résultat. C'est un peu comme ce commerçant qui vendait les brosses qu'il assemblait après avoir volé le bois et le crin et qui ne s'était pas rendu compte qu'il pouvait aussi voler des brosses toutes faites.

La présentation des limites et dérivées au lycée est tout aussi incohérente. On balance des définitions abstraites dans lesquelles un mathématicien aura beaucoup de peine à se reconnaître et qui ne voudront strictement rien dire à un élève. Partant de là on admet tout, énonçant des théorèmes qui ne peuvent avoir de sens et qu'il faut donc accepter comme des *mystères*, c'est-à-dire des vérités partiellement révélées. Le tout est barbouillé d'une rigueur formelle parfaitement stérilisante.

Cette incohérence du contenu n'est malheureusement pas le fait de quelques initiatives malheureuses. Surtout il n'est pas dû au souci de se mettre à la portée des élèves, auquel cas on comprendrait volontiers que tout ne soit pas forcément expliqué en détail. C'est simplement le fait de l'inclination fort répandue consistant à tenter de singer le discours rigoureux d'un traité mathématique. La transposition didactique consiste alors à vider le discours de toute sa substance. C'est un peu comme un poème dont on n'écrirait que les rimes.

Derrière cela se cache un *contresens* majeur sur ce qu'il faut entendre par des mathématiques. Pour cette raison on commencera par en discuter. Comment pourrait-on chercher l'essentiel si l'on ne sait pas de quoi?

Même si cela n'est pas envisagé dans ce fascicule, il faudra finir par parler de *programmes.* Il ne s'agira pas de faire le travail des comités qui en ont été chargés. Aussi, dans un premier temps, n'irait-t-on pas dans le détail, se contentant d'esquisses, parlant d'un programme pour le collège et d'un programme pour le lycée scientifique. Le rôle que l'on attend de ces programmes n'est pas qu'il encadre rigoureusement l'activité. Bien au contraire il s'agira de *permettre* que l'on enseigne autrement. Car si l'on commence par dire que l'important n'est pas les programmes, chacun aura compris que l'on ne veut pas y toucher. Alors on ne pourra strictement rien faire. Dans le cadre des programmes actuels, nous dira-t-on, il est impossible de faire autrement que ce qu'on fait. Il est donc très important de dire qu'on va tourner autour des programmes jusqu'à ce qu'ils s'effondrent comme les murailles de Jéricho.

Bien sûr l'entreprise ne fait pas table rase de la réflexion développée dans et hors des IREM. On constatera qu'on fait allusion aux travaux de la CREM. Sans doute ce premier jet n'a-t-il pas intégré tout ce qui pouvait l'être.

De même ne s'agit-il pas de partir en guerre contre des comités de programmes. Le moment venu les IREM pourraient très bien collaborer avec eux. De même seront-ils attentifs à toutes les réactions des institutions concernées.

Il y a un point important qui nous rend la tâche particulièrement difficile. Pour ce qui est du collège, comme du lycée scientifique, il faut penser à des programmes souples, adaptables à la diversité des objectifs et des capacités de chacun. Au collège, ce fameux "collège unique" devenu "collège pour tous", on doit aussi bien considérer ceux qui en attendent une variante de l'ancien certificat d'études primaires que ceux qui veulent poursuivre des études scientifiques. Au lycée on ne peut pas faire d'hypothèse quand à l'organisation future, avec des programmes complémentaires comme aujourd'hui ou des classes distinctes — MPC et PCB par exemple — un peu comme hier.

Revenons pour terminer sur l'essentiel. Il ne s'agit pas de réduire pour réduire mais de se plier à au moins un grand *principe.* La connaissance scientifique n'est pas fondée sur l'argument d'autorité; elle procède de la conviction et la critique. Pour cette raison il est important de tout démontrer. On verra qu'on peut faire des démonstrations rigoureuses sans partir nécessairement de définitions formalisées. En revanche présenter des définitions incompréhensibles et admettre les résultats les plus fondamentaux n'est jamais acceptable.

Le texte initial a été très largement corrigé, précisé, enrichi par Jean Dhombres que dois particulièrement remercier pour le soin méticuleux qu'il a apporté à sa lecture. Son intervention était particulèrement bienvenue dans la mesure où l'on a cherché à s'appuyer le fondement épistémologique des mathématiques, sur l'origine logique des concepts et sur leur portée. Il est vrai qu'on peut se faire une idée à partir des mathématiques d'aujourd'hui, surtout quand on a eu la chance de dialoguer avec d'autres scientifiques dans un cadre assez général. Mais on ne peut pas complètement s'abstraire d'éléments historiques pour comprendre la genèse de la Science en général et des mathématiques en particulier.

C'est là que le regard de l'historien est irremplaçable. Et le résultat est très surprenant. Il y a en général une grande convergence entre ce que l'on pressent en interprétant l'état actuel des mathématiques et ce que nous apprend un passé remis en perspective.

Jean-Pierre Ferrier
12 avril 2004

ESSENCE

L'unité de la Science

Avant de rechercher l'*essentiel*, on va se demander en quoi consiste l'*essence* des mathématiques. Pour cela on va s'appuyer sur des réflexions de Rudoplh Bkouche à propos de la géométrie, complétées par la vision communiquée par Jean Dhombres. Il ne s'agit pas de faire de l'*histoire* des sciences. On cherche les origines des mathématiques sur un plan strictement logique, dans une approche purement *épistémologique*. Cependant la construction des idées s'étant faite dans le temps, l'explication rencontrera en partie l'histoire.

Le mot mathématique lui-même vient du mot grec

$$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$$

qui désigne très généralement l'étude, la science, la connaissance, avant de pouvoir être spécialisé par la mathématique. On retrouve la même racine dans la

$$\mu\alpha\theta\eta\sigma\iota\varsigma$$

qui est l'action d'apprendre, de s'instruire.

Cette instruction est particulière en se sens qu'elle se réfère à l'enseignement que le maître transmet par le discours, mais c'est le discours hypothético-déductif, par opposition à l'enseignement des arts ou celui des techniques militaires par exemple. Souvent d'ailleurs cette instruction se fait dans un dialogue. Il n'y a pas un grave anachronisme que de faire entrer dans cette instruction le "débat scientifique" que certains préconisent aujourd'hui .

Ainsi, pris au sens originel, le mot *mathématique* est-il exactement synonyme de celui de *science*, pris au sens contemporain cette fois. De fait l'étude de la nature est devenue scientifique à mesure qu'elle a intégré le discours hypothético-déductif, c'est-à-dire à mesure qu'elle s'est mathématisée. Cela a commencé par le dénombrement, a suivi par la géométrie, avec notamment la mesure des longueurs, aires et volumes. Aujourd'hui cela comprend bien sûr toute la physique et bien au-delà. Prendre comme slogan

l'unité de la Science

n'est que reconnaître cette construction commune. Cela n'est pas sans avantage. Y a-t'il besoin d'insister sur l'utilité des sciences en général? Les physiciens se croient-ils sans cesse obligés d'expliquer l'utilité de leur discipline?

Dans le même ordre d'idées, on se croit obligé d'expliquer aux lycéens que les mathématiques ne sont pas une science morte alors que la question n'est simplement pas posée pour la physique ou la biologie. Or il est bien difficile d'expliquer de façon convaincante qu'il y a encore des mathématiques à faire. L'exemple du théorème de Fermat, dont l'énoncé est accessible à tous, est mauvais. Il relève du challenge comme, pour reprendre une image donnée par Hilbert, celui consistant à envoyer une mouche sur la lune. Certes d'autres exemples, dont l'importance est directe, peuvent être présentés assez tôt: le théorème des quatres couleurs, les fractales, certains aspects du chaos ... mais cela n'aura pas de rapport avec ce qu'on enseigne. En revanche il faudrait expliquer aux élèves que les mathématiques sont une partie indétachable de la Science, et le montrer chaque jour dans l'enseignement.

Revenons à l'essence des mathématiques, en prenant cette fois le terme dans le sens contemporain. Il reste qu'il est impossible de distinguer les mathématiques dans la Science, en opposition à d'autres disciplines, expérimentales par exemple. Il n'y a pas de frontière. D'ailleurs la géométrie (euclidienne) fait partie des mathématiques du lycée, comme la mécanique dans un passé récent alors que l'optique géométrique faisait partie de la physique. Aujourd'hui la mécanique est laissée à la physique, alors que la mécanique classique n'est que l'addition d'une dimension supplémentaire de temps, pour ne pas parler de la mécanique relativiste, qui ne serait qu'une (autre) géométrie.

En fait il reste bien, au lycée et dans les deux premières années universitaires, l'outil, développé par et pour la mécanique, des équations différentielles, encore qu'on cherche souvent à en minimiser la place. Les nouveaux programmes de terminale scientifique, qui introduisent la fonction exponentielle par son équation différentielle, ont écarté l'oscillateur harmonique. Non seulement on a éliminé toute référence au contexte, s'interdisant de parler de masse par exemple, mais on manifesterait aujourd'hui une forme de réticence envers ces spécialités qui ont été associées de trop près à la physique.

Une singularité des mathématiques est qu'on y trouve des savoirs pérennes, comme dit Rudolph Bkouche, relativement anciens. Elles se démodent moins vite, dans l'ensemble, que d'autres sciences. Cependant il serait dangereux d'en tirer une règle. La théorie des probabilités est-elle ancienne?

Logiquement les mathématiques se manifestent par leur côté général et abstrait, lequel est plus marqué que dans la moyenne de la Science. Pour autant celà n'empêche pas la physique de rechercher une approche générale ou unificatrice. Les mathématiques sont moins directement confrontées au monde réel, mais n'en sont pas séparées pour autant. Parce qu'elles ont été et qu'elles restent fortement inspirées par la physique. Tout est donc une question de degré et aussi de convention, puisqu'il faut spécialiser de plus en plus pour avancer et donc établir des divisions de gouvernance dans la société scientifique. La vision élargie est réservée à quelques élites. Dans une discussion à propos des grands programmes de la recherche européenne, on avançait l'idée qu'il fallait des "architectes". Aujourd'hui les physiciens théoriciens sont les mieux placés pour la mise en œuvre des grands programmes. Il est dommage que les mathématiciens n'aient pas cette ambition. Il est tout aussi triste qu'à propos d'un regroupement envisagé entre les deux spécialités dans le Comité national de la recherche scientifique les mathématiciens aient pu dire que "cela leur poserait des problèmes" pendant que les physiciens disaient que "cela ne leur poserait aucun".

La façon dont les physiciens théoriciens situent les mathématiques est certainement beaucoup plus fine que celle que prônent les mathématiciens eux-mêmes. Par exemple Roger Balian nous rappelle l'affirmation de Galilée, dans l'Essayeur, selon laquelle "l'univers est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des figures géométriques", pour insister sur le fait que la physique moderne ne peut être pensée et comprise sans le langage mathématique. Cela n'est pas le fait du hasard puisque ce langage a progressé avec l'avancée de la physique. C'est beaucoup plus qu'un simple échange entre physique et mathématiques. On peut même dire que les mathématiques sont "forcées" par la physique. Le calcul différentiel et intégral en est l'exemple le plus simple. Pour renforcer la preuve, il suffit de se souvenir que, pendant que se construisait ce calcul en Europe à la fin du XVII siècle, les mathématiques japonaises, séparées de tout lien avec la physique, s'enfermaient dans une impasse, alors qu'on y trouve des points de vue de calcul infinitésimal.

En particulier "la déraisonnable efficacité des mathématiques" dont parle Wigner n'est pas surprenante du tout. Ce qui est peut-être trop raisonnable, et donc déraisonnable d'une certaine façon, c'est que la nature se laisse décrire de manière aussi unitaire, à moins que ce soit notre cerveau humain qui ne nous permette pas de la comprendre autrement.

Maintenant, ce qui apparaît aujourd'hui entre mathématiques et physique comme une imbrication faite de liens indissolubles, est régi par une sorte de matrice. D'une part chaque question de physique fait appel à tout un ensemble d'outils mathématiques. D'autre part chaque outil mathématique intervient dans un grand nombre de problèmes de physique. C'est cela qui va finalement imposer une certaine spécialisation, le physicien ayant besoin de connaître des mathématiques alors que le mathématicien pourra ne faire le lien avec à la physique que de temps à autre. Cela explique que la proximité des disciplines ait pu connaître des variations suivant les époques. Tantôt les mathématiques ont besoin de remettre un peu d'ordre dans leur foisonnement et elles ont tendance à s'isoler. Tantôt elles ont besoin de se resourcer et elles se rapprochent de la physique, comme c'est le cas depuis quelques décennies.

Remarquons que le mot de *synergie* employé par ceux qui défendent la relation privilégiée entre ces disciplines n'est même pas assez fort. On parle de synergie entre deux actions distinctes qui se mettent ensemble pour augmenter leur efficacité. Peut-on parler de synergie entre le coeur et le poumon dans un organisme? Quand on a admis cela, l'inutilité d'une justification de l'utilité des mathématiques devient complètement évidente.

Pour revenir à la spécialisation évoquée plus haut, les mathématiques sont la partie de la Science qui s'enseigne par excellence car, comme disait Jacques Louis Lions, l'impératif d'économie impose d'enseigner d'abord ce qui est général.

En même temps ce privilège accordé à ce qui est général implique une grande responsabilité, puisque ce qui est visé est non la formation mathématique en particulier mais la formation scientifique en général. Aussi, même si les autres scientifiques peuvent avoir l'impression que les mathématiques sont plutôt moins mal enseignées que leur propre discipline, le fait que l'enseignement des mathématiques soit aujourd'hui coupé de celui de la physique fait porter sur les mathématiques la responsabilité principale de la désaffection pour les sciences. Cette coupure avec la physique est parfois justifiée par le nécessaire élargissement du spectre des disciplines à mettre en rapport, dans l'enseignement, avec les mathématiques. Il n'y a certes pas de raison de négliger les sciences économiques, ou la biologie. Mais ce n'est pas en se coupant de la physique que les mathématiques se rapprocheront de ces autres disciplines.

Intéressons-nous à l'enseignement général de base, au "collège unique" ou même au lycée. On ne peut y faire figurer suffisamment de mathématiques et de physique pour qu'y apparaisse la matrice de liens dont on a parlé. Il faut alors voir la Science un peu comme à sa genèse, où la distinction entre mathématiques et physique n'existait pas. En tout cas il serait absurde que les mathématiques et la physique ne parlent pas la même langue. C'est pourtant bien le cas, et des travaux des IREM de Strasbourg et de Limoges l'attestent. Autrement dit, alors que la confusion entre disciplines devrait être plus grande à ce niveau que dans la recherche de pointe, c'est le contraire qui se passe. Il est vrai qu'il y a parfois des habitudes différentes entre la notation utilisée en physique et celle présentée en mathématiques. Une confrontation honnête aboutit cependant toujours au même résultat : c'est le client, donc le physicien, qui a raison.

Résumons-nous. On peut aussi bien dire que la physique fait partie des mathématiques que dire, comme Arnold, que les mathématiques font partie de la physique. Dans le premier cas la physique est chargée de la confrontation avec le monde réel, dans le second les mathématiques sont chargées de concevoir des outils efficaces. Vu du côté des mathématiques, c'est la seconde formulation qu'il faut choisir, pour s'astreindre à un peu d'humilité.

Une conséquence de ce qui précède est qu'**il est épistémologiquement absurde d'affirmer que les mathématiques** *s'appliquent* **aux autres sciences.**

De sorte qu'il est absurde de parler d'*interdisciplinarité* entre mathématiques et physique par exemple. Les deux disciplines sont si indissociablement liées qu'elles ne sauraient avoir besoin d'interdisciplinarité. Si le besoin s'en fait sentir aujourd'hui, c'est simplement parce qu'on a oublié la manière dont la Science se fonde. Par cet oubli, on a laissé l'enseignement des deux disciplines — mais pas la recherche heureusement — se séparer et continuer de dériver.

Il y a trente ans les deux premières années d'université savaient équilibrer l'enseignement de mathématiques et celui de physique sous l'étiquette MP/PM. Aujourd'hui on peut faire toute scolarité à l'université en mathématiques sans ne jamais voir de physique. En conséquence il est illusoire d'illustrer un concept mathématique par la physique. Par exemple de parler de l'énergie d'une corde vibrante, de sa répartition dans les modes ... à propos des séries de Fourier. Les étudiants, faute de connaissances en physique de base, n'en peuvent rien faire.

Pour parler du lycée, regardons comment était traitée il y a trente ans l'optique géométrique dans un livre de la classe de Sciences expérimentales. Ce n'est pas de la physique palpitante, mais les limites du modèle sont bien expliquées. Surtout le traitement ne diffère pas d'un iota de celui qu'on aurait trouvé dans un livre de mathématiques. A l'inverse la cinématique faisait encore partie du programme de mathématiques. On étudiait le mouvement elliptique des planètes, la figure d'équilibre d'un pont suspendu, la nature d'une chaînette ... Dans ce dernier cas, d'une part, plutôt d'un point de vue physique, on faisait le lien entre courbure, tension et gravité et d'autre part on intégrait l'équation différentielle pour obtenir la courbe et ses propriétés.

L'interdisciplinarité existe, mais ailleurs, dans ce qu'on peut appeler une *équipe intégrée* où se côtoient, réellement ou virtuellement, différents spécialistes. La recherche de pointe en fait usage, comme l'industrie. Pour autant l'interdisciplinarité n'est pas une passerelle entre des spécialités séparées par un fleuve.

Bien sûr il y a une différence dans le rapport à la vérité. En physique la référence est le monde réel et les théories déjà validées; en mathématiques c'est la cohérence logique interne et le lien avec les résultats déjà établis.

Cependant, même dans ce cas, les choses sont ne sont pas complètement tranchées. La physique aussi a besoin de cohérence interne. Que faudrait-il penser d'une physique qui serait régie par un million de lois, éventuellement contradictoires? Evidemment cette cohérence dont la physique a besoin lui est en grande partie fournie par le langage mathématique.

D'un autre côté les mathématiques ne sont pas coupées du monde physique. Le mathématicien n'a pas besoin de faire le lien en permanence et il le fait souvent par physicien interposé. Pourtant la référence transparaît, même dans les mathématiques les plus pures, pour conduire l'imagination en apportant du sens.

Il faut surtout retenir l'énorme responsabilité qui incombe aux mathématiciens au sein de la Science, et qui est celle de garantir la cohérence logique du langage qu'ils ne cessent de faire progresser. Aussi les mathématiques ne peuvent-elles s'imaginer sans l'exigence permanente de la démonstration. A partir de quelques hypothèses sur lesquelles on se sera entendu sans équivoque, tous les résultats énoncés doivent avoir été démontrés. Une seule exception détruirait tout l'édifice.

Cela ne signifie pas que tout doive être formalisé. Chacun sait que le formalisme s'accompagne souvent d'une perte de sens. On peut se permettre des démonstrations heuristiques, qui sont souvent les ébauches de démonstrations complètes dont elles ont déjà toutes les idées. En revanche admettre un énoncé en le qualifiant de propriété intuitive est contraire à la règle. Surtout quand il s'agit d'admettre tout un tas de telles propriétés au milieu d'un discours parfaitement formalisé. C'est la *structure en gruyère* que déplore Jean-Pierre Demailly et qui est souvent la règle aujourd'hui, au collège comme au lycée.

Le caractère indissociable des mathématiques et de la physique doit induire un large recouvrement dans l'enseignement de l'une et de l'autre. L'enseignant de physique a de toute façon besoin de faire des mathématiques. Il faut parallèlement que celui de mathématiques ne répugne pas de faire un tout petit peu de physique à l'occasion.

Cependant il ne faut pas verser dans un mélange total des genres. On peut considérer que physique et mathématiques constituent *deux moments distincts* de l'esprit.

Bien des démonstrations heuristiques sont ainsi qualifiées à tort de *magouilles de physicien*. Il s'agit le plus souvent de démonstrations non formalisées, mais parfaitement mathématiques.

On sait que les enseignants physiciens arrivent très souvent à expliquer les notions mathématiques dont ils ont besoin bien avant que leurs homologues mathématiciens n'osent s'y attaquer. Ils n'ont pas peur d'avancer car ils ne sont pas tétanisés par une exigence très souvent stérilisante de rigueur. Cette précocité des explications données par les physiciens est à mettre en parallèle avec le fait que l'éclosion d'idées et de notions nouvelles leur incombe le plus souvent.

Que les enseignants mathématiciens prennent donc un peu de l'exemple de leurs collègues ! Il leur restera de la place pour le formalisme et la rigueur.

En effet le procédé heuristique est licite la première fois qu'on y fait appel. Cependant il exige un effort d'intuition qu'il faudra renouveler à chaque nouvelle application. Et chercher à rendre les choses correctes sera toujours aussi délicat. A partir d'un certain moment le formalisme devient plus efficace. Celui qui l'utilisera aura l'impression de mieux *comprendre*, dans le sens de prendre davantage de choses ensemble. C'est donc une question d'usage. Celui qui voudra aller plus loin ou plus haut devra disposer d'outils plus sûrs, comme le voyageur d'une voiture plus puissante, le perchiste d'une perche plus dure.

Par ailleurs ce n'est pas se placer dans un *contexte physique* que d'introduire un cours de mathématiques par un exposé de physique uniquement pour écrire une équation ou utiliser un tableau de valeurs que l'on considèrera ensuite en oubliant complètement leur origine. Il faut au moins que l'introduction soit suffisamment intégrée pour guider l'intuition dans les raisonnements abstraits qui vont suivre et il convient de commenter le résultat dans le contexte de départ. Cela vaut bien sûr pour les autres sciences expérimentales comme la biologie ou pour les sciences économiques.

Les mathématiques pour elles-mêmes

Essayons de comprendre par quel chemin on en est arrivé, dans l'enseignement des mathématiques — mais pas dans la recherche — à des pratiques si contraires à ce qu'on a présenté comme étant l'essence de la discipline.

En fait le point de départ est simple, et très humain. Les mathématiques sont déjà difficiles; pourquoi s'embarrasser de la Science en général dans leur enseignement? Autrement dit on va jouer

les mathématiques pour elles-mêmes .

Un premier avantage est que va pouvoir se développer le *formalisme* sans souci de son éventuelle légitimité ou utilité. Comme le programme ERMEL pour l'école élémentaire le disait il y a une trentaine d'années, faire des mathématiques n'est rien d'autre que parler un *langage formel*. Le document d'accompagnement du programme de terminale S, aujourd'hui, n'annonce-t-il pas comme souhaitable pour chaque élève, quel que soit son niveau, d'avoir vu à l'occasion la place et l'intérêt d'une définition formalisée?

Le développement du formalisme est venu de la croyance erronée, extrapolée du discours de Piaget, suivant laquelle la construction du sens se faisait chez l'enfant de façon semblable à la construction mathématique consistant à partir de structures faibles et à leur ajouter progressivement de l'épaisseur. Si l'on avait conservé le contact avec la physique, il aurait été évident au contraire qu'il faut, pour citer Philippe Lombard, toujours partir "d'un concept à l'état brut, avec ses complexités et sa richesse, presque tel qu'il s'impose à l'observation première. A l'étude d'en percer quelques secrets, par la fréquentation des images, par l'exploration de situations inattendues, par le choix d'éclairages particuliers susceptibles de faire apparaître des relations cachées entre des cas de figure apparemment très différents".

Il n'est d'ailleurs pas étonnant que, pour tenter de pallier l'absence totale de sens entraînée par l'adoption du formalisme, l'on ait tenu un double langage où une droite et un plan "physiques" voisinent la droite et le plan "mathématiques". On ne peut pas dissocier le choix du constructivisme structural de la méfiance généralisée pour la physique.

Malheureusement les travers dénoncés lors de l'introduction des mathématiques modernes sont toujours là, et ce malgré le "retour vers le concret" prôné il y a une douzaine d'années. En particulier la description suivante, donnée par Philippe Lombard à l'époque, est toujours d'actualité, avec "l'inflation du vocabulaire, l'accumulation des mots techniques, le pointillisme obsessionnel des définitions, le malin plaisir pris à redéfinir tous les mots du langage courant pour leur assigner un sens réservé aux initiés, l'intérêt maladif pour élever au rang de résultats des évidences dérisoires, l'incapacité à expliquer en langage commun des propositions impénétrables ...". Seul le pointillisme des définitions est-il peut-être un peu moins obsessionnel, encore que l'on puisse discuter. Le souci de donner des définitions un peu moins formelles a conduit à un exercice d'équilibre qui ne laisse plus aucune liberté dans l'expression.

Quelques efforts ont donc été faits, mais avec des résultats décevants car on n'a pas corrigé le choix constructiviste de départ. On a bien effacé les signes les plus visibles du formalisme, ce qui a conduit de fait à un discours encore plus impénétrable. On a amplifié le double langage en prétendant appuyer les définitions abstraites sur des présentations intuitives, alors que ces dernières n'ont aucun lien avec les premières.

Il ne faut pas minimiser, à propos du formalisme, la satisfaction vécue par les professeurs. Ils ont l'impression d'être les dépositaires d'une rigueur que chacun leur envie. Quand il ne leur reste rien d'autre à attendre, il s'y accrochent comme à une bouée.

En même temps la nécessité de garantir à la physique la cohérence interne du langage n'est plus. Par conséquent il va être possible de prendre des libertés avec l'exigence de la démonstration. On arrive ainsi à un paradoxe. Alors que le formalisme a été introduit pour permettre des démonstrations plus précises, le formalisme qui se répand aujourd'hui s'empresse de tout admettre.

Aussi n'est-il pas étonnant que l'exercice de la démonstration soit proposé dans des activités hors programme, pour favoriser une "attitude de recherche". Si l'on avait eu l'occasion de démontrer davantage dans le cadre du contenu des programmes, le besoin en eût été moins évident.

Bien sûr la noosphère a senti confusément les inconvénients d'un tel discours vis-à-vis d'une société qui pourrait finir par ne plus payer des gens dont la seule vocation est de se faire plaisir. Elle a fait semblant de rompre avec ces "mathématiques modernes" dont la paternité a été mise sur le compte d'un malheureux Bourbaki qui n'y était pas pour beaucoup, du moins directement. Elle a même multiplié les gages pour donner le change, allant jusqu'à dire que les mathématiques que l'on enseigne ont changé.

C'est la raison pour la laquelle elle s'est mise à parler d'interdisciplinarité alors qu'on a vu que cela n'avait pas de sens. Ce n'est qu'un artifice pour masquer l'absence d'unité, un alibi pour que se creuse encore plus l'écart entre les disciplines.

La noosphère passe aussi le plus clair de son temps à vanter les applications des mathématiques. Il ne s'agit pas d'une collaboration naturelle à l'intérieur de la Science. Il s'agit d'appliquer les mathématiques indifféremment à toutes les autres sciences et sans aucun intermédiaire. Une interprétation erronée de la "déraisonnable efficacité" que leur attribue Wigner vient conforter leur sentiment d'être au centre de tout. Les autres disciplines ne peuvent pas se parler entre elles. Elles ne peuvent le faire qu'à travers les mathématiques.

Pour cette raison les applications privilégiées sont celles qui utilisent le moins les autres sciences; d'où l'engouement pour les mathématiques de l'ingénieur. Des modèles complexes, plus sophistiqués que compris en profondeur, y ont montré une réelle efficacité. Peu importe que tenter d'importer dans l'enseignement de base un peu de ces techniques, ce qui ne peut être sérieux évidemment, ne soit que le pendant de ces "règles opératoires" dont le formalisme fait grand usage ! C'est la mode. Certains diront que cela renouvelle les mathématiques enseignées à l'école.

A partir du moment où l'idée même d'application des mathématiques n'est que la conséquence d'un contresens, le slogan de la CREM qui regroupe sous le nom de *science mathématique*, les mathématiques pures, les mathématiques appliquées et l'informatique ne peut qu'ajouter à la confusion. On parlera plus loin des rapports avec l'informatique qui, toujours dans l'enseignement, souffrent aussi d'un contresens. Rien que le besoin de regrouper certaines mathématiques avec d'autres qui seraient appliquées, comme de parler d'applications des mathématiques pures, est déjà désolant.

Il semblerait que la CREM ait eu besoin de ce slogan pour réaliser un consensus. Elle aurait utilisé aussi à cette fin l'opposition entre Fourier d'une part et Abel et Jacobi de l'autre sur la finalité des mathématiques. On laisse croire que travailler "pour l'honneur de l'esprit humain" est le trait qui caractérise les mathématiciens purs. Peut-être y pensent-ils plus que d'autres, mais ce trait ne crée pas plus de distinction entre mathématiciens qu'il n'en crée entre les mathématiciens et les physiciens.

Un post-modernisme

La réforme dite des "mathématiques modernes", qui a laissé des traces non résorbées, et la tendance actuelle, dont les effets commencent seulement à se faire sentir, ont plusieurs points communs : une vision egocentrique des mathématiciens dans la Science, une logique de production et une vénération du formalisme.

Les "mathématiques modernes" ont été imposées par les mathématiciens sans souci des autres disciplines. Ce n'est pas un hasard si les physiciens en ont pris ombrage, si Pierre-Gilles de Gennes a pu les classer dans les trois grandes catastrophes du siècle passé.

Il y avait aussi une erreur de casting. Le caractère structuraliste qui les porte correspond à une logique de production, celle du monde scientifique, et pas à une logique de formation comme cela aurait dû être.

Enfin, sur le formalisme de ces mathématiques, il est inutile de revenir.

Quant à la tendance actuelle, on a expliqué comment la société mathématique, par craindre l'influence de quelques scientifiques connus du public, a cherché à reconquérir un pouvoir qu'elle avait largement perdu par sa faute. Comment est né cet engouement pour les "mathématiques de l'ingénieur", avec la mode de la "modélisation". Comment on a ainsi cherché à promouvoir des mathématiques qui "s'appliquent" directement, notamment au travers de modèles statistiques, sans besoin de la part des sciences expérimentales que d'un apport limité au plus juste, mais sur lequel on bâtira une image interdisciplinaire à grand renfort de publicité.

Ce faisant on commet, et même au centuple, l'erreur commise à l'occasion des "mathématiques modernes". Les "mathématiques de l'ingénieur" obéissent à une logique de production, pas de formation.

Surtout cette mode "modélisatrice" ne fait qu'ajouter de nouveaux formalismes à ceux qui existaient déjà. Qui n'a pas pesté contre ces règles tâtillonnes imposées au collège ou au lycée, comme à l'école élémentaire ou l'université? Contre l'obligation de mettre par exemple des parenthèses autour du nom d'une droite, des crochets autour de celui d'un segment ... sans se rendre compte d'ailleurs que ces règles ne traversent pas les frontières de l'hexagone? Le formalisme n'est souvent qu'un camouflage pour faire passer l'indigence du contenu.

Or, pour donner un exemple à la mode, la "modélisation probabiliste", telle qu'elle est pratiquée au lycée, n'est guère qu'une occasion supplémentaire de donner dans le formalisme. Là où un petit calcul de proportions eût suffi pour tout expliquer, on parle de modèle, on dessine des arbres ... avec la conviction fermement ancrée que ce qui était faux jusque là devient miraculeusement correct tout à coup. Le danger est le même que celui encouru avec d'autres formalismes. Il procure un sentiment de sécurité qui ouvre la voie à toutes les erreurs.

Il reste à souhaiter que les commissions, les IREM, les associations ne commettent pas une nouvelle fois l'erreur commise il y a trente ans dont on n'a pas encore pu se défaire, et s'efforce de suivre pendant les dix ans qui viennent une ligne dont il faudra reconnaître après coup le mal fondé.

Un mot sur l'informatique

On va dire un mot de la place de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques. Aujourd'hui il faut y voir l'introduction d'outils, comme le moteur de calcul formel *Derive* ou le logiciel de géométrie symbolique *Cabri*, qui viennent compléter les calculatrices toutes simples.

On ne peut pas ignorer l'importance prise, dans l'industrie et aussi dans la recherche, du calcul scientifique, qu'il soit exclusivement numérique comme il l'a longtemps été ou également symbolique. Que le futur citoyen ou le futur technicien ait pu rencontrer ces techniques de façon à ne pas en être, le moment venu, l'esclave, est une exigence qu'une société démocratique peut avancer. Que faut-il faire cependant pour ne pas former de potentiels esclaves? La solution est-elle vraiment de se servir des outils cités comme point de départ à toute réflexion, alors qu'il s'agirait de boîtes noires dont on ne connaîtrait rien du fonctionnement? Il ne suffit pas de montrer quelques situations extrêmes où les calculatrices de base peuvent se tromper pour corriger le tir. D'ailleurs on se montre beaucoup moins critique envers les logiciels de calcul formel ou de géométrie symbolique.

La culture qu'il conviendrait d'inclure dans l'enseignement des mathématiques devrait permettre au moins de désacraliser l'outil informatique en apportant une connaissance minimale de sa mise en œuvre. Cela pourrait passer par une initiation à l'algorithmique. Cependant on ne dira rien à ce sujet car l'introduction d'une telle initiation pose trop de problèmes politiques et techniques aujourd'hui. Sauf à tomber dans un environnement presse-bouton dont l'utilisation irait dans le sens inverse que celui qui est souhaité, il faudrait convenir d'un vrai langage de programmation. Or cela impliquerait l'aval de la communauté des informaticiens et la disponibilité sur des machines effectives. A défaut une utilisation intelligente d'un tableur serait déjà un premier stade.

Au moins pourrait-on donner une idée dont les nombres sont codés et manipulés par un ordinateur. De même, avant toute utilisation éventuelle d'un logiciel de calcul ou de géométrie, devrait-on connaître la façon dont l'ordinateur s'y prend, qui n'est jamais que celle que l'élève apprend un jour en classe, mais en général plusieurs années après. Comment comprendre à ce sujet qu'on ait abandonné l'enseignement de la division alors que c'est un des rares algorithmes que chacun peut maîtriser?

Que dire alors de la tendance actuelle consistant à placer, dans l'enseignement, la bureautique au même niveau que la Science? Le brevet "informatique et internet" va prendre sur l'enseignement fondamental des heures pour un apprentissage qui ne pose de problème à aucun enfant. Pire, il s'agira de familiariser les élèves à un système d'une marque donnée, ce qui revient à vendre à cette dernière notre système éducatif. On sort ici du domaine épistémologique mais il ne faut pas être naïf et feindre d'ignorer quels sont les ressorts qui font marcher les sociétés humaines.

On ne peut tenter de justifier l'engouement aveugle vis-à-vis des nouvelles technologies en invoquant le parallèle avec le marché de l'édition qui commande les manuels scolaires, même si la conception de ces derniers s'inspire de plus en plus de concepts venus du monde de la publicité. Le domaine informatique est en effet incomprablement monopolistique.

Cet impératif de méfiance ne concerne pas les technologies lorsqu'elles sont au simple service de l'enseignement. Il faut simplement juger sur pièces. Par exemple l'accès au réseau s'apparente à la visite d'une bibliothèque d'une richesse incomparable. Maintenant qu'y cherche-t-on? Faut-il montrer aux élèves de vrais textes mathématiques? Si la réponse est oui, autant laisser un vaste choix plutôt que de proposer une sélection, nécessairement restreinte, comme le font certains manuels. Mais guider les élèves, répondre à leurs interrogations dépassera probablement la capacité des enseignants. Il pourrait y avoir plus à perdre qu'à gagner.

Un autre sur la didactique

Revenons à l'unité de la Science pour nous adresser aux didacticiens. Il semble que la didactique des mathématiques se soit souvent attachée à l'étude de conceptions attachées à un concept donné, en isolant ce dernier de l'ensemble. Mieux encore, en opérant la séparation en registres, elle a fait éclater les concepts en morceaux. Tout cela est normal. C'est la méthode universelle de l'analyse.

Cependant il faudra prendre garde si l'on pratique l'ingénierie pédagogique à partir de l'analyse didactique. On sera naturellement poussé à détailler chaque composant en lui conférant une valeur autonome qui risque contrecarrer la synthèse ultérieure. Cela fait penser au premier tir raté de la fusée Ariane V. On avait testé tous les sous-programmes, mais on avait oublié de tester le programme complet.

A un niveau macroscopique, cela explique en partie la séparation entre disciplines qu'opère l'enseignement. L'inévitable "transposition didactique" dont parle Yves Chevallard pousse à la séparation. Toute notre philosophie est là pour corriger ce défaut. Il faudrait vérifier, par une analyse didactique a priori et après expériences, que notre vision conduit à des usages pédagogiques qui le corrigent effectivement.

A un niveau plus fin, certains concepts finissent par trouver, dans la construction mathématique, un état abouti où ils trouvent un statut unifié. C'est le cas de l'algèbre linéaire qui fait le lien entre géométrie symbolique, géométrie vectorielle et équations, tout en ouvrant d'autres perspectives. C'est aussi le cas pour les nombres, plus simplement, qui peuvent être décimaux ou fractionnaires, sans compter les pourcentages. L'enseignement doit forcément commencer par un bout et donc choisir un registre de départ. L'enrichissement par l'addition de nouveaux registres complique inévitablement la situation. Ce n'est pas grave si tout finit par s'unifier. Cependant tous les élèves du collège, voire du lycée, ne sont pas censés passer par l'université. Aussi est-il important d'opérer la fusion des registres avant chaque sortie possible du monde éducatif, c'est-à-dire en permanence. Nous avons cette prétention. La didactique devrait vérifier que cette fusion va bien se réaliser bien chez l'élève.

DECLINAISONS

La géométrie au collège

Nous en dirons peu de choses dans un premier temps. Beaucoup de travail a été effectué dans et autour des IREM. Il faudra prendre le temps d'en tirer la substantifique moelle.

Nous allons profiter de ce thème pour reprendre, en l'enrichissant, le rôle spécifique des mathématiques au sein de la science, ou même de la physique si l'on accepte la provocation. Nous avons insisté sur le contrat relatif à la cohérence logique. C'est toujours d'actualité bien sûr. Il y a cependant un autre contrat, celui de l'efficacité des *outils*.

Par outil, nous entendons un package technique maîtrisé dans lequel on a oublié les petits énoncés particuliers qui ont servi à le construire. C'est un peu comme ces grandes constructions théoriques qui ont fait la gloire des mathématiques françaises. Le calcul différentiel, le calcul intégral sont des outils dont nous parlerons plus loin. Comme on le verra, la maîtrise de ces outils n'est pas vraiment liée à la connaissance de théorèmes.

D'abord, dans notre cas, l'outil devra prouver son efficacité pour dénouer des problèmes "concrets", notamment des problèmes tirés d'un contexte expérimental. Et ce sera le rôle du professeur de mathématiques que de garantir la maîtrise de l'outil par l'élève dans les situations concrètes, et donc de faire effectuer maint exercice dans ce sens.

En même temps les outils seront en petit nombre et leur champ d'application très vaste. Typiquement un seul outil permettra d'attaquer mille exercices.

L'outil, dans le sens que nous lui avons donné, s'oppose radicalement à la "boîte à outils" qu'on rencontre beaucoup en géométrie au collège. Cette dernière est une collection de petits énoncés à prendre indépendamment les uns des autres, même s'ils ont tous trait au même sujet. Surtout leur usage est strictement interne aux mathématiques. Enfin, typiquement, il faudra disposer d'une collection d'une vingtaine d'énoncés pour résoudre une dizaine d'exercices.

Quels sont les outils qui doivent composer la géométrie du collège? Ils sont essentiellement au nombre de trois,

- la géométrie du triangle, avec les cas d'égalité notamment,
- la géométrie du triangle rectangle, et la trigonométrie qui y est attachée,
- l'équation $y = ax + b$ de la droite, i.e. le théorème de Thalès,

le dernier point faisant immédiatement le lien avec l'homothétie, puis la similitude, ce qui élargit la géométrie du triangle citée en premier. Faut-il respecter la coupure actuelle entre troisième et seconde, qui place le théorème de Thalès et les équations de droites à cheval entre le collège et le lycée? Faut-il agréger la seconde au collège? On n'entrera pas dans ces considérations. On a surtout voulu dire que les transformations doivent venir *après*.

Pour quitter un moment le sujet, notons qu'on peut parler à l'université d'un outil topologique. Pourquoi ne peut-on pas en parler au niveau du lycée? Simplement parce qu'on peut pas prétendre y atteindre la maîtrise nécessaire. On peut tout juste donner une vague idée de la continuité, mais sans chercher à l'utiliser vraiment. Au collège la théorie des groupes aurait pu être un outil pour la géométrie si sa maîtrise y était accessible. Personne ne prétendra que ce puisse être le cas, du moins je l'espère. Il faut bien comprendre que, dans notre perspective, ce qui ne participe pas de la maîtrise d'un outil n'existe tout simplement pas.

Revenons à la géométrie du collège. C'est aujourd'hui le sujet le plus pénible à traiter. Car il apparaît tout de suite que la seule solution possible, esquissée à propos des outils, est le retour au passé, à savoir la géométrie élémentaire du XIXème siècle. Cet aspect rétrograde n'est pas très porteur quand chacun se plie aux modes. La seule nouveauté est qu'on invoque des raisons à un tel choix.

On a dit que la science s'est construite par mathématisation de l'étude de la nature. Comme le dit Rudolph Bkouche, la géométrie est la première science physique. C'est donc ainsi qu'on doit l'enseigner pour commencer.

Faut-il que toute une tranche d'âge ait vu ce qu'était une démonstration mathématique? On peut discuter; il y a d'autres merveilles à visiter. Supposons que la réponse soit oui. Alors il ne sert à rien de présenter tout un tas de problèmes artificiels donnant cette occasion si l'on fait en même temps l'impasse sur les démonstrations en présentant la géométrie élémentaire.

Tout commence par l'*égalité*. Entre deux corps solides c'est la possibilité matérielle (cela suffit pour les corps plans) d'amener (par un mouvement de l'espace) en superposition l'un sur l'autre. Deux segments, deux angles, deux triangles, deux quadrilatères seront dits *égaux* s'il en est ainsi.

On se gardera bien d'employer le qualificatif *isométrique* qui est faux à tous égards. Il suppose que l'on sache déjà mesurer. Surtout que doit-on mesurer? Pour un triangle les côtés? Et pour un quadrilatère? Evidemment on fait une entorse à la théorie des ensembles en parlant de l'égalité des figures autrement que comme une coïncidence. Mais un segment, un angle, une droite *ne sont pas des ensembles de points*, au moins pour commencer. En revanche on pourra choisir d'introduire progressivement le langage de la théorie des ensembles à propos de la géométrie dans l'espace.

Partant de là il faut donner les trois *cas d'égalité*, lesquels se déduisent logiquement de celui dans lequel un seul angle est concerné. Cela fait vieillot, c'est sûr. Pourtant il y a un test qui ne trompe pas. Dans les connaissances mathématiques qui auront survécu dans la mémoire d'un ancien élève du lycée (on ne disait pas collège) qui n'a plus fait de mathématiques depuis longtemps, les cas d'égalité ne sont pas les plus mal placés.

En revanche il n'est pas question d'introduire les transformations, comme les symétries axiales ou centrales, pour s'en servir de point de départ d'une démonstration. Il est beaucoup trop difficile de faire le tri entre ce que l'on voit sur la figure et ce que l'on déduit des hypothèses, et ce d'autant plus que les propriétés des symétries auront été admises dans le flou général qui entoure ces transformations. Au contraire les égalités d'angles et de côtés s'établissent pas à pas dans un enchainement naturel.

Un autre reproche que l'on doit faire à l'introduction actuelle de la géométrie est qu'elle ignore le postulatum d'Euclide. Faut-il réserver la vérité à une élite? Là est toute la question.

Notons que la géométrie à la façon d'Euclide part de constatations expérimentalement vérifiables dans le monde réel. L'utilisation précoce d'un logiciel de géométrie dynamique, boîte noire obscure, ne ferait que tout embrouiller.

Il y a encore plus grave. On a dit tout le mal qu'il fallait penser de l'approche par le constructivisme structural. L'approche algorithmique stricte imposée par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, avant toute tentative d'analyse, conduit à des errements analogues. Il est une chose qu'un tel outil ne peut réaliser; c'est partir d'une figure fausse et s'en servir pour faire une démonstration vraie. Or cette étape d'analyse est la clé de la géométrie.

Foin de cet outil à la mode donc ! Même si son usage permet peut-être de ramener un peu d'ordre dans la classe, puisqu'il semblerait que la machine soit davantage respectée que le professeur. A tout prendre il est plus instructif de dessiner, même maladroitement, des figures géométriques que de contempler sans comprendre des figures affichées sur un écran.

La notation fonctionnelle

Si l'on se fie à un traité de mathématiques moderne, une fonction f est la donnée d'un espace de départ E, d'un espace d'arrivée F et d'un graphe, qui est une partie de $E \times F$. Si x est un point de E, on note $f(x)$ l'unique élément y de F tel que (x, y) soit dans le graphe.

Cette notation a mis du temps à s'imposer, et elle ne s'est d'ailleurs pas encore imposée partout. Elle n'est pas naturelle; l'idée, qu'on rencontre notamment en géométrie, en mécanique ou en physique, d'une variable y qui dépend d'une variable x disparaît complètement avec elle.

La notation fonctionnelle moderne a été récemment imposée au lycée; elle est même introduite dès le collège. Or le moins qu'on puisse dire est que cela n'est pas innocent.

Voyons, par exemple, comment les fonctions interviennent dans des équations différentielles dans le libellé du sujet du baccalauréat de la série S en 2003.

On dit d'abord que

a) *la fonction f est solution de l'équation différentielle :* $y' = ay$.

ce qui fait jouer à y un rôle d'indéterminée et demande de comprendre qu'on doit remplacer y par f.

Ensuite

b) *la fonction g ... vérifie la relation :*

$$g'(t) = ag(t)\Big(1 - \frac{g(t)}{M}\Big)$$

où il n'est plus question d'équation différentielle, ce qui surprend. La loi logistique et la loi exponentielle ne seraient-elles pas sur le même plan? Ne va-t-on pas demander de comparer les modèles? L'indéterminée y a disparue et la variable t apparaît.

Encore

c) *la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle: (E') $y' + ay = \frac{a}{M}$.*

où l'on revient à la formulation du a).

Enfin

d) $$g'' = a(1 - \frac{2g}{M}\Big)g' .$$

où la formulation ressemble à celle du b) mais où la variable a disparu.

L'écriture d'une équation différentielle avec une fonction y indéterminée n'est pas sans poser de problème. Il faut comprendre que la confrontation de a) et c) est déconcertante. S'agit-il du même y? Cela revient à dire ceci : appelons x une solution de l'équation $y = a$, puis z une solution de l'équation $y = b$. Il y a plus simple.

Finalement on n'a jamais pu écrire que N vérifiait l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = aN\Big(1 - \frac{N}{M}\Big)$$

ce qui est quand même ce qu'attendaient le mathématicien voulant comprendre sur quoi il travaille, et le scientifique en général bien sûr.

Lorsqu'on introduit la fonction x définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$x(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-at}}$$

suivant la bonne règle, il faut indiquer qu'on se permettra l'abus de langage qui consiste à écrire x plutôt que $x(t)$ la valeur de la fonction à l'instant t lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, ce qui revient à confondre la fonction et sa valeur pour une valeur non précisée de la variable.

Autrement dit on pourra tout aussi bien définir x comme une fonction de la variable t en posant

$$x = \frac{M}{1 + Ce^{-at}} \, .$$

Lorsqu'on voudra préciser qu'on prend la valeur x_1 de la fonction qui correspond à la valeur t_1 de la variable, on écrira

$$x_1 = x(t_1)$$

ce qui introduit la notation classique.

Certains vont plus loin, introduisant directement une fonction $x = x(t)$ de la variable t par exemple. Même si cette façon de s'exprimer n'est pas conforme à la bonne règle, on ne doit pas la rejeter.

La confusion considérée n'est pas seulement utile; on la fait systématiquement. Dans un calcul d'intégrale, on dira par exemple qu'on effectue le changement de variable $x = u^2$ pour lequel $dx = 2udu$.

Si y est une fonction de x et x une fonction de u, il est bien clair que

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{du}$$

ce qui est quand même plus facile à retenir que la formule de dérivation d'une fonction composée qui figure au programme. De même si on considère x comme une fonction de y, on a

$$\frac{dx}{dy} = \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^{-1}$$

tout aussi clairement.

Dérivées et intégrales au lycée

Avant de commencer, demandons-nous ce qu'on peut envisager comme compétences à faire acquérir par les élèves, c'est-à-dire comme thèmes donnant lieu à des batteries d'exercices, ou des tâches routinières pour prendre la terminologie d'Yves Chevallard. On peut noter

- la construction de courbes en vue d'avoir leur allure générale — sachant que le recours aux calculatrices aura été interdit —

- le calcul d'aires ou des volumes,

- la résolution d'équations différentielles, autant que possible issues d'un contexte expérimental et donnant lieu à une solution commentée.

Si l'on envisage la formation à l'Analyse au lycée en termes d'outils, on en trouve essentiellement deux, qui sont

- la dérivée

et

- l'intégrale,

sachant que la dérivée f de F est caractérisée par la propriété

$$F(x) - F(y) = \int_x^y f(t)dt \ ,$$

laquelle contient la dérivation par rapport à une borne et le théorème des accroissements finis.

S'il est difficile de déterminer comment il faut s'y prendre pour cela, une chose au moins est sûre. Les choix retenus aujourd'hui sont désolants.

D'abord pourquoi poser le principe, comme le document d'accompagnement de terminale S le fait, suivant lequel “il est souhaitable que tous les élèves aient entrevu l'intérêt et la place d'une définition formelle”, et recommander ensuite de justifier la plupart des résultats “à l'aide d'arguments intuitifs”? Il y a déjà une contradiction entre le fait d'entrevoir et le formalisme. Ce dernier n'a de sens que si tout peut être posé tranquillement. Que dire alors du recours à des arguments intuitifs?

La plupart des manuels introduisent finalement le formalisme d'une manière telle qu'il est impossible à l'élève de savoir s'il peut y recourir de façon licite ou non, soit parce que la définition qu'on lui propose est incompréhensible pour ne pas dire fausse, soit parce que ce formalisme est parachuté après une activité qui n'est même pas approfondie.

Pour montrer qu'on ne veut pas reproduire le dogmatisme en cours, on va donner en annexe quelques présentations différentes et contradictoires. Aucune n'est parfaitement satisfaisante, loin de là. Le débat et in fine l'expérimentation trancheront.

Il peut heureusement y avoir d'autres présentations d'autres possibles. Peut-être ce qu'on a écrit fournira-t-il quelques idées? Cependant on ne peut pas faire un programme en piochant ici et là, sauf à réaliser une *structure en nougat.* Il convient de trouver un fil directeur et de s'y tenir.

Autrement dit il ne faut pas réaliser un avatar de cette structure en gruyère dont parle Jean-Pierre Demailly, laquelle ne doit d'ailleurs rien à une quelconque transposition didactique puisqu'elle a été mise en place en amont de l'épreuve de l'enseignement. Avec les manuels qui l'illustrent, on a l'impression d'être en présence d'un cours universitaire déjà médiocre au départ et qui serait parvenu dans un état de décomposition avancée.

Il y a un point particulier commun à toutes les présentations. En aucun cas il ne faut introduire le symbolisme $\lim_a$ ou $\lim_{x\to a}$ à propos des limites. Par exemple, contrairement à ce que pourrait suggérer une lecture rapide du document du programme de terminale S, on se gardera bien de recommander un "enchaînement" tel que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{x^3+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x^2}{1+1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}1=1\;.$$

L'emploi de ce symbolisme ne peut correspondre au niveau du lycée qu'à un réflexe pavlovien. Il joue ce rôle de vérité partiellement révélée qu'on a reproché à l'outil informatique.

La présentation indiquée ici est justifiée par ses promoteurs en mettant en avant le cadre des fonctions rationnelles auquel on l'applique. Il est vrai qu'une telle fonction admet toujours une limite, finie ou infinie. Cependant, comment établit-on ce fait? Par une démonstration générale, nécessairement fastidieuse? Ne vaut-il pas mieux s'imposer un petit travail démonstratif chaque fois?

Ce qui est en cause n'est pas tant le fait qu'on met l'accent sur le calcul d'une limite plutôt que sur la justification de son existence. C'est acceptable au lycée. On peut y adopter la démarche qu'avait Cauchy au XIXème siècle. Mais il ne faut s'y enfermer pour courir, le moment venu, le risque d'incompréhension qui en résulte. Or c'est précisément là que le symbole lim intervient : son utilisation donne une apparence de rigueur là où il n'y en a pas du tout. C'est d'autant plus dommage que cette rigueur était accessible à peu de frais.

On touche ici une tendance de l'enseignement actuel des mathématiques, la confusion entre rigueur et formalisme. Il faut expliquer qu'il n'y a pas de formalisme infaillible. L'interprétation dépend du contexte. Le formalisme réalise une synthèse, mais encore faut-il qu'il y ait de la matière à cela. Partir du formalisme est donc exclu.

Evidemment mal compris, le symbole lim fait des ravages à l'université. Son utilisation revient à supposer a priori l'existence de la limite pour l'établir, ce qui donne des résultats catastrophiques. Souvent ce n'est même pas le bon support pour raisonner. Bien sûr on pourrait utiliser le symbole pour conclure, avec un passage à la limite, mais il serait trop difficile d'imposer une telle restriction. Autant s'en passer par conséquent.

Les graphes en terminale ES

On prend cet exemple pour montrer qu'on ne proposera rien là où il n'est pas possible d'envisager un contenu cohérent assorti de tâches routinières identifiables.

Le thème des graphes, tel qu'il apparaît dans les programmes et les manuels, n'est pas fait d'une mais de vingt problématiques différentes. Le tout avec moins d'exercices que de définitions à connaître ou de résultats à appliquer.

La solution aurait pu être de se restreindre à l'une des problèmatiques et de l'approfondir. Rien n'empêche en théorie un enseignant de travailler ainsi dans sa classe. Cependant il faut bien préparer le baccalauréat. On ne peut pas se réjouir de l'introduction des graphes et en même temps souhaiter que les élèves ne soient pas interrogés sur le sujet. Finalement on a bien posé une question; il fallait écrire une matrice de compatibilité pour ne rien en faire et colorier un graphe sans souci de minimiser le nombre de couleurs. Autrement dit, dans les conditions actuelles, il n'y a strictement rien à sauver.

Il y a bien quelques exemples qui se voudraient concrets. Le parcours d'un graphe pondéré pour déterminer le plus court chemin entre deux villes en est un. On y présente une méthode effective. Malheureusement il y a deux handicaps liés au fait qu'on résoud les problèmes "à la main". D'abord on ne peut considérer que des exemples simplets et la solution est quasiment évidente.

Surtout la présentation de la méthode est d'une lourdeur sans pareille. On se prend à rêver en pensant à celle qu'aurait pu donner un informaticien du calibre de Niklaus Wirth s'appuyant sur un vrai langage algorithmique. En même il aurait pu prendre un exemple réaliste, et même réel, à savoir la réalisation d'un point d'accueil donnant le trajet le plus court pour le métro parisien.

Evidemment il aurait fallu introduire l'algorithmique dans les programmes, peut-être évoquer les questions de preuve d'algorithme, d'invariant de boucle, faire le lien avec le raisonnement par récurrence ... On dispose de quelques exemples simples, comme la recherche du PGCD de deux nombres. Il faudrait oser les présenter dans un vrai langage. On a déjà parlé des obstacles politiques. Par ailleurs c'est sans doute bien trop ambitieux. En tout cas cela se discute.

En revanche comment peut-on prétendre mettre en avant la relation entre mathématiques et informatique si l'on feint d'ignorer que, pour certains problèmes, la solution donnée dans un langage algorithmique peut être infiniment supérieure à celle donnée dans un langage ordinaire? Et si l'on résume cette relation à la simple utilisation d'outils qui, d'une part n'ont pas été conçus pour la formation mais pour la production et d'autre part se révèlent destructeurs jusqu'à preuve du contraire?

Quelques mesures simples

La première, qui n'apporte rien par elle-même mais sans laquelle rien ne serait possible, est *l'interdiction des calculatrices* aux épreuves, quelle que soit la nature des unes ou des autres. Evidemment le baccalauréat est concerné en premier par cette mesure. Cela est *non négociable.* De plus aucun formulaire ne sera distribué sous quelque prétexte que ce soit.

La seconde, qui présente les mêmes caractères que la première, serait la disparition des activités marginales : itinéraires de découverte, TPE, brevet informatique et internet ... pour redonner un horaire cohérent à l'enseignement des mathématiques. Même les options de spécialités devraient disparaître et leur horaire intégré à l'enseignement principal, lequel retrouverait des variantes comme avec les séries d'autrefois.

La disparition des activités gadget ne signifie pas qu'il faut enlever toute place à l'initiative des élèves. Leur demander de préparer de petits exposés en responsabilité n'est pas une mauvaise chose. Cependant cela devra se faire à l'intérieur de la progression du programme.

A part cela, on a dit qu'il ne pouvait pas y avoir de révolution dans les contenus. Cependant les programmes devraient retrouver une formulation plus concise, ne dépassant pas une page par année, ce qui leur confèrerait souplesse et pérennité.

Les manuels devraient subir, parallèlement, une cure d'amaigrissement. Les activités dites préparatoires, les digressions variées en auraient disparu. Cela ne peut que renforcer leur place dans l'enseignement. Quant à la présentation elle-même, elle pourrait en être plus rustique, délaissant les encarts colorés et photographies au profit d'un discours moins abrupt et plus soigné. La partie consacrée aux exercices serait importante, en évitant aussi la multiplication des images.

Cela signifie qu'il resterait beaucoup de place pour que soient développées des séquences clefs en mains. L'origine pourraît être diverse et concerner : le Comité des programmes, les éditeurs de manuels, les IREM, les associations ... avec l'occasion pour l'inspection générale de donner un avis.

Il faut penser aussi aux professeurs, qui n'ont pas le recul nécessaire pour s'adapter aux incessantes réformes. Il est de bon ton de fustiger leur inculture. On voudrait leur servir une profusion d'ouvrages relativement copieux leur expliquant les vraies mathématiques. Les malheureux, qui ont déjà du mal à suivre le rythme, seraient définitivement culpabilisés.

Voici une suggestion plus raisonnable inspirée par Jean Dhombres. On produirait de petits documents par thème, de 25 pages au maximum, pour développer simplement certains sujets et apporter une vraie compréhension sur le fond. Ces documents ne seraient surtout pas destinés à orienter l'enseignement, ne comprenant ni séquence pour la classe, ni exercice. Il ne seraient en rien normatifs comme le sont les actuels documents d'accompagnement des programmes, dont on se passerait d'ailleurs.

Problématiques

La mode serait de ne plus définir les programmes par des contenus, mais par des problématiques. Selon Robert, la problématique est "l'art, la science de poser des problèmes". Le rôle des mathématiques est d'abord de résoudre des problèmes. Pour cela il faut évidemment en poser. J'imagine que ladite mode sous-entend qu'il ne faut pas introduire de notion, d'outil sans avoir parlé du ou des problèmes qu'il s'agissait de résoudre. On ne peut qu'y souscrire comme le fait, semble-t-il, l'APMEP.

Prenons un exemple. En terminale S, le programme insiste notamment sur le "langage de la continuité". Y a-t-il une problématique, ou plus simplement un problème, auquel ce langage correspondrait? Le fait de donner un sens "mathématique précis" — ce qu'on ne fait d'ailleurs pas, mais c'est une autre histoire — à la "notion intuitive de continuité" n'est pas satisfaisant. Pourquoi aurions-nous besoin de continuité, intuitive ou pas?

Quand on regarde l'ensemble du programme, on s'aperçoit vite qu'un seul des grands théorèmes sur les fonctions continues y figure, c'est le théorème des valeurs intermédiaires. Malheureusement, si ce théorème est énoncé dans sa généralité, il n'est demandé de savoir montrer que le passage du cas général au cas particulier d'une fonction monotone, autrement dit rien du tout. Plus encore, dans les exercices proposés, on demandera même pas d'invoquer ce théorème. On se contentera de lire le tableau de variations comme jadis, ce qui revient à l'ignorer superbement. Ainsi le langage de la continuité, tel qu'il apparaît dans les programmes, ne répond à aucune problématique.

Que faudrait-il faire pour que parler de continuité ait un sens? Pour ne pas bouleverser le programme d'aujourd'hui, il faudrait au moins démontrer un énoncé qui y figure et où l'hypothèse de continuité intervient. La dérivation de l'intégrale par rapport à sa borne supérieure serait un choix difficile à tenir, parce que la conclusion établit une limite, notion équivalente à celle de continuité. Il est difficile de préciser les contours d'un théorème quand on doit à la fois jouer sur les hypothèses et sur la conclusion.

Il ne reste guère que le théorème des valeurs intermédiaires, dont la conclusion ne pose aucun problème. Il faudra donc l'établir, par exemple dans le cas monotone. Cependant il faudra l'attaquer *avant* d'avoir défini la notion de continuité. Cela signifie qu'il n'est pas question de s'appuyer sur des propriétés liant limites et continuité, d'établir la limite de la suite $f(x_n)$ lorsque la suite x_n est convergente et la fonction f continue.

C'est heureusement possible. Considérant les nombres réels, à la manière de Lebesgue, comme des développements décimaux, on peut construire par décatomie un nombre x destiné à être une solution de l'équation $f(x) = a$. Au moment de montrer que le candidat x convient, on est amené à faire des hypothèses sur la fonction f, à savoir qu'elle ne fait pas de saut en ce point, ni à gauche ni à droite.

Autrement dit, on fait des hypothèses locales sur l'existence *de* valeurs intermédiaires, de barreaux de l'échelle si l'on veut, pour obtenir une conclusion globale portant sur *toutes* les valeurs intermédiaires.

Ce faisant on a aperçu la différence avec la "notion intuitive", celle du trait qui, pour ne pas s'interrompre, doit bien passer par toutes les valeurs. Ladite notion intuitive correspond non pas à la l'hypothèse mais à la conclusion. Elle ne traduit pas la notion de continuité, mais celle de connexité, ou encore de continuum, en dépit du fait que ce dernier terme utilise le même radical.

Maintenant on peut se demander ce qui se passerait si la fonction donnée n'était pas supposée monotone. Cela n'empêchera pas de reprendre le même algorithme de décatomie que dans le cas monotone. Cependant les choses se compliquent au moment d'établir que le candidat pressenti convient. On doit être sûr qu'en augmentant ou diminuant une décimale on ne changera pas beaucoup le résultat. En analysant la démonstration du cas particulier, on s'aperçoit qu'on pouvait, par exemple, déduire de $f(x+\alpha) < f(x)+\delta$ le fait que $f(x+h) < f(x)+\delta$ pour tous les h entre 0 et α, et donc en particulier pour h assez petit de la forme $0,00\ldots1$. On voit très bien s'introduire la définition générale d'une fonction continue de cette façon.

Une fois cette analyse faite, on peut répondre à la question laissée en suspens depuis la classe de première, qui était le choix de la *vraie valeur*, autrement dit la définition d'une limite en un point. A partir de là on peut passer aux limites à l'infini, puis faire le lien avec les limites de suites, supposées elles-mêmes introduites par une autre problématique. C'est dans ce sens qu'il faudrait opérer, et non pas dans le sens aujourd'hui préconisé, qui est de généraliser, sans raison évidente, la notion de limite de suite, puis de glisser sur les limites en un point, pour tricher ensuite sur la continuité.

Modernisme et prudence

On va tenter de mieux comprendre en quoi le choix d'une stratégie pour présenter le calcul différentiel et intégral au lycée est délicat, pourquoi certaines idées un peu trop modernes, comme telle idée que nous avons tenté d'exploiter dans la quatrième proposition donnée en annexe, se révèlent inapplicables.

Pour cela, on va présenter très sommairement la genèse des mathématiques, en mettant en regard les problèmes considérés d'un côté et les concepts introduits de l'autre, dans une perspective pseudo-historique.

problème	**concept**
contrôle des troupeaux	nombre
étude des corps solides	géométrie d'Euclide aire plane tangente
suites arithmétique et géométrique	exponentielle et logarithme
étude des mouvements	relation entre dérivée et intégrale équation différentielle
désintégration radioactive	

En cherchant à présenter intégrale et dérivée à partir du théorème fondamental du calcul différentiel, suivant l'une des stratégies que nous avons envisagées, nous avons simplement omis le fait que chacune de ces notions était déjà présente chez les grecs. La *dérivée* est une *pente*; on la trouve déjà dans le concept de tangente. L'*aire* géométrique contient déjà le concept d'*intégrale*. L'élément nouveau, notamment avec Leibniz, est la possibilité de considérer la variable de temps comme une variable d'espace. C'est ce qui permet d'intégrer par rapport au temps, en considérant une aire qui a la dimension LT et non L^2 comme en géométrie. C'est aussi ce qui permet de dériver par rapport au temps en prenant une tangente à une trajectoire dans un espace de dimension LT également. Et finalement c'est ce qui permet de faire le lien entre tangente et aire. Dans le cadre de la géométrie pure, c'était impossible.

Aussi faut-il sans doute amener les concepts de dérivée et d'intégrale avant d'aborder le théorème fondamental. On dira qu'une dérivée est une pente, qu'une intégrale est une aire (avec un signe).

Maintenant, lorsque dans les nouveaux programmes du lycée, l'on cherche à introduire la fonction exponentielle à partir de son équation différentielle, déjà on prend un risque infiniment plus grand. Ladite fonction sort déjà de la comparaison entre suites arithmétique et géométrique. Autrement dit elle provient du problème des intérêts composés. Or il n'est besoin pour cela que du concept de nombre.

Que dire alors quand on part de la désintégration atomique? Même si l'on cherche à partir de la physique, on peut choisir une question moins épineuse.

Ce qu'on vient de dire n'est qu'un éclairage de plus sur le sujet. Cela ne suffit pas à condamner les visions modernes. Il s'agit juste d'inviter à la prudence.

En effet il n'est pas exclu qu'une idée provenant de la Science moderne vienne renouveler la stratégie de l'enseignement dans le sens de l'unification et de la simplicité. Les nombres, tels que nous les connaissons aujourd'hui et tels qu'Henri Lebesgue en parle dans son traité sur la mesure des grandeurs, sont désormais incontournables. On ne va pas tout ramener à la géométrie comme au temps des grecs. L'algèbre, telle que pratiquée aujourd'hui et apparue en Europe à la renaissance, marque un progrès sans retour par rapport aux arabes. Il n'y a donc pas de raison pour que le phénomène ne puisse se reproduire.

Les clés de l'essentiel

Une stratégie pour l'enseignement d'une discipline comme les mathématiques doit-elle s'inspirer de la démarche historique? Doit-on considérer que si l'humanité a mis beaucoup de temps pour faire émerger un concept, peut-être est-ce parce qu'il contient une difficulté incontournable? Ou doit-elle faire table rase de l'histoire? Doit-on partir de la dernière vision que la science moderne peut avoir d'un concept, puisqu'il s'agira de la version la plus évoluée?

Pour appuyer la première stratégie, je citerai une remarque qui m'a été faite par Jean Dhombres. La présentation d'une théorie est souvent très satisfaisante quand elle a été écrite par son créateur. Il est vrai que la première version contient souvent beaucoup d'éléments qui seront oubliés par la suite, à commencer par les raisons qui ont motivé la théorie. Cependant je ne connais personne qui aille jusqu'à dire qu'il faille calquer l'apprentissage sur le modèle historique. Jean Dieudonné a donné l'image suivante: on ne commence pas à apprendre à faire du vélo sur une draisienne.

En revanche il est des partisans d'une stratégie niant totalement la perspective historique. Mieux encore, André Revuz suggère de choisir l'ordre exactement inverse. C'était le credo des promoteurs des "mathématiques modernes". On commençait par apprendre des structures creuses, que l'on enrichissait progressivement. Philippe Lombard, comme on l'a dit, explique très bien l'absurdité de cette vision. On doit partir de situations riches que l'on abstrait progressivement.

Je vais essayer de proposer une grille de lecture, en montrant qu'on peut découper la séquence complète de l'enseignement d'un sujet donné en deux phases avec, entre les deux, une charnière bien précise. Ce schéma servira à la mise en place des activités de l'IREM de Lorraine l'an prochain. Ce sera la traduction locale de cette recherche de l'essentiel qu'on a lancé en mars 2003 et qui a eu tant de mal à trouver ses premières marques. C'est un peu parce qu'on a choisi enfin de répondre à des demandes formulées depuis quelque temps déjà, précisément de s'occuper d'un côté des premières années universitaires et de l'autre de l'école élémentaire, que l'importance d'une progression complète est apparue. C'est aussi parce qu'on a découvert des similitudes entre certains contresens apparus dès l'école élémentaire et retrouvés dans les cours universitaires.

Commençons par la première phase, celle pour laquelle la référence historique s'impose. Quand on a associé les mathématiques à la genèse de la Science, suivant en cela Rudoph Bkouche, on a expliqué qu'il s'agissait d'étudier au départ le monde physique. Peu à peu on va dégager des concepts, comme en géométrie : les points, les droites, les longueurs, les angles ... et retenir quelques propriétés résultant directement de l'expérience. De ces propriétés, prises si l'on veut comme axiomes, on en déduira d'autres. C'est ainsi qu'on peut, à la manière d'Euclide, admettre l'un des cas d'égalité des triangles et en déduire les autres. On continuera sur la lancée avec les plans, les vecteurs, le produit scalaire ... Ce faisant on opère toujours sur le plan ou l'espace physiques, mais on manipule des objets mathématiques de plus en plus abstraits.

Il arrive un moment où, les notions utiles ayant été clairement dégagées, on éprouve le besoin de faire un inventaire de ce qui aura semblé fondamental. On va ainsi définir des structures, comme celle d'espace vectoriel, d'espace vectoriel euclidien ... Et on va construire des modèles abstraits qui sont des exemples de telles structures, comme les espaces numériques $\mathbf{R}^k$, constructions d'ailleurs incomplètes car la droite numérique $\mathbf{R}$ n'aura peut-être pas encore été construite comme modèle abstrait. C'est là que se situe la charnière dont on a parlé.

Ensuite on va travailler sur les modèles abstraits indépendamment du rapport au monde physique qui a préludé à leur construction. Certes on n'aura pas oublié ce monde concret. Il procurera toujours les images mentales sans lesquelles le travail sur les modèles abstraits ne trouverait pas de fil pour être dirigé. D'autre part s'imposer de faire régulièrement des mathématiques dans un contexte, tel un contexte de sciences physiques, est un exercice dont la pratique ne devrait jamais être arrêtée. Cependant, en mathématiques, les points d'appui auront changé. Prenons l'exemple de l'orientation dans l'espace. Avant la charnière on peut invoquer le petit bonhomme d'Ampère. Après il n'en est plus question. L'orientation est une donnée supplémentaire. Elle peut être canonique dans le modèle $\mathbf{R}^k$. Sinon, dans un espace vectoriel réel général, il y a deux orientations possibles dont aucune n'est privilégiée.

On a pris l'exemple de la géométrie et de l'algèbre linéaires. Suivant le sujet, la charnière peut être placée assez tôt dans la progression, au lycée par exemple, ou plus tard, dans les dernières années de l'université peut-être. Le choix de placer la charnière en tel ou tel moment de la scolarité est délicat. C'est une décision d'ordre éminemment didactique qui demande de s'appuyer sur de réelles expériences.

On noterait que pour l'Analyse, avant la mise en application du programme de Nicolas Bourbaki par Gustave Choquet en 1953, la charnière était, pour ainsi dire, en $+\infty$. A l'inverse, la réforme dite des "mathématiques modernes" dont on a parlé voulait la placer en $-\infty$. C'est d'ailleurs ce que revendique toujours André Revuz. En algèbre linéaire, la charnière se situait il y a quelques années au lycée. Aujourd'hui elle est en première année universitaire et l'on débat par exemple à Nancy pour savoir si ce doit être au premier ou au second semestre.

Cependant il est désastreux de laisser le flou, voire de passer à plusieurs reprises de part et d'autre de la charnière. Aujourd'hui c'est ce qu'on fait en Analyse. Dès les classes de première et de terminale, on introduit un formalisme abstrait pour les limites ou la continuité, mais, en même temps, on continue de se reposer sur des idées intuitives. En première année universitaire on donne en principe des définitions complètes mais on ne les utilise pas vraiment et on n'attend pas qu'elles soient maîtrisées. C'est finalement en troisième année qu'on franchit vraiment la charnière, et encore ce n'est pas si sûr.

La façon dont la géométrie est traitée en sixième et cinquième joue aussi l'ambiguité. L'introduction des transformations de l'espace comme les symétries centrale et axiale renvoie à cette tentation universelle de se placer au-delà de la charnière, pour avoir l'impression de faire de vraies mathématiques. Comme tout est admis et passé sur le compte de l'expérience réelle ou virtuelle, on n'y est pas.

La présentation de la notion de fonction participe encore du jeu de masques. On commence à parler des fonctions au collège, mais on ne sait pas quel statut leur donner. Les élèves manquent cruellement d'exemples. On introduit la notation fonctionnelle en seconde, de façon certainement prématurée car les exemples que l'on donne relèvent du sens commun, de représentations graphiques notamment. Cela conduit à des maladresses à répétition dans la manipulation, notamment quand il s'agit de résoudre des équations différentielles. A l'université on fait comme si tout était clair, et on en oublie de définir ce qu'est une application injective ou surjective. Finalement on vit en permanence sur la pliure de la charnière. En maîtrise on introduit les espaces fonctionnels alors que les étudiants n'ont jamais compris ce qu'était une fonction.

Je reviens sur ce qu'on va mettre en chantier à l'IREM de Lorraine. On va d'abord mettre en place un groupe "université", ce qu'on n'avait encore jamais tenté jusqu'ici. Les enseignants du second degré y seront associés, l'idée étant de produire de petits fascicules — de 30 pages au maximum — sur un thème donné, destinés aux enseignants du lycée et aux étudiants. On y présenterait d'une part une progression, d'autre part une annexe expliquant en quoi consiste la phase qui est au-delà de la charnière. A titre d'exemple le thème des fonctions sera traité dès cette année.

On va aussi s'intéresser à un sujet qui est présent partout, mais qu'on a considéré jusqu'ici en Lorraine sous un angle exclusivement critique, celui de l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique. On cherche à savoir si cette utilisation peut respecter l'approche de la géométrie que défend Rudolph Bkouche, laquelle était encore pratiquée il y a quelques décennies avec les moyens, papier et crayon, les plus traditionnels.

On va encore ouvrir un groupe "école élémentaire", répondant à une demande récurrente de l'IUFM. L'entrée choisie est la lecture d'énoncés en liaison avec le sens des opérations et la notion de dimension en physique. On cherchera à déterminer ce qu'il faudrait changer dans les habitudes d'aujourd'hui pour se placer résolument en-deçà de la charnière. Dans le même ordre d'idées, mais dans le prolongement de travaux qui ont été réalisés dans notre IREM, on va s'intéresser à l'approche des mathématiques au collège par les petits problèmes concrets.

Il n'est pas certain que l'on puisse réaliser tout ce programme. De plus, si l'on présenté ces projets de groupe, ce n'est pas pour en revendiquer l'exclusivité, comme c'est l'usage pour les thèses de lettres. Si d'autres IREM ou des commissions inter-IREM veulent s'intéresser à ces questions, nous en serions ravis.

ANNEXES

Analyse au lycée, 1

La première présentation proposée est tout sauf originale. Il s'agit simplement de s'inspirer d'un traité de mathématiques digne de ce nom, en commençant par présenter correctement la notion de limite. Il n'est pas question de se limiter "aux limites à l'infini" comme le préconise le programme actuel. Il n'est pas question non plus de présenter le "langage de la continuité" comme une "traduction mathématique de la notion intuitive" correspondante.

Il est peu probable que la ligne proposée puisse être tenue aujourd'hui. On peut espérer qu'une fois les faiblesses de l'enseignement en amont, de l'école élémentaire aux premières années du lycée, corrigées et la diversité des filières du lycée réintroduite, le choix puisse être tenté en terminale scientifique dans sa variante "fondamentale". Actuellement on ose à peine y penser pour les deux premières années de l'université.

On dispose d'un très bon exposé, celui de G. H. Hardy dans son *Course of Pure Mathematics* dont la première édition date de 1908. Les choses sont suffisamment décortiquées pour qu'on puisse en tirer l'occasion de "débats scientifiques".

Voyons par exemple le soin extrême avec lequel il présente la définition d'une limite en un point, dans une version transcrite ici dans un style un peu moins littéraire.

If,

when any number $\delta > 0$, *however small, is assigned, we can choose* $y_0(\delta) > 0$ *so that, for all values of* y *such that* $0 < y \leq y_0(\delta)$, *we have* $|\phi(y) - l| < \delta$,

then we say that $\phi(y)$ *tends to the limit* l *as* y *tends to* $0 \ldots$

Cela n'a pas grand chose en commun avec l'infâme soupe qui est servie dans de nombreux manuels aujourd'hui. La formalisation de la notion de limite passe par l'usage maîtrisé de quantificateurs que l'on saura poser, de la façon qui est indiquée dans la définition précédente. Avec des notations plus conformes aux habitudes scolaires, on supposera $\epsilon > 0$ donné et on choisira un $\alpha > 0$ convenable. On n'écrira jamais de ligne utilisant des symboles logiques.

Le choix fait ici suppose que des tâches routinières, c'est-à-dire des listes d'exercices, viennent étayer cette présentation. Autrement dit un investissement non négligeable sera à consentir. Même dans la situation la plus favorable, cela suppose que l'on ait mis un bémol aux prétentions applicatives de tout poil.

Cela étant, il est sans doute possible de simplifier un peu le discours de G. W. Hardy, même s'il semble inaméliorable. Seule modification significative, on n'utilisera pas le symbole lim.

Analyse au lycée, 2

La présentation qu'on envisage maintenant est située pratiquement à l'opposé de la précédente. L'ambition en est très modeste. Aussi n'a-t-on prévu qu'un discours minimal de nature heuristique sur les notions fondamentales et aucune tâche routinière pour conforter leur compréhension.

Dans ces conditions il faut abandonner toute tentative de définition. On pourra parler de *passage à la limite* sur des exemples. Ainsi dira-t-on que

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

prend la valeur 1 à la limite quand x tend vers 0 par valeurs $\neq 0$.

Cela n'interdit pas de préparer le terrain pour une approche ultérieure plus formelle. On pourra reprendre un peu de la présentation de l'ouvrage cité de G. W. Hardy pour commencer à expliquer ce qui se cache derrière l'idée de limite. Cependant on n'ira pas jusqu'à l'écriture d'une définition, a fortiori d'une définition en forme.

Plutôt que des “règles opératoires” toutes faites, qui mettent en jeu des réflexes pavloviens au point que tous les exercices peuvent être résolus “directement”, on mettra en avant la compréhension technique. Ainsi écrira-t-on

$$\frac{x^3+x^2}{x^3+x\sin x} = \frac{1+1/x}{1+\sin x/x^2}$$

pour conclure à la valeur limite 1 en 0.

De même ignorera-t-on le “théorème des gendarmes”, qui répond à cet intérêt maladif pour les énoncés les plus futiles. On préfèrera développer la méthode consistant à retrancher la limite supposée et à majorer le résultat. Cela a au moins l'avantage de s'appliquer au cas vectoriel qu'il faudra bien considérer un jour.

Ainsi prendre une limite ne sera rien d'autre que lever une indétermination : on se ramène à des expressions qui tendent ostensiblement vers 0. De toute façon il serait illusoire de tenter de mettre dans la tête de l'élève une autre conception à ce niveau, puisque les seules tâches routinières auront cette levée pour objet.

On traitera de même les directions asymptotiques et asymptotes. La méthode consiste toujours, par différence, à se ramener à une limite nulle.

Cependant on pourra être plus précis dans le cas monotone, l'existence d'une limite finie ou infinie étant toujours assurée.

Pour définir une fonction continue en un point a, on pourra dire que les valeurs s'y raccordent. Ce n'est pas très glorieux mais présente une petite utilité quand même. En effet l'étude des fonctions périodiques, notamment la recherche de solutions périodiques d'équations différentielles, fait apparaître la continuité en ce sens. De même la conception à assistée par ordinateur, pour la construction mécanique ou la typographie, utilise des fonctions dont la continuité de certaines dérivées s'obtient par raccordement.

Pour une fonction monotone, la continuité en un point est l'absence de saut, aussi bien à droite qu'à gauche en ce point. En pratique on ne considèrera que des fonctions monotones par morceaux sur un intervalle. Cependant il n'est pas possible de faire l'hypothèse que les fonctions rencontrées auront a *priori* cette propriété. En effet elle est tout sauf stable par les opérations, contrairement aux majorations explicites dont on parle dans l'annexe suivante. La différence de deux fonctions monotones n'est pas monotone par morceaux en général. Comment peut-on vérifier la monotonie d'une fonction donnée? En prenant sa dérivée, donc en appliquant le théorème des accroissements finis. Or si l'on pouvait imposer a priori aux fonctions d'être monotones par morceaux ce théorème serait une banalité.

La continuité est une propriété des fonctions qui traduisent un mouvement, lequel peut résulter d'un mécanisme par exemple. Historiquement c'est ainsi qu'était amenée la propriété des valeurs intermédiaires. Ce n'est pas une mince affaire. Qu'on pense aux difficultés rencontrées pour résoudre une équation telle que $x^3 = a$ par la géométrie ! Dans le programme scolaire, on a besoin de résoudre une équation $f(x) = a$, par exemple pour construire la fonction exponentielle à partir de la fonction logarithme ou l'inverse.

Plus généralement, beaucoup de grandeurs physiques dépendant du temps contiennent en elles-mêmes la propriété de continuité. En mathématiques on se devrait de ne présenter de fonction partout définie que continue.

En revanche l'idée "intuitive" du dessin de la courbe sans lever le crayon n'est pas bonne. Comme Guy Brousseau le fait volontiers remarquer, cette image représente la notion de connexité. Or c'est précisément le passage de la continuité à la connexité qui fait l'objet de la propriété des valeurs intermédiaires.

On peut bien énoncer un *théorème* des valeurs intermédiaires, en se limitant au cas monotone qui est largement suffisant, mais il faut alors le démontrer. Si l'on considère les nombres comme décimaux illimités, résoudre une l'équation $f(x) = a$ consiste à expliciter un procédé permettant de déterminer effectivement autant de décimales que l'on veut pour une solution de cette équation. On peut employer un algorithme de nature décatomique pour trouver un candidat x_0 dont on montre qu'il vérifie $f(x_0) = a$ par l'absurde, sachant qu'il ne peut y avoir de saut en ce point.

On noterait qu'ici la méthode ne doit pas faire illusion et n'est pas à voir comme une méthode de calcul approché; elle ne comporte pas de test d'arrêt lié aux erreurs de calcul. En revanche on doit faire attention à l'ambiguité du développement décimal.

Qu'est-ce alors qu'une *dérivée*? C'est simplement une *pente limite*. Plus précisément calculer la dérivée en x de la fonction $y = f(x)$ est déterminer, si on le peut, la limite de la pente

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

quand Δx tend vers 0 par valeurs $\neq 0$.

Ce faisant on n'a pas eu peur d'appeler *pente* le quotient $\Delta y/\Delta x$. La pente s'oppose au *taux* qui est $\Delta y/y\Delta x$. Ce sont les termes employés notamment en physique (pour la pente) et en biologie ou en économie (pour le taux). Evidemment la dérivée sera la pente d'une tangente en géométrie, une vitesse (instantanée) en mécanique, un coût marginal en économie.

La notation

$$\frac{dy}{dx}$$

pour désigner la limite de $\Delta y/\Delta x$ est à introduire en même temps que $f'(x)$. Son pouvoir évocateur est indiscutable. On s'en servira pour donner les règles de calcul sur les dérivées. L'important n'est pas tant que les démonstrations soient formalisées. C'est davantage le fait que l'élève puisse retrouver les formules.

On est évidemment très loin de la dérivation vue comme une opération formelle. Cette interprétation permet peut-être de vendre des calculatrices mais elle est aberrante sur le plan épistémologique. Ce n'est pas parce que le formalisme du calcul des dérivées s'est imposé historiquement avant qu'une définition satisfaisante des limites ait pu être produite que le formalisme a inspiré ce calcul.

Evidemment l'élève, confronté à de nombreux calculs de dérivées, développera probablement une conception allant dans le sens formel. Il est important qu'elle puisse fusionner avec les images de tangente, de vitesse qu'on lui aura également données. Ce peut être l'objectif d'exercices adaptés. C'est aussi la raison pour laquelle on a insisté sur la nécessité de savoir retrouver les formules de dérivation.

Venons-aux *intégrales*. L'intégrale d'une fonction f positive sur le segment $[a, b]$ est une *aire*. On étend la définition au cas d'une fonction réelle par différence.

Il est tout à fait inutile de prendre des précautions à cet égard, contrairement aux limites. Il faudrait juste noter que l'intégrale n'a pas toujours les dimensions d'une aire.

L'essentiel du calcul différentiel et intégral est constitué de *deux énoncés fondamentaux*. Le premier dit que la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

admet $f(x)$ comme dérivée en x. C'est le théorème de dérivation par rapport à la borne supérieure. On le démontrera dans le cas monotone.

Le second dit que

$$f(a) - f(b) = \int_a^b f'(t)dt$$

et c'est le théorème dit des accroissements finis.

Ici c'est plus délicat. On se ramène au cas où $f' = 0$. Actuellement on apprend en classe de première que si $f' \geq 0$ alors f est croissante, le résultat étant admis. En terminale on prétend donner un sens précis à f' mais on ne revient pas sur la propriété (mal) acquise.

Faut-il se contenter d'illustrer une telle propriété, sachant qu'elle n'est pas accessible à l'expérience? Bien sûr il est difficile d'imaginer qu'avec une pente ou une vitesse positive, on puisse descendre ou reculer. Est-ce suffisant?

Cela pose un problème fondamental. Pour imposer une démonstration, faut-il montrer une fonction qui n'est pas continue par morceaux, sachant que ce n'est pas très raisonnable au lycée? Ou bien faut-il considérer que la démonstration est impérative? Qu'elle n'est pas seulement là pour réparer les contradictions quand on en rencontre. La réponse est externe aux mathématiques et liée à la confiance que lui accordent les utilisateurs.

On peut aussi invoquer une démonstration à la Rolle, utilisant l'existence d'un maximum. L'avantage est qu'on voit mieux ce qu'il faut admettre et qui est bien sûr inacessible faute d'une définition explicite de la continuité. Est-ce mieux cependant?

Peut-être faut-il ici faire une démonstration dans un cas particulier réaliste, comme cela est proposé dans la présentation qui suit.

Notons pour finir que tout le temps gagné sur les définitions abstraites pourra être investi plus utilement pour calculer des aires, des volumes, et pour résoudre des équations différentielles simples sans se priver de l'illustration par le contexte, physique ou autre.

Analyse au lycée, 3

Cette présentation est guidée par l'idée suivante. Plutôt que de présenter continuité et dérivabilité dans le cadre le plus général, on se restreint à des situations particulières plus "calculables".

Plus précisément on se place dans un cas permettant l'écriture de majorations explicites, majoration de l'accroissement Δy en fonction de l'accroissement Δx pour la continuité, majoration de l'erreur $\Delta y - k\Delta x$ pour la dérivée.

A la liste de tâches routinières s'ajoutera alors

- la production de majorations,

ce qui n'est certainement pas un mal. Le moins qu'on puisse dire est que les élèves qu'on retrouve à l'université comme étudiants n'ont pas développé une expertise très pointue dans ce domaine.

Par ailleurs travailler sur des majorations explicites est plus accessible que comprendre la notion formalisée de limite. Pour autant il n'est pas sûr que ce soit accessible à suffisamment d'élèves du lycée.

On vise surtout le programme de spécialité, ou bien une variante davantage "sciences fondamentales" de la terminale ES. Pour élargir le public concerné, on peut aussi envisager de développer les arguments sur quelques exemples significatifs.

La continuité sera introduite par une condition du type

$$(c) \qquad |f(x+h)-f(x)| \leq C|h| \quad \text{ou} \quad |\Delta y| \leq C|\Delta x|$$

sur un segment, condition dont on peut montrer la stabilité par somme, produit, inverse (minoré) et composée.

Etablir des relations de ce type, notamment pour les fonctions usuelles, pourra donner lieu à des tâches routinières.

De son côté, la propriété pour la valeur k d'être la dérivée en x sera introduite par une condition du type

$$(d) \qquad |f(x+h)-f(x)-kh| \leq C|h|^2 \quad \text{ou} \quad |\Delta y - k\Delta x| \leq C|\Delta x|^2 \ ,$$

ce qui n'empêche pas d'expliquer que k est alors la limite d'une pente.

La propriété (d) implique la propriété (c) sur un segment. On peut montrer sa stabilité par somme, produit, inverse (minoré) et composée et justifier ainsi les règles de calcul des dérivées dans ce cadre.

On démontre le théorème de dérivation de l'intégrale par rapport à sa borne supérieure sous l'hypothèse (c) , ce qui n'est pas difficile puisqu'alors

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(x) + R(h)$$

où $|R(h)| \leq C|h|$.

On démontre le théorème des accroissements finis sous l'hypothèse (d), qui implique

$$|f'(x+h) - f'(x)| \leq 2C|h|$$

et permet d'utiliser le premier énoncé. Par différence on se ramène ainsi à faire la démonstration dans le cas où $f' = 0$. Il s'agit ainsi de montrer que si

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^2$$

alors f est constante.

Peut-être est-il bon pour une fois de faire une vraie démonstration? On imagine le décor du "débat scientifique". L'hypothèse, qui signifie que $|f(x+h)-f(x)|$ est petit, est a priori plus faible que la conclusion, qui signifie précisément que $|f(x+h) - f(x)| = 0$.

La démonstration est possible et même fort instructive. On procède par l'absurde en supposant par exemple $f(b) > f(a)$ et en découpant $[a, b]$ en N intervalles égaux de longueur $h \leq (f(b) - f(a))/2C(b-a)$.

La fonction logarithme, si on l'introduit par une intégrale vérifie sur $[a, b]$ la propriété

$$\frac{|h|}{b} \leq |\log(x+h) - \log x| \leq \frac{|h|}{a}$$

et on peut en déduire la fonction exponentielle avec la propriété (c), puis sa dérivée.

Tout ce qui précède est cohérent dans la mesure où les fonctions considérées sont construites à partir des fonctions 1, x, $\cos x$ et $\sin x$, $\exp x$, $\log x$ et $\sqrt{x}$, les deux dernières ne pouvant intervenir sur un intervalle contenant 0. Ce n'est déjà pas si mal.

Evidemment les calculatrices seront interdites. D'un autre côté on demandera une présentation soignée des calculs qui montre qu'ils sont maîtrisés.

Analyse au lycée, 4

Cette présentation est la plus radicale. Elle fait complètement l'impasse sur la notion de limite. Elle donnerait bien lieu à quelques tâches routinières qui seraient des raisonnements par l'absurde. Il n'est pas sûr qu'on puisse les pratiquer au lycée, même dans des conditions optimales.

L'intégrale sera une aire algébrique. On ne précise pas les conditions à exiger d'une fonction pour qu'on puisse définir son intégrale. En pratique on n'intègrera que des fonctions continues.

L'idée qui gouverne cette présentation est la suivante. La notion fondamentale n'est pas la dérivée mais l'intégrale. C'est la force, ou l'accélération, qui produit la vitesse et c'est la vitesse qui produit le déplacement, et non l'inverse.

On dira que la fonction f est la dérivée de la fonction F sur l'intervalle I si l'on a

$$F(x) - F(y) = \int_x^y f(t)dt$$

pour tous x, y dans I.

On a bien compris que la dérivée était prise au sens des distributions. Le théorème de dérivation par rapport à la bonne supérieure et le théorème des accroissements finis sont des banalités dans ce cadre.

Comment trouver f à partir de F? Un changement de variable affine, dont on contrôle l'effet sur les aires, montre que

$$(*) \qquad F(x) - F(y) = (x - y)\tilde{f}(x, y)$$

où la fonction de pente $\tilde{f}$ est donnée par

$$\tilde{f}(x, y) = \int_0^1 f((1 - t)x + ty)dt$$

de sorte que

$$\tilde{f}(x, x) = f(x) \ .$$

Jusqu'ici tout est trivial. Rien n'empêche de voir la dérivée comme une pente en un point, la limite étant ici la "vraie valeur". La propriété (*) permet d'obtenir facilement des formules de dérivation.

Il faut cependant montrer que la dérivée est caractérisée par la propriété ci-dessus. Surtout il faut donner des conditions pratiques pour la dérivabilité d'une fonction F de façon à justifier les formules évoquées.

En fait on doit établir que la condition (*) implique la dérivabilité de F, sous réserve d'une hypothèse convenable de continuité de $\tilde{f}$. Cela revient à définir en une seule opération la classe C^1. C'est là que le bât blesse.

D'abord il faudra exprimer cette condition, en se plaçant sur un segment par exemple. On peut demander qu'étant donné $\epsilon > 0$ on puisse choisir $\alpha > 0$ tel que $|x - y| \leq \alpha$ implique $|\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, x)| \leq \epsilon$. Cela veut dire que les pentes des sécantes approchent celle de ce qui sera la tangente. Cette condition est raisonnablement vérifiable en pratique. En revanche son énoncé présente les écueils de la définition formalisée de la continuité.

On pourrait bien sûr se contenter d'une hypothèse plus forte, du genre

$$|\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, x)| \leq C|x - y|$$

ce qui nous ramènerait essentiellement à la présentation précédente.

Ensuite il faudra montrer que si F vérifie (*) et $\tilde{f}(x, x) = 0$, alors F est constante. C'est là que le démonstration du théorème des accroissements finis qu'on a évacué refait surface.

Il y aurait un travail gigantesque à effectuer pour faire de l'idée ici présentée le germe d'un enseignement de lycée. Même s'il semble minimal, réduit à un seul énoncé, tel quel le discours n'est accessible qu'à des étudiants de maîtrise. Peut-être ne faudrait-il pas donner l'énoncé indiqué dans le cas général mais en tirer des exercices routiniers dans des cas particuliers. Ces exercices seraient-ils faisables? A voir.

Analyse au lycée 5

On va tenter encore une nouvelle stratégie pour la présentation de l'Analyse au lycée. Cette fois-ci, on envisage, d'emblée, deux niveaux, l'un grossier et l'autre un peu plus approfondi.

Dans tous les cas on prend des nombres réels la définition qu'en donne Henri Lebesgue dans son traité sur la mesure des grandeurs; ce sont des développements décimaux illimités, pour lesquels on a résolu les cas d'indétermination. On ignorera les suites adjacentes, comme le théorème des gendarmes, et ce pour plusieurs raisons. D'abord il faut limiter le vocabulaire et éviter ce qui n'est pas appelé à intervenir plus tard. Ensuite il ne faut pas privilégié au delà du raisonnable le cas réel.

Commençons par les **limites de suites**. On envisagera d'abord les suites monotones, par exemple croissantes en distinguant le cas majoré ou non. Dans la version grossière on caractérisera la limite de (x_n) par $x_n \leq l$ et l'existence de valeurs aussi proches que l'on veut de l; on expliquera graphiquement l'algorithme qui permet de construire l. Dans la version approfondie on précisera ce que signifie l'existence de valeurs aussi proches que l'on veut : tout intervalle $]k, l]$, où $k < l$, contient au moins un x_n; on fera la démonstration des propriétés de la valeur obtenue par l'algorithme.

Pour établir la limite d'une suite quelconque, on apprendra qu'il faut majorer $|x_n - l|$ par le terme général d'une suite qui tend ostensiblement vers 0. Partant de là on pourra établir quelques propriétés. Dans la version approfondie, on précisera qu'il s'agit de majorer par le terme général d'une suite décroissante qui tend vers 0. On démontrera tout proprement.

Le cas d'une limite infinie générale se traitera de façon semblable. On minorera (ou majorera) le terme général par celui d'une suite qui tend ostensiblement vers $+\infty$ (ou $-\infty$).

Pour les **limites de fonctions à l'infini**, on fera exactement de même. Par exemple

$$xe^{-x} \leq \frac{2}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$$

montre que $xe^{-x} \to 0$ ou $e^x/x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Passons aux **limites de fonctions en une valeur finie**. On commence par le cas d'une fonction f monotone, par exemple croissante sur un intervalle $]a, b]$, où $a < b$, et minorée. On dira que $f(x) \to l$ quand $x \to a$ par valeurs $> a$ si $f(x) \leq l$ et si f prend des valeurs aussi proches que l'on veut de l. Dans la version approfondie, on précisera que tout intervalle $[l, k[$, où $k > l$, contient au moins une valeur de f. Pour l'existence on renverra au cas des suites.

Pour une fonction quelconque, on va se placer d'emblée dans le cas d'une limite ordinaire. Celui d'une limite à gauche ou à droite se traite de la même façon.

Pour établir la limite en x, on apprendra qu'il faut obtenir une majoration

$$|f(x+\Delta x)-l| \leq \epsilon(|\Delta x|)$$

où $\epsilon(|\Delta x|)$ tend ostensiblement vers 0 quand $|\Delta x|$ tend vers 0. Dans la version approfondie, on précisera que ϵ est une fonction positive croissante sur un intervalle $[0, a]$ qui tend vers 0 en 0.

Partant de là, on couvre la continuité et la dérivée. On démontrera le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas monotone, en construisant un développement décimal illimité convenable. Une fonction monotone est continue en a si elle ne présente pas de saut, ni à gauche ni à droite.

Maintenant, pour une version encore plus approfondie, on peut éventuellement **aller plus loin**, en cherchant à se débarrasser de la suite ou fonction auxiliaire que l'on a introduite pour une limite générale. Y a-t-il une propriété de l que l'on puisse exprimer, qui n'utilise pas cet artifice? Ce peut être l'objet d'un vrai débat. J'attends que Marc Legrand donne son avis sur le sujet, et que des émules fassent l'expérience. Ce niveau plus approfondi me semble avoir davantage sa place en DEUG.

EMPRUNTS

Lors d'un débat sur la façon d'accéder à l'essentiel, j'ai dit qu'il fallait procéder par pillage. En effet tout à été dit sur le sujet. On a seulement oublié de lire ou de relire. Aussi n'ai-je pas eu besoin d'inventer quoi que ce soit. Voici une première liste d'emprunts contractés sans l'autorisation des prêteurs.

J'ai d'abord volé à Poincaré, d'abord, le choix fondamental de faire reposer les définitions en mathématiques sur la physique.

J'ai volé à Arnold la reprise de l'idée de Poincaré, la vision des mathématiques comme science physique, la nécessité de s'appuyer en toute occasion sur le sens concret.

J'ai volé à Rudolph Bkouche la reprise des idées des deux précédents et la merveilleuse illustration qu'il en fait à propos de la genèse de la géométrie.

J'ai volé à Lebesgue la compréhension qu'il faut avoir des nombres réels, lesquels sont des développemenrs décimaux en même temps qu'ils mesurent les longueurs, aires, volumes ou masses.

J'ai volé à Jean Dhombres, entre autres, l'excellent exemple de mathématiques mixtes qu'a constitué la résolution du problème de la stabilité des navires.

J'ai volé à Marc Legrand une foule de petits exemples, où les mathématiques sont en prise sur le monde réel alors que beaucoup pensent aujourd'hui que c'est le monde réel qui est en prise sur les mathématiques.

J'ai volé à Roger Balian le rappel de la lourde responsabilité qui incombe aux mathématiciens de garantir aux physiciens la cohérence d'un langage sans lequel ces derniers ne pourraient pas s'exprimer.

J'ai eu envie de voler à Jacques Treiner, qui a bien sûr le droit d'être par ailleurs en désaccord avec tout ce que je dis, la vision admirable que le physicien expérimentateur peut d'avoir d'une dérivée.

J'ai volé à Philippe Lombard énormément de choses, notamment le fait les mathématiques soient forcées par la physique ou la mise en évidence du contresens qu'il y a à partir de structures creuses pour l'enseignement.

J'ai volé à Michel Merle, ou plus largement à la CREM, le projet d'enseigner un part des mathématiques dans un contexte physique où les notions, autrement désincarnées, pourront prendre corps.

J'ai volé à l'APMEP, même si je n'ai peut-être pas la même interprétation que d'autres, l'utilité de partir de problèmes, ou de problématiques comme on dit, pour introduire les notions.

J'ai volé au GRIP le précepte didactique selon lequel les différentes thèmes d'études doivent s'épauler mutuellement, contredisant les approches plurielles et divergentes à la mode aujourd'hui.

La liste pourrait se poursuivre indéfiniment. J'aurais peut-être mieux de dresser celle de ceux à qui je crois ne rien avoir volé. Encore que ce ne soit pas si sûr.

TITRE : Enseigner l'essentiel en Mathématiques

AUTEUR : Jean-Pierre FERRIER

PUBLIC VISE : Enseignants de collège et de lycée

RESUME : Il s'agit d'une quête de nature épistémologique pour tenter de définir comment on pourrait reconstruire l'enseignement des mathématiques du second degré en le recentrant sur les fondamentaux. L'idée, en rupture avec les mathématiques abstraites, dites "modernes", aussi bien qu'avec la tentation "modélisatrice" d'aujourd'hui, est de s'inspirer de la démarche scientifique. Partant du monde physique, on dégage peu à peu des notions abstraites sur lesquelles le discours hypothético-déductif peut se développer. Ce faisant on met en avant le slogan de l'unité de la Science, qu'on oppose aux diverses formes d'interdisciplinarité qui ne font que servir de paravent à un isolement de plus en plus radical des Mathématiques.

NOTE : Réflexion développée à partir de la réunion du Séminaire des IREM tenue en mars 2003 à Nice.

MOTS CLES : analyse, dérivée, épistémologie, essentiel, intégrale, interdisciplinarité, géométrie, mathesis, problématiques, programmes, Science.