I.R.E.M. DE LORRAINE
université HENRI POINCARÉ NANCY 1

MATHEMATIQUES VISUELLES

Osons des coloriages !

Préface

Les considérations esthétiques jouent un grand rôle dans l'activité mathématique. Pourquoi démontre-t-on des théorèmes ? Pour jouer leur rôle à l'intérieur de la Science, les mathématiques doivent présenter une construction logiquement cohérente. Mais est-ce cela qui motive individuellement le chercheur ? Probablement pas ; sinon, une fois une démonstration écrite on ne chercherait pas à revenir dessus pour la simplifier ou pour la remplacer par une autre. Il en est ainsi jusqu'à ce que l'on ait trouvé ce qu'on appelle « une belle démonstration ».

Aussi les auteurs de « Osons des coloriages » ont-ils bien raison de citer en introduction à leur démarche le célèbre passage de « A Mathematician's Apology » de Godfrey Harold Hardy qui se termine par ces mots : « *Beauty is the first test : there is no permanent place in the world for ugly mathematics.* »
Nous y reviendrons.

Maintenant quand on parle de belle démonstration, de quoi s'agit-il ? D'une démonstration où il n'y a rien d'autre que ce qui doit absolument y être. Autrement dit, une démonstration qui procède de la plus grande économie de moyens. Soit parce qu'elle sera très courte, soit parce qu'elle n'utilisera que des arguments élémentaires par exemple.
L'esthétique en mathématiques est donc à rapprocher de l'ergonomie. Est ainsi esthétique ce qui remplit une fonction sans rien d'inutile. Passant maintenant au domaine « visuel », on retrouve cette exigence dans la création industrielle aussi bien que dans la nature. C'est ainsi qu'Antoine de Saint Exupéry a pu expliquer la beauté d'une aile d'avion par exemple en la rapprochant des courbes naturelles. Les formes abouties, celles qui paraissent belles, sont donc simples. Et ce qui est simple relève souvent d'une définition mathématique. D'où le succès en architecture de formes telles que les ellipses. D'où aussi, dans le monde moderne de la construction industrielle ou de la typographie informatique, le succès des courbes tendues que l'on représente par des fonctions dites splines.

Venons-en à la couleur elle-même. Il est facile d'attirer le regard ou de flatter l'œil en mettant des couleurs partout. Les manuels de mathématiques, comme très probablement les autres, ne se privent pas d'utiliser de tels arguments pour se mettre en avant dans la concurrence. De ce point de vue la sobriété du noir et du blanc serait plus conforme à la recherche esthétique. Il ne s'agit donc pas de cela.
Si la couleur nous intéresse, c'est pour ce qu'elle apporte en ergonomie. Les concepteurs de l'interface graphique d'un ordinateur personnel bien connu l'ont bien compris lorsque les premiers écrans monochromes ont commencé à céder la place aux écrans en couleur.
« *Color should be supplementary, providing extra information for those users who have color.* » disent les auteurs des fameux « guidelines » pour encadrer l'utilisation de ce nouvel élément.
« *Color-coding should be allowed or provided to make the information clearer. Providing the user with a small initial selection of distinct colors – four to seven at most – with the capability of changing those or adding more, is the best solution to this.* »
C'est dans cet esprit que les auteurs du présent fascicule utilisent la couleur. C'est pour rendre compréhensibles des figures qui ne l'étaient pas naturellement pour un œil d'élève non encore exercé. La couleur permet d'effectuer des rapprochements et des distinctions qui ne seraient pas évidents pour un dessin au trait.

Il ne faut pas considérer que les activités de coloriage proposées sont insignifiantes, qu'elles seraient plus à leur place dans un jardin d'enfants. Si confusion il y a dans les pratiques pédagogiques à la mode c'est bien dans l'autre sens qu'il faut chercher. Par exemple lorsque l'on prétend faire

toucher du doigt des choses très savantes à des enfants près du berceau en se servant de leur capacité à griffonner ou à barbouiller. Ici, au contraire, on emploie un outil très simple, maîtrisé depuis longtemps par les élèves, pour mieux comprendre des concepts qui sont à leur portée. L'économie de moyens n'est pas un défaut. Au contraire, comme on l'a dit, cela relève de l'esthétique.
D'un autre côté, le présent fascicule ne prétend pas apporter une réponse définitive sur la meilleure façon de s'appuyer sur des éléments esthétiques, comme la couleur, dans l'enseignement. C'est une recherche, dans la droite ligne de la mission des IREM. Certains choix pourront surprendre. D'autres pourront être contestés. C'est un débat qui s'ouvre.
Pour revenir au début et à la sentence de G.H. Hardy, il est assez curieux de noter que W. I. Arnold l'a reprise il y a quelques années dans sa critique véhémente de l'idéologie formalisante qui domine notre enseignement national, disant à propos des mathématiciens en place depuis le milieu du siècle dernier ceci, dans la traduction en anglais de son collègue A. V. Gournov : « *They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students, then to schoolchildren (forgetting Hardy's warning…)*.
S'il faut tempérer ce jugement à l'emporte-pièce, il ne peut pas être nuisible de mettre un peu d'esthétique dans l'enseignement des mathématiques chez nous, et de renouer à cette occasion avec la nature. C'est justement ce que nous proposent les auteurs.

J.-P. Ferrier

DES MATHÉMATIQUES DE TOUTES LES COULEURS ?

Dans toutes les civilisations et à tous les paliers de son histoire, l'homme porte à la couleur un intérêt certain, comme il ressort des découvertes préhistoriques, archéologiques et ethnologiques (Dominique Zahan dans "Histoire de mœurs" Folio histoire 1990).

Un mathématicien crée le beau, au même titre qu'un peintre ou un poète ; un ensemble d'idées, tout comme un ensemble de couleurs ou de mots, doit posséder une harmonie intérieure. La beauté est la pierre de touche de la démarche scientifique ; il n'y a pas de place pour la laideur. (H.H. Hardy cité dans Diabolo math BELIN 1983)

Et nous, en classe ?

La majorité de nos élèves écrit en bleu, nous corrigeons le plus souvent en rouge. Nous utilisons des couleurs pour faire repérer ce qui est donné et ce qui est demandé dans les énoncés mathématiques, pour faire noter ou encadrer des résultats de cours importants. Ces jeux de couleurs rendent les écrits plus attrayants et nous les utilisons comme une aide à la compréhension des textes. Dans les copies, nous trouvons du bleu turquoise, du jaune orange, du jaune fluo, du rose… Nos élèves pensent que leur travail sera ainsi valorisé.

Nos élèves aiment des documents coloriés, mais nous mêmes sommes également intéressés par l'utilisation de couleurs dans les travaux demandés en classe.

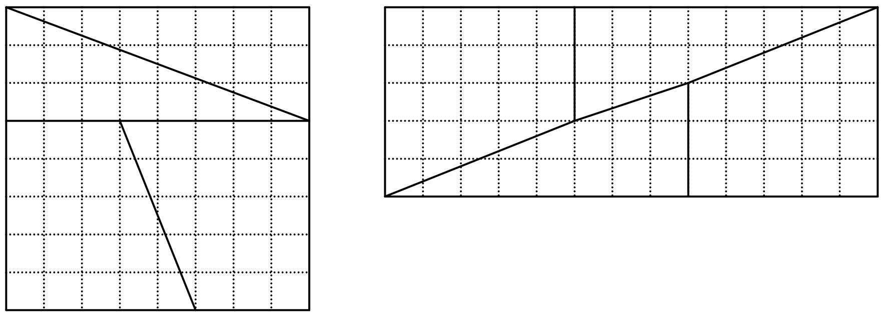
À l'IREM de Lorraine, notre groupe de recherche avait travaillé sur l'utilisation de puzzles semblables au « Tangram » (Brochure « Autour du puzzle de Sarrelouis »). Nous avions constaté dans nos classes que le temps pris par le coloriage des dessins réalisés impose à l'élève un temps d'observation de son travail pour y déceler d'éventuelles erreurs et augmente le temps de compréhension et d'appropriations des figures géométriques. Nous avons également remarqué que l'élève constate naturellement qu'un dessin comportant une erreur de tracé n'a pas la même qualité esthétique qu'un dessin exact.

Plus tard, nous avons imaginé que des représentations par des polygones de nombres décimaux ou de nombres écrits en écriture fractionnaire (Brochure « Le nombre décimal en sixième ») pouvaient être une aide à la compréhension de ces écritures. Nous avons constaté que le coloriage de ces représentations permettait de donner du sens aux notions de parties entières et de parties décimales ou fractionnaires. Nous avons ensuite pensé que ce que nous avions remarqué pouvait être utilisé pour des opérations faisant intervenir des nombres écrits en écriture fractionnaire et favoriser les liaisons entre écriture fractionnaire et proportion. Nous avons remarqué que les considérations esthétiques mises en avant par les élèves étaient une aide à la compréhension des notions abordées.

En reprenant en particulier une étude faite dans les années 70 par un groupe de l'IREM de Lorraine au lycée de Thionville, nous avons tenté de travailler sur la notion de « beau » rectangle (en relation avec l'émergence de l'importance du « nombre d'or »). Il nous est apparu que les considérations esthétiques de nos élèves actuels n'étaient pas nécessairement voisines de celles annoncées comme celles correspondant aux « canons » de la beauté classique. Nous avons ensuite exploré comment les considérations esthétiques pouvaient être mises en avant lors de tracés de diverses courbes comme des ellipses, des ovales ou des anses de panier. Une courbe était considérée comme « belle » lorsqu'elle était tracée sans erreur et avec beaucoup de précision. Cependant, cet aspect de notre travail n'évoquant pas l'intérêt de la couleur dans les travaux des élèves ne sera pas présenté dans cette brochure, mais pourra être évoqué lors d'un futur écrit.

Nous intégrons les activités présentées dans cette brochure et leur description dans une recherche plus large de notre groupe à propos de « mathématiques visuelles ». Ce qui est « vu » est déjà utilisé dans nos classes lors de lectures graphiques, lors de travaux avec des coordonnées cartésiennes, lors de coupes de solides et d'analyse de représentations en perspective, lors d'utilisations d'éléments de symétrie de diverses figures de géométrie ou lors de codages de ces mêmes figures.

Le célèbre paradoxe de Lewis Caroll amenant à visualiser l'égalité « 64=65 »



nous incite à quelque prudence lors de l'utilisation de cet aspect visuel en classe: nous n'accepterons pas de justification « ABCD est un rectangle car je le vois sur le dessin… »…

Nous voudrions, par nos résultats de recherche, montrer quelques exemples d'utilisation de ce qui est vu favorisant la compréhension de contenus mathématiques.

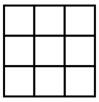
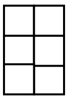
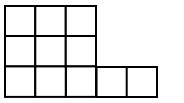
Nous sommes intimement persuadés des interpénétrations possibles entre « sciences » et « arts » ou plus humblement entre « sciences » et « considérations esthétiques ». Comme nous pouvons le lire dans le « Rapport au ministre de l' Education nationale » intitulé « l'enseignement des sciences mathématiques », écrit en 2002 par la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, sous la direction de Monsieur Jean-Pierre Kahane, « Une formule qui vient à l'esprit est qu'il faut enseigner les mathématiques parce qu'elles sont belles et utiles ».
Un peu utopistes, nous faisons le pari que ces rencontres avec des considérations esthétiques dans notre enseignement pourront aider à prendre conscience de beautés possibles dans la matière que nous enseignons. Le sens esthétique facilitant la compréhension de certains contenus mathématiques continuera à être utilisé dans nos futurs travaux concernant des pavages et des tracés de courbes en géométrie permettant en particulier une approche de la notion de fonction.

COLORIAGES DE REPRÉSENTATIONS DE NOMBRES

L'enseignement des décimaux commencé en cycle III de l'école élémentaire et a besoin d'être complété à l'entrée du collège. Des confusions subsistent entre dixièmes et dizaines, les chiffres composant l'écriture décimale ne sont souvent compris que par leur position par rapport à la virgule et non par ce qu'ils représentent.
Le placement des nombres décimaux sur une droite graduée est une des compétences exigibles de la classe de sixième. Lors de la résolution de certains « problèmes concrets », l'élève pourra être amené à utiliser des « croquis » utilisant les nombres représentés par des segments de droite ou des bandes horizontales.

À la manière des représentations figurées des Grecs (« Tout est nombre » indiquait la devise des Pythagoriciens), nous proposons une visualisation de nombres par des polygones représentés dans notre travail par des assemblages de carrés. Seules des représentations de nombres entiers (nombres triangulaires, carrés, polygonaux…) étaient alors envisagées, telles celles évoquées dans la brochure « Pythagore, plus qu'un théorème… » (Athénée Royal de Mons 1998) diffusée par la régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P.
Nous proposons ce type de représentation pour diverses écritures de nombres entiers tels que

3^2, 3×2 et $3 \times 3 + 1 \times 2$

Nous désirons également l'utilisation de ce type de représentation pour des nombres en écriture fractionnaire ou décimale.
Les deux activités « nombres et polygones » reprennent des propositions de la brochure « Des décimaux en sixième » (IREM de Lorraine 1999).
Le rectangle 4x3 visualise des demis, des tiers (les lignes du rectangle), des quarts (les colonnes du rectangle), des douzièmes (les carreaux du rectangle). Les sixièmes pourront être considérés comme des moitiés de tiers ou des tiers de demis.
Le rectangle 5x2 visualise les dixièmes, mais aussi « un demi est égal à cinq dixièmes » et « un cinquième est égal à deux dixièmes ».
Le rectangle 10x10 visualise les dixièmes et les centièmes.

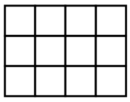
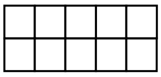
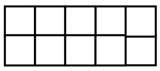
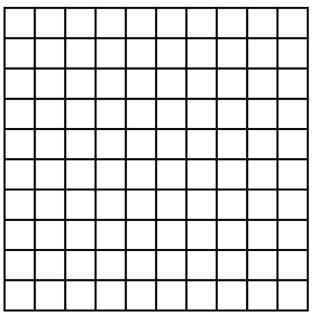
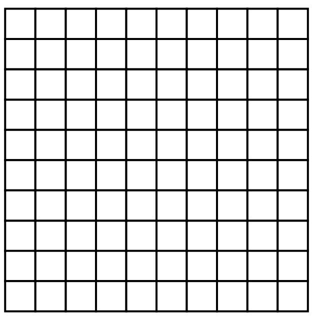
Des élèves ont remarqué que pour visualiser le nombre « 2,04 », il suffisait de trouver de la place pour la représentation de « 2 » et que celle-ci était aisément trouvée pour « 04 ». En situation est ici vécu l'intérêt d'une valeur approchée d'un nombre, conçue non comme une limitation de l'écriture de la partie décimale mais comme un ordre de grandeur.

Le coloriage des parties entières, fractionnaires ou décimales renforce la vision et la compréhension de ces grandeurs différentes.

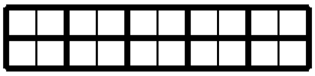
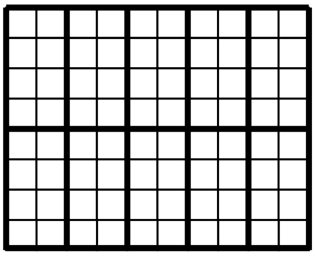
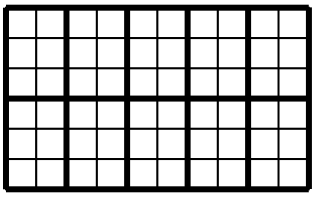
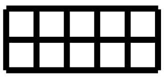
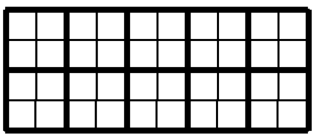
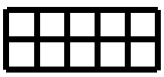
Il nous est apparu important de travailler également ce type de représentations pour des nombres entiers et revoir le fait, par exemple, qu'une dizaine est le dixième d'une centaine.

Par la suite, nous réutiliserons des nombres décimaux pour visualiser entre autres des dixièmes de dixièmes, des dixièmes de centièmes…

NOMBRES ET POLYGONES (1)

1 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 1. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 2 ; $1+\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $2+\frac{1}{3}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{11}{4}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{25}{12}$; $\frac{7}{6}$ Colorie en rouge la partie entière et en vert la partie fractionnaire.
1 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 1. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 3 ; $1+\frac{4}{10}$; 8 ; $10+\frac{5}{10}$; $\frac{8}{10}$; $12+\frac{1}{10}$ Colorie en rouge la partie entière et en vert la partie fractionnaire.
1 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 1. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 5 ; 1,3 ; 6 ; 9,7 ; 11,3 ; 0,5 ; 2 Colorie en rouge la partie entière et en vert la partie décimale.
1 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 1. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 5 ; $1+\frac{3}{8}$; $\frac{8}{10}$; $\frac{27}{100}$; $2+\frac{6}{100}$; $\frac{3}{5}+\frac{5}{100}$ Colorie en rouge la partie entière et en vert la partie fractionnaire.
1 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 1. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 1,2 ; 0,5 ; 0,38 ; 2,04 ; 1,35 Colorie en rouge la partie entière et en vert la partie décimale.

NOMBRES ET POLYGONES (2)

10 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 10. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 8 ; 17 ; 30 ; 43 ; 123. Colorie en rouge les dizaines et en vert les unités restantes.
100 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 100. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 40 ; 120 ; 200 ; 320 ; 15. Colorie en rouge les centaines et en vert les dizaines restantes.
1000 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 1000. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 300 ; 1400 ; 2000 ; 3100 ; 250. Colorie en rouge les milliers et en vert les centaines restantes.
0,1 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 0,1. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 0,3 ; 0,21 ; 1 ; 1,9 ; 1,24 ; 0,09. Colorie en rouge les dixièmes et en vert les centièmes restants.
0,01 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 0,01. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 0,02 ; 0,035 ; 0,1 ; 0,007 ; 0,019. Colorie en rouge les centièmes et en vert les millièmes restants.
0,001 	J'ai dessiné un rectangle représentant le nombre 0,001. Sur ton cahier, dessine des polygones représentant les nombres : 0,004 ; 0,011 ; 0,02 ; 0,0084 ; 0,0025. Colorie en rouge les dixièmes et en vert les centièmes restants.

ÉCRITURES FRACTIONNAIRES ET PROPORTIONS

Dans le programme de 6^e, les compétences exigibles précisent : « Appliquer un taux de pourcentage ». Pour calculer 40% de 750, les élèves sont alors conduits à calculer $\frac{40}{100} \times 750$. Aucun manuel n'explique pour quelle raison le pourcentage de l'énoncé s'est transformé en écriture fractionnaire lors du calcul. C'est donc certainement à l'enseignant de le faire car il est peu probable que tous les élèves réussissent à se construire une justification satisfaisante. Certains, dociles, feront confiance au maître. D'autres resteront étonnés par ce tour de passe-passe, trouveront bien difficiles ces fameux pourcentages et complèteront la foule de ceux qui osent avouer n'y avoir jamais rien compris et seront des proies faciles pour les marchands de crédit à la consommation…

Les programmes de sixième nous indiquent que « deux tiers » doit être considéré comme « deux fois un tiers », « le tiers de deux » ou encore « le nombre dont le produit par trois est égal à deux ». Par ailleurs, il est dit « Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme opérateur ». Reconnaissons humblement qu'un élève de 11 ans a quelque difficulté à se retrouver dans ces différentes représentations. De plus, lors de l'application d'un taux de pourcentage, nous envisageons que ce quotient a aussi à être compris comme représentant possible d'une proportion…

Une première série de rectangles est proposée dans cette brochure. Pour colorier 2 carreaux sur 3, l'élève devra d'abord délimiter des regroupements de 3 carreaux et colorier 2 carreaux dans chacun de ces regroupements.
Pour optimiser l'intérêt de cette activité, il est important d'**exiger** le tracé préalable des regroupements de carrés intervenant dans la proportion. Si cela n'est pas imposé aux élèves, certains d'entre eux ont l'impression de faire deux fois la même chose. Cette activité n'a pas pour seul but de créer des liens entre fractions et proportions mais surtout d'apporter un début de réponse au légitime **« pourquoi ce lien ?»,** question à laquelle il n'est que trop rarement répondu en classe de sixième.

Notre expérience nous montre que les élèves prennent plaisir à colorier de beaux motifs (en particulier en faisant apparaître des régularités). Pour colorier 2/3, l'élève devra d'abord partager le rectangle en trois parts égales et en colorier deux parts. Les coloriages faits présentent moins d'intérêt artistique, mais ils valorisent les proportions coloriées auparavant… Le comptage des carrés coloriés fait émerger le fait que chaque proportion peut être représentée par une écriture fractionnaire et qu'inversement, à chaque proportion pourra correspondre une écriture fractionnaire. Ce passage entre proportion et écriture fractionnaire sera d'une grande utilité lors de l'étude des pourcentages ou des fréquences.

Les élèves conçoivent aisément que colorier 2 carreaux sur 3 et colorier 8 carreaux sur 12 représentent la même proportion. Les proportions sont égales donc les écritures fractionnaires sont égales. La seconde activité utilise des carrés de 100 carreaux pour faire comprendre les liens entre pourcentages et centièmes. Elle pourra en particulier faire comprendre pourquoi l'utilisation d'une proportion telle que « 43 pour 100 » entraîne l'utilisation de l'opérateur fractionnaire « $\times \frac{43}{100}$ ».

Il est ensuite possible de faire trouver et comprendre comment "passer" d'une écriture fractionnaire à une autre qui lui est égale : diviser (ou multiplier) numérateur et dénominateur par un même nombre. Habituellement, il est montré sur des exemples que le résultat ne change pas lorsqu'on multiplie ou divise le numérateur et le dénominateur par le même nombre. Il est proposé d'utiliser ce qui se passe avec les proportions : « prendre 2 objets sur 3 » représente la même proportion que prendre « 20 objets sur 30 ». J'ai 30 objets, donc 10 regroupements de 3 objets, dans chacun des 10 regroupements, je prends 2 objets. Au total, je prends donc bien 20 objets. Du sens est ainsi donné à la méthode généralement utilisée.

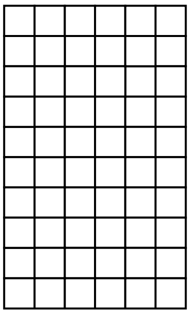
L'activité utilisant des polygones permet de réactiver les liens entre proportions et écritures fractionnaires. Dans certains cas, il reste des carreaux ne « rentrant » pas dans les regroupements par 4, 10 ou 3 carreaux. Des restes de divisions prennent ici toute leur importance. La poursuite du coloriage des proportions demandées pourra se faire en fractionnant les carreaux restés non coloriés.

Une difficulté demeure : pour comprendre ce que signifie 40 % j'imagine que pour chaque regroupement de 100 objets, j'en prends 40. Donc pour 5×100 objets, j'en prendrai 5 x 40 Mais pour 20 objets ? Les regroupements de 100 n'apparaissent plus… Les proportions et leurs écritures fractionnaires associées viennent à mon secours : je cherche le nombre "n" tel que $\frac{n}{20} = \frac{40}{100}$. La division par 5 des numérateur et dénominateur de $\frac{40}{100}$ conduira au résultat attendu et apportera dès la classe de 6$^{\text{ème}}$ une méthode de recherche d'un taux de pourcentage.
L'activité utilisant des carrés de 25 carreaux eux-mêmes partagés en 4 permet l'utilisation de proportions pour 25, pour 50 ou pour 100 ainsi que des écritures fractionnaires associées.

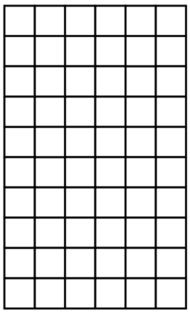
L'activité « partage des moyens dans l'académie de Nancy Metz » est une utilisation du coloriage de représentations de proportions. Les moyens accordés à la Meuse semblent noyés dans les moyens accordés aux autres départements… Il restera à voir si les proportions utilisées sont conformes à la réalité des populations scolaires dans les quatre départements lorrains.

Les deux rectangles comportant plusieurs centaines de carreaux sont destinés à être utilisés pour visualiser d'autres proportions (et en particulier des pourcentages) obtenues à la suite d'un sondage, par exemple. La dispersion de zones coloriées dans un rectangle permet de véritables œuvres d'art. Ce procédé a été utilisé par l'artiste François Morellet en 1960 en particulier dans une œuvre intitulée "Répartition aléatoire (40 % bleu, 40 % rouge, 10 % vert, 10 % orange) et a été repris dans les œuvres présentées en 1994 dans le calendrier mis en vente par l'Office Central de la Coopération à l'Ecole (OCCE).
Ce travail de coloriage pourra être une ouverture vers un travail interdisciplinaire avec le professeur d'Arts Plastiques.

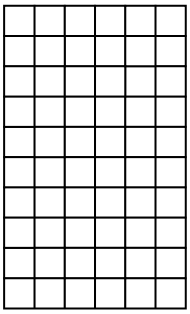
UNE PARTIE DES 60 CARREAUX COLORIÉS



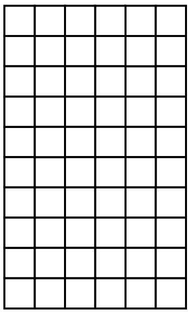
Colorie 1 carreau sur 2



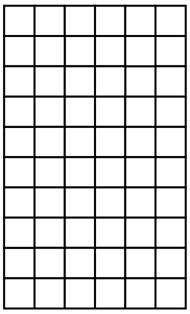
Colorie 2 carreaux sur 3



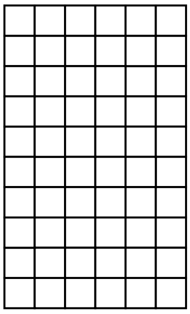
Colorie 1 carreau sur 5



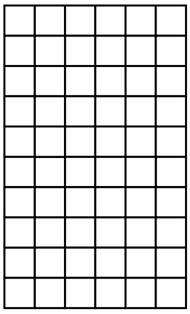
Colorie 3 carreaux sur 4



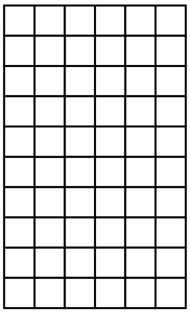
Colorie 7 carreaux sur 10



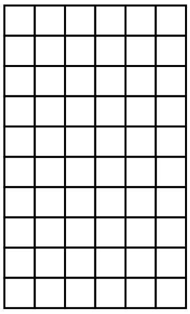
Colorie 3 carreaux sur 6



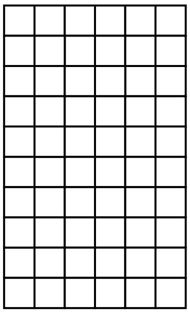
Colorie 8 carreaux sur 12



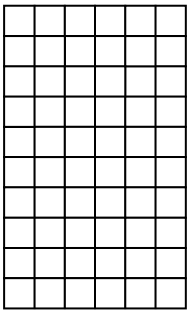
Colorie 2 carreaux sur 10



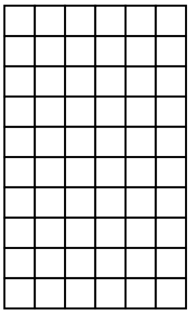
Colorie 15 carreaux sur 20



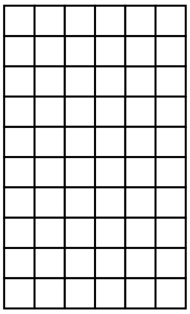
Colorie 42 carreaux sur 60



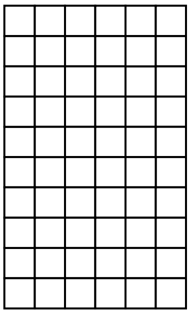
Colorie 1/2



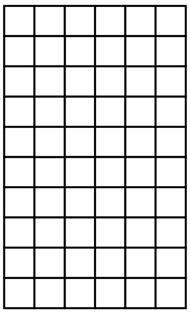
Colorie 2/3



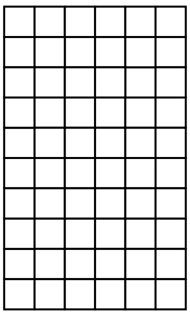
Colorie 1/5



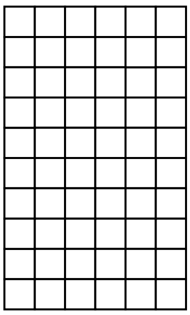
Colorie 3/4



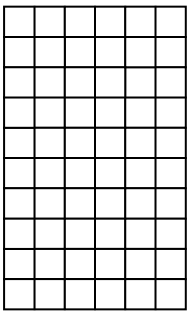
Colorie 3/10



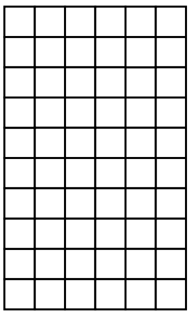
Colorie 3/6



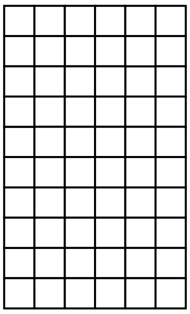
Colorie 8/12



Colorie 2/10



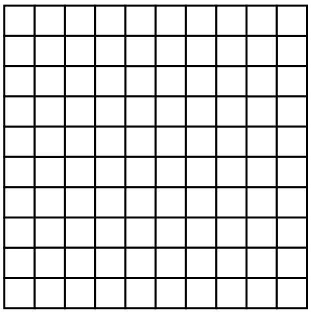
Colorie 15/20

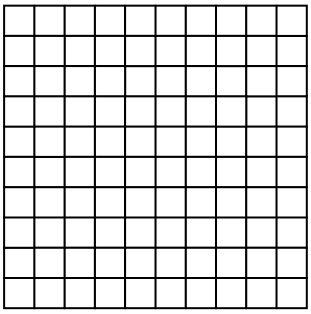


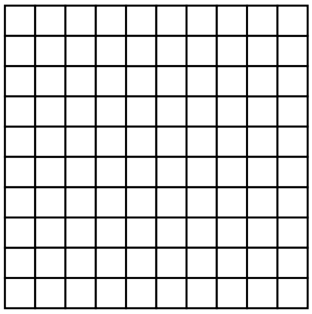
Colorie 42/60

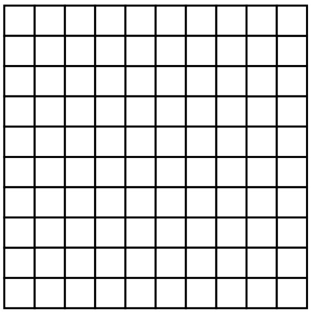
Sous chacune des grilles, indique en rouge le nombre de carreaux coloriés.

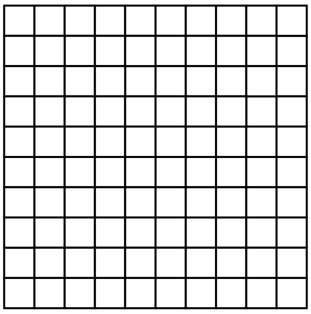
UNE PARTIE DES 100 CARRES COLORIÉS

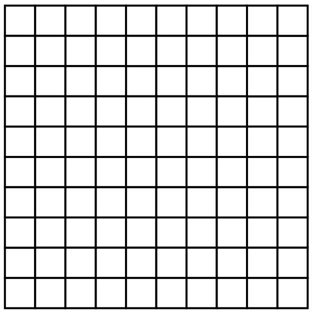

Colorie 1 carreau sur 2

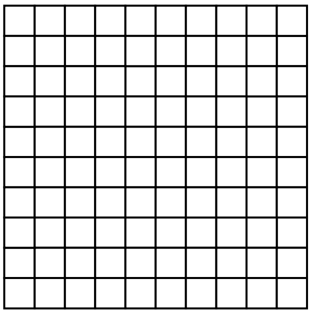

Colorie 2 carreaux sur 5

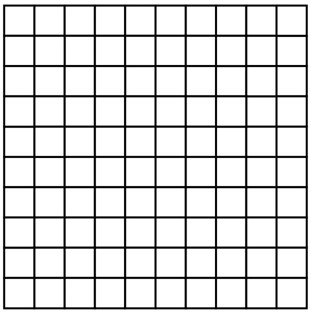

Colorie 7 carreaux sur 10

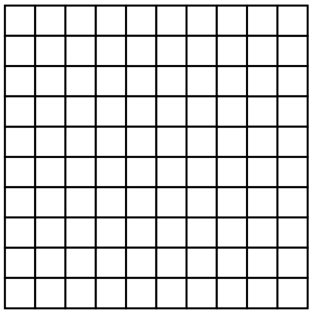

Colorie 3 carreaux sur 4

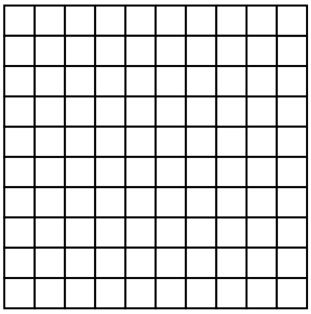

Colorie 3 carreaux sur 20

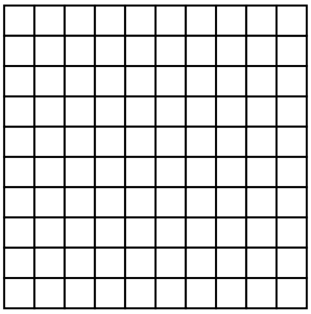

Colorie 23 carreaux sur 100

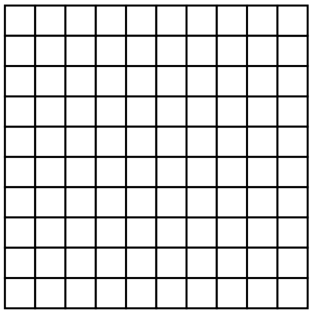

Colorie 1/2


Colorie 2/5


Colorie 7/10


Colorie 3 /4


Colorie 3 /20

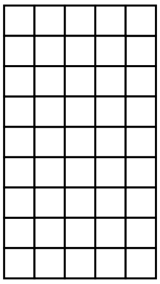

Colorie 23 /100

Sous chacune des grilles, indique en rouge le nombre de carreaux coloriés.

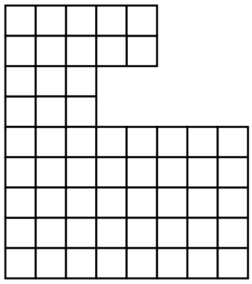
DES POLYGONES ET DES PROPORTIONS

1. Sous chaque polygone, indique en rouge le nombre de carreaux contenus à l'intérieur.

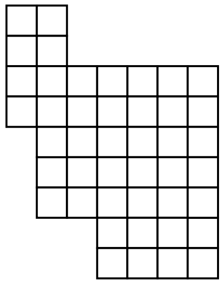
2. Dans chaque polygone, colorie les carreaux dans la proportion indiquée. Colorie d'une autre couleur les carreaux qui n'ont pu « entrer » dans la proportion indiquée.



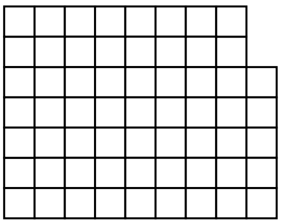
3 sur 4



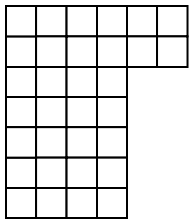
3 sur 4



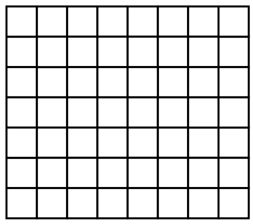
3 sur 4



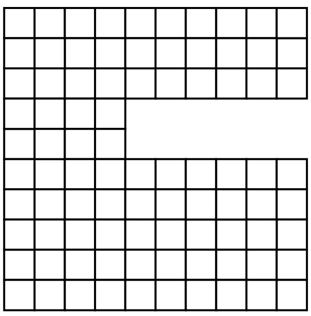
7 sur 10



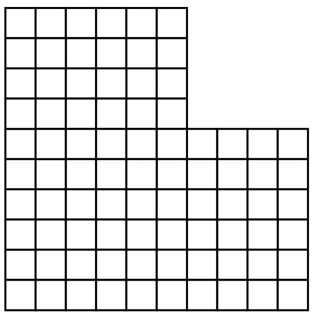
7 sur 10



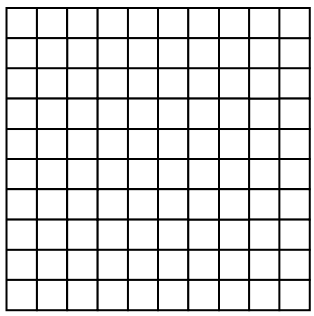
7 sur 10



2 sur 3



2 sur 3



2 sur 3

3. En utilisant le nombre de carreaux contenus à l'intérieur des polygones, comment puis-je vérifier que mes coloriages sont exacts ?

POUR LES PLUS RAPIDES

4. Sur ton cahier, dessine un rectangle pouvant être colorié exactement (sans carreaux inutilisés) dans la proportion 2 sur 3 et dans la proportion 3 sur 4.
Justifie tes choix de longueur et de largeur de rectangle.

PARTAGE DES MOYENS DANS L'ACADÉMIE DE NANCY-METZ

Il y a quelque temps, les moyens accordés à l'académie de NANCY-METZ étaient répartis dans les quatre départements lorrains de la manière suivante :
40% pour le département de la Moselle (57)
30% pour le département de la Meurthe et Moselle (54)
20% pour le département des Vosges (88)
10% pour le département de la Meuse (55)

1. Ci-dessous, nous avons voulu indiquer ces proportions dans un carré 10×10. Colorie en bleu les cases "57", en rouge les cases "54", en jaune les cases "88" et en vert les cases "55".
   Tu obtiendras une œuvre abstraite représentant les proportions des répartitions.

54	88	54	54	88	57	54	57	55	57
54	57	57	57	88	88	54	55	88	54
88	54	54	55	57	54	57	57	57	57
57	88	57	54	88	54	57	88	54	57
88	57	54	55	57	57	57	88	57	54
55	54	88	57	57	54	54	57	57	54
54	57	57	54	57	88	57	54	88	57
57	57	57	57	54	57	54	55	57	55
54	55	54	57	54	88	88	57	88	57
88	57	54	54	55	57	88	88	54	55

2. Colorie ces mêmes proportions dans un rectangle contenant 300 carreaux.
   Quelles nouvelles proportions pourras-tu écrire ?

3. Colorie ces mêmes proportions dans un rectangle contenant 20 carreaux.
   Quelles nouvelles proportions pourras-tu écrire ?

4. Colorie ces mêmes proportions dans un rectangle contenant 60 carreaux.
   Quelles nouvelles proportions pourras-tu écrire ?

COLORIAGES ET CALCULS FRACTIONNAIRES

Les écritures fractionnaires sont considérées comme des fractions de carrés ou de rectangles représentant eux-mêmes le nombre 1. Le dénominateur de l'écriture fractionnaire est considéré comme un sous-multiple de l'unité représentée par le carré ou le rectangle.

Il est ici expressément utilisé le fait que dans une écriture fractionnaire, le dénominateur dénomme l'unité et le numérateur indique le nombre d'unités. Nos voisins allemands avec « Zähler » et « Nenner » ont la même vision des choses.
Additionner des grandeurs exprimées en centimètres avec des grandeurs exprimées en mètres nécessite l'utilisation d'une unité commune. De même la somme ou la différence de deux écritures fractionnaires nécessite qu'elles soient écrites avec la même unité (le même dénominateur). Il est donc utile de savoir écrire les écritures fractionnaires avec des dénominateurs différents (des unités différentes). Ce changement d'écriture est ici abordé sous les deux aspects écritures fractionnaires et proportions. Nous proposons que les deux approches soient faites simultanément en classe (une moitié des élèves en explorant une, l'autre moitié explorant l'autre). À l'enseignant à organiser ensuite dans sa classe une synthèse des deux approches et à ne privilégier aucune d'entre elles pendant les temps de correction.

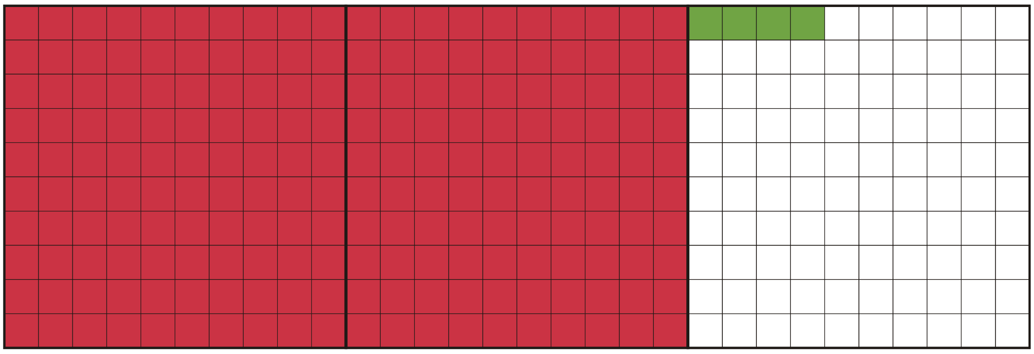
Additions et soustractions se font ensuite sans peine lorsque les écritures fractionnaires ont même dénominateur (même unité ou même sous multiple de l'unité dessinée). Lorsque les dénominateurs sont différents, il faut transformer les écritures pour qu'elles soient exprimées avec la même « unité ». Le travail proposé précédemment concernant « proportions égales » et « écritures fractionnaires égales » a tout à gagner à être réactivé pour redonner du sens à ces changements d'écriture.

Les multiplications se visualisent par des découpages horizontaux et verticaux des rectangles et des carrés unités. Ces visualisations doivent permettre de comprendre que la nouvelle « unité » est trouvée en faisant le produit des dénominateurs et que le nombre d'« unités » est obtenu par le produit des numérateurs. Cette difficile notion de « quotient de quotient » est ici visualisée à l'aide de « fractions de fractions d'unités ».

Nous voudrions que ces coloriages aident l'élève amené à calculer
« $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$ » à prendre conscience qu'il n'a à calculer que « 2 neuvièmes + 5 neuvièmes »,
mais aussi que « $\frac{4}{2}+2$ » peut se calculer en utilisant l'unité « 1 » ou l'unité « $\frac{1}{2}$ »,
que « $3\times\frac{5}{7}$ » peut se calculer comme « 3×5 septièmes »
et que « $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$ » peut se calculer comme « $\left(2\times\frac{1}{5}\right)\times\left(3\times\frac{1}{4}\right)$ ou comme $(2\times3)\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)$ » ; la nouvelle unité est le cinquième d'un quart et il a 2×3 de ces unités.

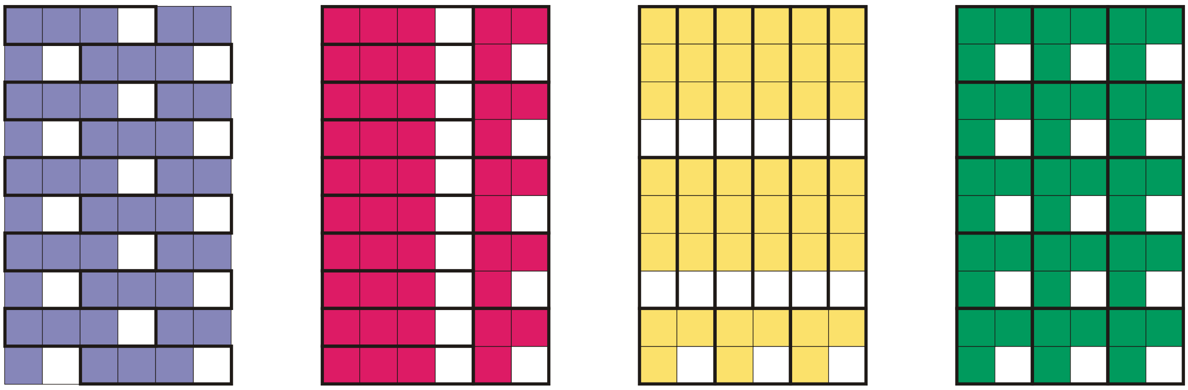
DES EXEMPLES DE COLORIAGE DANS NOS CLASSES

Le coloriage d'une représentation du nombre 2,04



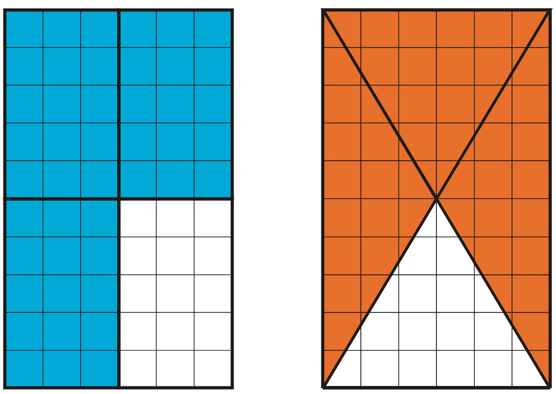
Le carré de 10 $\times$ 10 représente le nombre 1.
Le coloriage en rouge de la partie entière et en vert de la partie décimale renforce la vision et la compréhension de ces grandeurs différentes.

Différents coloriages de la proportion 3 sur 4 :



Pour colorier 3 carreaux sur 4, l'élève doit d'abord délimiter des regroupements de 4 carreaux et colorier 3 carreaux dans chacun de ces regroupements.

Différents coloriages de 3 /4 :

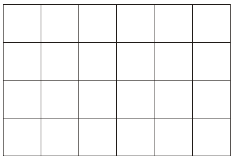


Le comptage (ou le calcul) des carreaux coloriés fait émerger le fait que chaque proportion peut être représentée par une écriture fractionnaire et qu'inversement, à chaque proportion correspond une écriture fractionnaire.
Ce passage entre proportion et écriture fractionnaire sera d'une grande utilité lors de l'étude des pourcentages ou des fréquences.

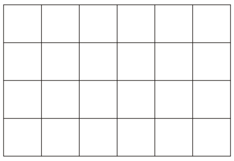
PROPORTIONS

1) Le nombre 1 est représenté par un rectangle de dimensions 6 côtés de carreau et 4 côtés de carreau

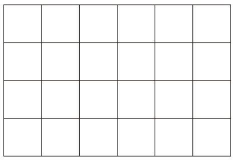
1 sur 2



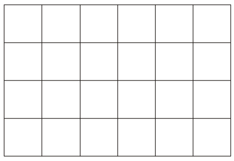
1 sur 3



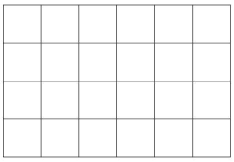
1 sur 4



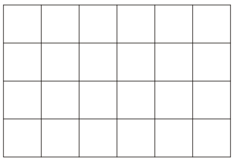
1 sur 6



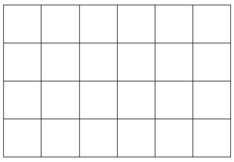
1 sur 8



1 sur 12



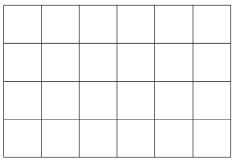
1 sur 24



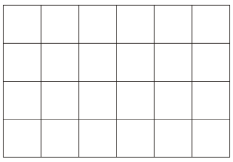
Dans chaque rectangle, colorie les carreaux dans la proportion indiquée

2) Le nombre 1 est représenté par un rectangle de dimensions 6 côtés de carreau et 4 côtés de carreau
Dans chaque rectangle, colorie les carreaux dans la proportion indiquée

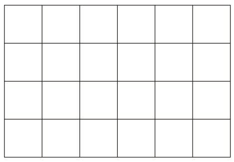
Un sur quatre



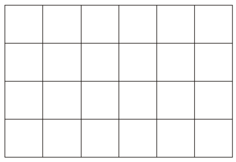
deux sur huit



trois sur douze

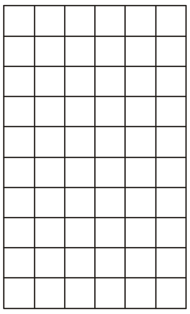


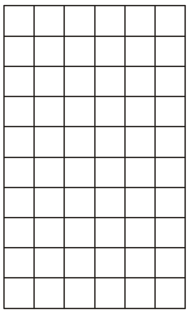
six sur vingt-quatre

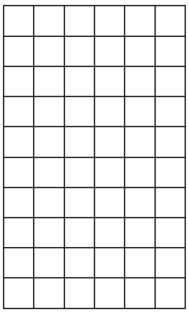


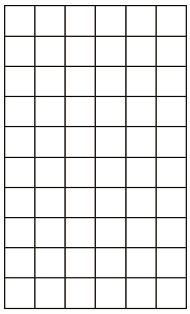
3) Le nombre 1 est représenté par un rectangle de dimensions 6 côtés de carreau et 10 côtés de carreau
Dans le premier rectangle, colorie les carreaux dans la proportion 2 sur 3 ;

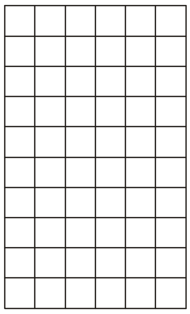
trouve des proportions équivalentes et colorie-les dans les autres rectangles.







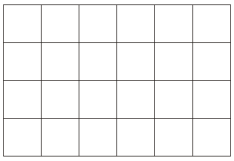




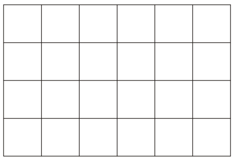
ÉCRITURES FRACTIONNAIRES
CHANGEMENT DE DÉNOMINATEUR – CHANGEMENT D'UNITÉ

4) Le nombre 1 est représenté par un rectangle de dimensions 6 côtés de carreau et 4 côtés de carreau

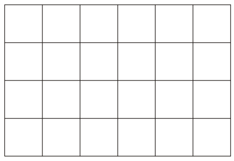
$\frac{1}{2}$



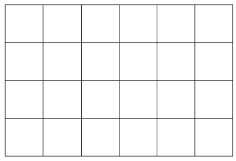
$\frac{1}{3}$



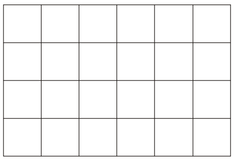
$\frac{1}{4}$



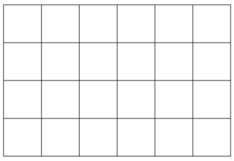
$\frac{1}{6}$



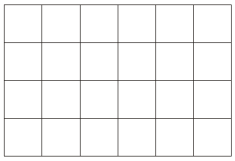
$\frac{1}{8}$



$\frac{1}{12}$



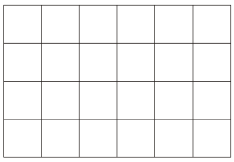
$\frac{1}{24}$



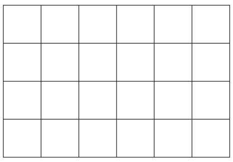
Colorie le nombre indiqué au-dessus de chaque rectangle

5) Le nombre 1 est représenté par un rectangle de dimensions 6 côtés de carreau et 4 côtés de carreau

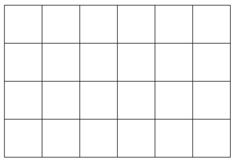
Un quart



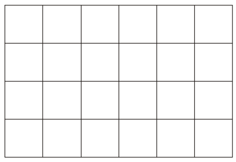
deux huitièmes



trois douzièmes



six vingt-quatrièmes



Colorie le nombre indiqué au-dessus de chaque rectangle

Complète : $\frac{1}{4} = \frac{....}{8} = \frac{....}{12} = \frac{....}{24}$

6) Complète :

$\frac{3}{4} = \frac{....}{40}$ $\qquad$ $\frac{30}{....} = \frac{5}{6}$

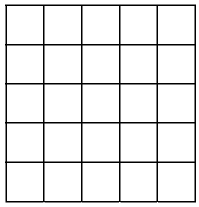
$\frac{....}{14} = \frac{7}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{10} = \frac{....}{100}$

$\frac{4}{3} = \frac{....}{9}$ $\qquad$ $\frac{....}{4} = \frac{12}{16}$

$\frac{....}{2} = \frac{40}{80}$ $\qquad$ $\frac{25}{100} = \frac{....}{4}$

ÉCRITURES FRACTIONNAIRES
ADDITION – SOUSTRACTION (1)

1) Le nombre 1 est représenté par un carré de côté 5 côtés de carreau.



Colorie en rouge $\frac{12}{25}$

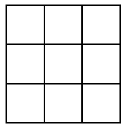
Colorie en bleu $\frac{7}{25}$

Quel nombre est représenté par l'ensemble des deux zones coloriées ?

Quel nombre est représenté par la zone non coloriée ?

Quelles opérations peux-tu écrire ?

2) Le nombre 1 est représenté par un carré de côté 3 côtés de carreau.



Colorie en rouge $\frac{2}{9}$

Colorie en bleu $\frac{4}{9}$

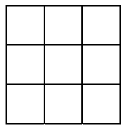
Complète l'égalité : $\frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

3) Le nombre 1 est représenté par un carré de côté 4 côtés de carreau.

Utilise une méthode similaire pour calculer $\frac{11}{16} + \frac{7}{16}$

4) Calcule $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$ $\qquad$ $\frac{7}{8} - \frac{2}{8}$ $\qquad$ $1 - (\frac{1}{9} + \frac{4}{9})$

5) Le nombre 1 est représenté par un carré de côté 3 côtés de carreau.



A l'aide de dessins et de coloriages, visualise les calculs :

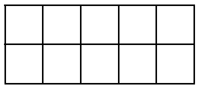
$\frac{5}{9} + \frac{7}{9}$ $\qquad$ $2 \times \frac{8}{9}$ $\qquad$ $\frac{20}{9} - 1$ $\qquad$ $\frac{17}{9} - \frac{5}{9}$

6) Quel quadrillage choisirais-tu pour effectuer $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

ÉCRITURES FRACTIONNAIRES
ADDITION-SOUSTRACTION (2)

1) Le nombre 1 est représenté par un rectangle de dimensions 5 côtés de carreau et 2 côtés de carreau.

Colorie en rouge $\frac{2}{5}$



Colorie en bleu $\frac{3}{10}$

Quel nombre est représenté par l'ensemble des deux zones coloriées ?

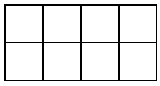
Quel nombre est représenté par la zone non coloriée ?

Quelles opérations peux-tu écrire ?

Complète l'égalité : $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{...}{...}+\frac{...}{...}=\frac{...}{10}$

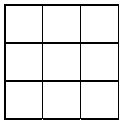
2) Le nombre 1 est représenté par un rectangle de dimensions 4 côtés de carreau et 2 côtés de carreau.

Utilise une méthode similaire pour calculer $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$



3) Le nombre 1 est représenté par un carré de côté 3 côtés de carreaux.

Utilise une méthode similaire pour calculer $\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$



Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire, il faut que les nombres aient le même dénominateur (même unité).

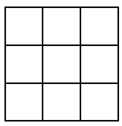
4) Calcule

$\frac{3}{9}+\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{2}{4}+\frac{8}{16}$ $\quad$ $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ $\quad$ $2-\frac{1}{3}$ $\quad$ $1-(\frac{1}{5}+\frac{7}{10})$

5) Le nombre 1 est représenté par un carré de côté 3 côtés de carreaux.
A l'aide de dessins et de coloriages, visualise les calculs :

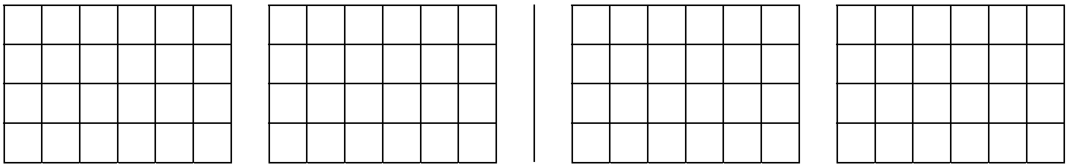
$\frac{5}{3}+\frac{1}{9}$ $\quad$ $\frac{20}{9}-\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{17}{9}-\frac{4}{3}$



ÉCRITURES FRACTIONNAIRES (MULTIPLICATION)

1) Le nombre 1 est représenté par un rectangle de dimensions 6 côtés de carreau et 4 côtés de carreau.

1 1 1 1



Colorie $\frac{1}{4}$ Colorie $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{4}\right)$ Colorie $\frac{5}{6}$ Colorie $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{6}$ $\left(\frac{1}{4} \times \frac{5}{6}\right)$

En utilisant les deuxième et quatrième dessins, complète les égalités :

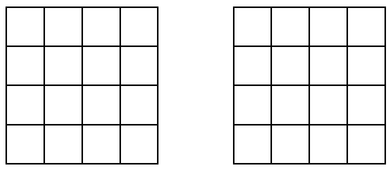
$\frac{5}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{....}{....}$ $\frac{1}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{....}{....}$

2) Le nombre 1 est représenté par un carré de côté 4 côtés de carreau.

Utilise une méthode similaire pour calculer $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{....}{....}$

1 1

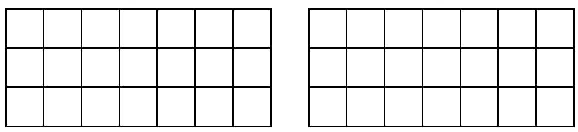


Colorie $\frac{3}{4}$ Colorie $\frac{1}{4}$ de $\frac{3}{4}$

3) Le nombre 1 est représenté par un rectangle de dimensions 7 côtés de carreau et 3 côtés de carreau.

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{....}{....}$

1 1



Colorie $\frac{5}{7}$ Colorie $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$

4) Effectue $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7}$; $\frac{4}{7} \times \frac{3}{7}$; $\frac{10}{3} \times \frac{2}{9}$; $\frac{3}{5} \times \frac{5}{2}$; $\frac{3}{7} \times \frac{2}{4}$; $4 \times \frac{5}{11}$

DE BEAUX DESSINS GÉOMÉTRIQUES

Les activités "cinq rectangles et cinq carrés" ne sont a priori qu'un tracé de rectangles et de carrés. Le coloriage des dessins les valorise : les variétés des choix de couleurs envisagées par les élèves donnent un ensemble de productions qui seront affichées avec plaisir par l'enseignant.

Un premier dessin est proposé, incitant les élèves à abandonner la vision de rectangles et de carrés aux cotés parallèles aux bords de la feuille.
Un second dessin fait réutiliser les directions des bords de la feuille et pourra être l'occasion de retrouver les relations possibles entre droites parallèles et droites perpendiculaires.

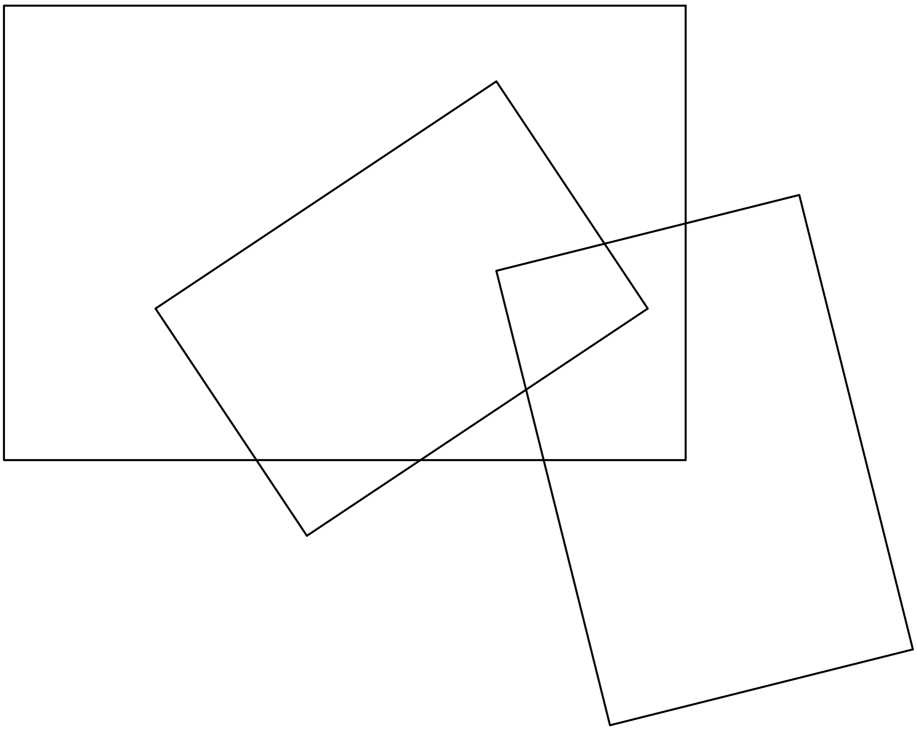
L'enseignant et l'élève pourront y retrouver des motifs présents dans l'art contemporain, comme par exemple dans le tableau "suprématisme" de Nicholai Mochailawitch (1920-1921). Par ailleurs, les tracés de rectangles ayant des côtés parallèles aux bords de la feuille pourront faire le lien avec "Polyphon gefasstes Weiss" de Paul Klee (1930), "Passager Magenta" de Sean Scully (1999) ou "Hommage au carré n°VI" de Josef Alberts (1967).

Ici aussi, ce travail de coloriage pourra être une ouverture vers un travail interdisciplinaire avec le professeur d'Arts Plastiques.

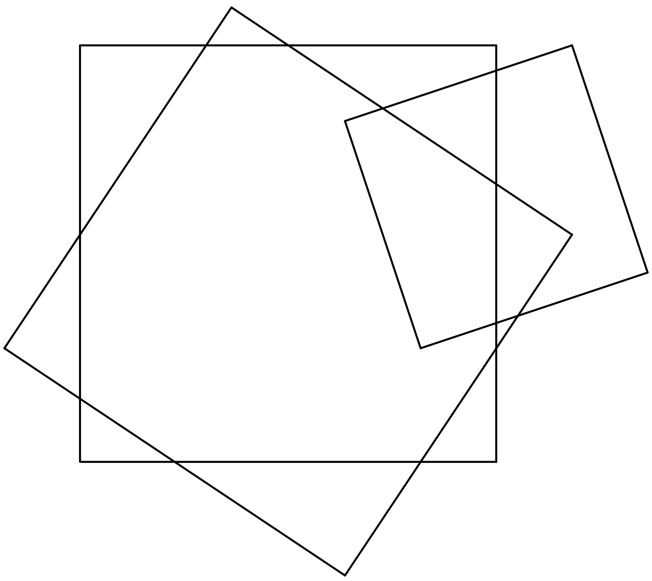
L'activité « croissance » était présentée dans les années 70 dans la brochure 36 de l'A.P.M.E.P. (le triangle à l'école élémentaire). La croissance d'un cristal est simulée par un procédé de coloriage. D'autres réseaux sont utilisables : triangulés, hexagonaux. Dans tous les cas, une erreur dans le coloriage entraîne une « brisure » dans les symétries du dessin.
Cette activité pourra être l'occasion d'impliquer l'élève dans un algorithme de tracé géométrique.

CINQ RECTANGLES ET CINQ CARRÉS

1- Trace un rectangle de 18 cm de long et 12 cm de large.
Dessine un deuxième rectangle dont les côtés ne sont parallèles à ceux du premier rectangle.
Continue ton dessin avec au moins un troisième, un quatrième et un cinquième rectangle.
Colorie ton dessin.

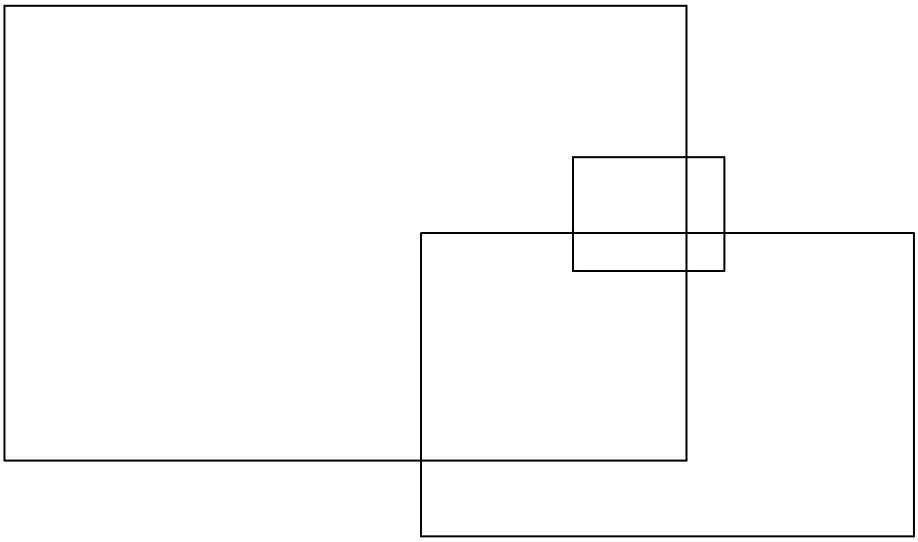


2- Trace un carré de 15 cm de côté.
Dessine un deuxième carré dont les côtés ne sont pas parallèles à ceux du premier carré.
Continue ton dessin avec au moins un troisième, un quatrième et un cinquième carré.
Colorie ton dessin.

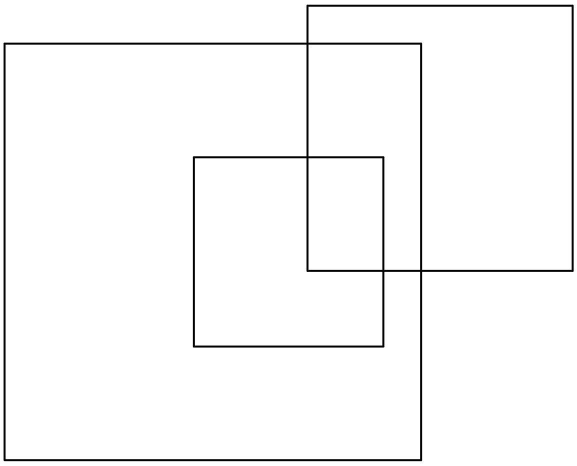


CINQ RECTANGLES ET CINQ CARRÉS

1- Trace un rectangle de 18 cm de long et 12 cm de large.
Dessine un deuxième rectangle dont les côtés sont parallèles à ceux du premier rectangle.
Continue ton dessin avec au moins un troisième, un quatrième et un cinquième rectangle.
Colorie ton dessin.

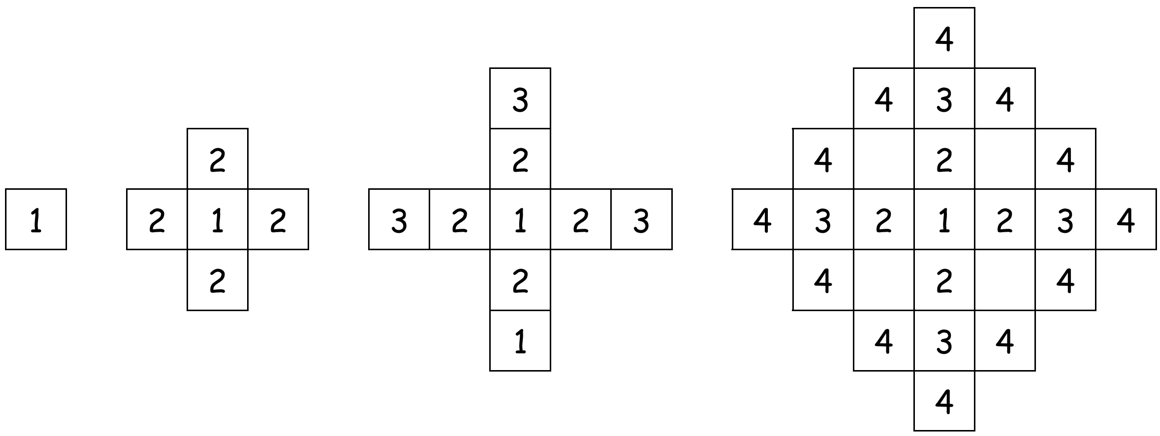


2- Trace un carré de 15 cm de côté.
Dessine un deuxième carré dont les côtés sont parallèles à ceux du premier carré.
Continue ton dessin avec au moins un troisième, un quatrième et un cinquième carré.
Colorie ton dessin.



CROISSANCE

Le principe de cette activité a été décrit dans la brochure "Le triangle à l'école élémentaire. Elem-Math VI (A.P.M.E.P. n°36)" . Le principe du coloriage est inspiré par la croissance d'un cristal.



1- En utilisant 4 couleurs, effectue ci-dessus les 4 premières étapes du coloriage proposé (les couleurs sont repérées par les nombres 1, 2, 3 et 4 indiqués dans les cases).

La case 1 est la cellule mère. De nouvelles cellules naissent le long des côtés de la cellule mère en occupant tous les carreaux possibles en respectant certaines conditions :

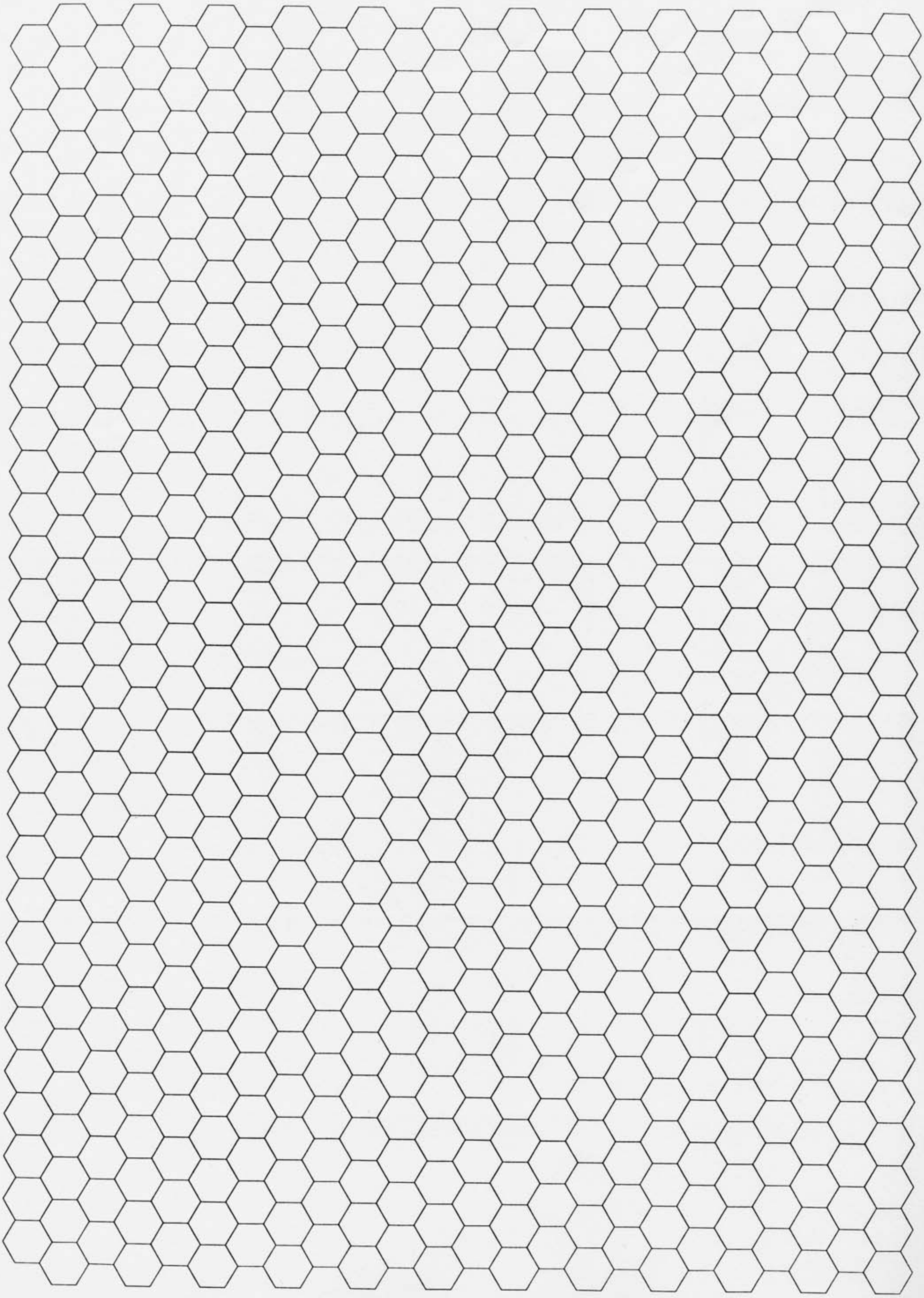
Tout nouveau-né n'a qu'une seule mère.

Deux nouveau-nés ne peuvent se toucher que par un sommet.

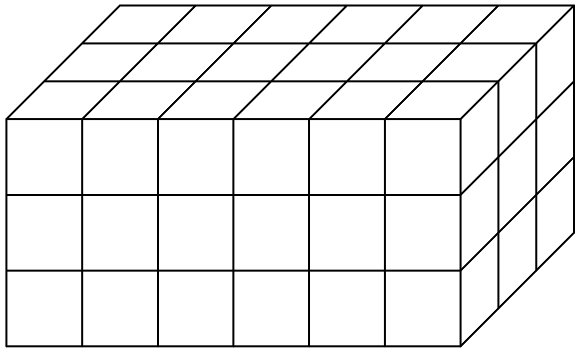
2- Sur une feuille quadrillée, reproduis les 4 premières étapes du dessin puis poursuis le coloriage tant que le permettent les dimensions de ta feuille.

D'autres propositions de coloriages :

- Utiliser des réseaux à maille triangulaire ou hexagonale.
- Faire "pousser" les cellules par les sommets et non par les côtés, ou imaginer une alternance "côtés sommets".
- Utiliser un autre nombre de couleurs pour le coloriage.
- Imaginer d'autres règles de succession de couleurs.



COLORIAGES ET SOLIDES VUS EN PERSPECTIVE



Dès la classe de sixième, il est demandé de trouver le nombre de cubes-unité dans un tel solide.
Pour nos élèves, la première difficulté est de comprendre que ce qui est représenté ci-dessus n'est pas un assemblage de cubes mais le dessin d'un tel assemblage. Magritte nous interpelle de la même façon dans l'œuvre peinte en 1928 et intitulée « la trahison des images ». Il y a dessiné une pipe sous laquelle il a indiqué « Ceci n'est pas une pipe ». Cette différenciation entre l'objet et sa représentation aidera l'élève à faire la différence entre le nombre de cubes visibles sur le dessin et le nombre de cubes formant le solide.

Les coloriages des cubes selon le nombre de faces visibles permettent de faire comprendre qu'un cube peut être visible sur le dessin par un carré, un parallélogramme, un carré et un parallélogramme ou un carré et deux parallélogrammes.

Les coloriages par couches de cubes permettent de visualiser et donner du sens à la formule $l \times L \times h$. Les "comptages" (en s'aidant éventuellement de coloriages) de cubes unités formant un parallélépipède permettent l'utilisation réfléchie de la formule évoquée précédemment, les « couches » pouvant correspondre à des découpages en tranches du solide, selon trois directions possibles.
Cette activité sera l'occasion d'expliciter les conventions utilisées dans ces types de représentation : toutes les « couches » de cubes sont identiques, il n'existe pas de « trous » à l'intérieur ou sur la face arrière du solide, il n'existe pas de cubes formant une excroissance et non visibles dans ce type de dessin.

Les coloriages de faces permettent de faire comprendre les notions de faces ayant même direction : les notions de plans parallèles ne sont pas vues au collège, mais leur rencontre précoce ne pourra que faciliter leur compréhension future dans les programmes de lycée.

Dans les activités « Empilements de cubes (1) et (3)», est rencontré le cube d'arête 10. Le nombre de cubes unités le formant fera comprendre pourquoi les unités de volumes vont de 1000 en 1000.
Dans les activités « Empilements de cubes (2) et (4)», le coloriage peut faciliter la décomposition d'un solide en parallélépipèdes associés à des chaînes opératoires « $a \times b \times c$ » rencontrées par exemple dans des catalogues précisant les dimensions de briques ou de valises. Ces chaînes opératoires utilisées dans la vie courante préparent à de futurs calculs de volumes.
Pour ces quatre activités, le coloriage demandé doit permettre une visualisation de la méthode utilisée par l'élève.

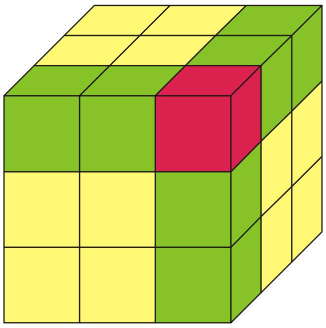
Le découpage de pièces de puzzles (« Tangram » et « puzzle de Sarrelouis »), le dessin de leurs pièces vues en perspective et le coloriage de leurs faces peuvent être abordés en classe de quatrième comme retour sur le travail fait l'année précédente à propos des prismes. La perception des directions des faces n'est pas facile chez certains.

Le coloriage des faces visibles de prismes (base et faces latérales) est une étape importante en cinquième pendant la perception des dessins en perspective. Que colorier pour les deux dessins de cubes ? Ils ne sont pas toujours perçus comme des prismes particuliers.
Au collège, les seuls prismes rencontrés sont les prismes droits. Le coloriage de leurs bases et des arêtes qui leur sont perpendiculaires permet une rencontre avec des propriétés revues plus tard au lycée telle que « deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles ».

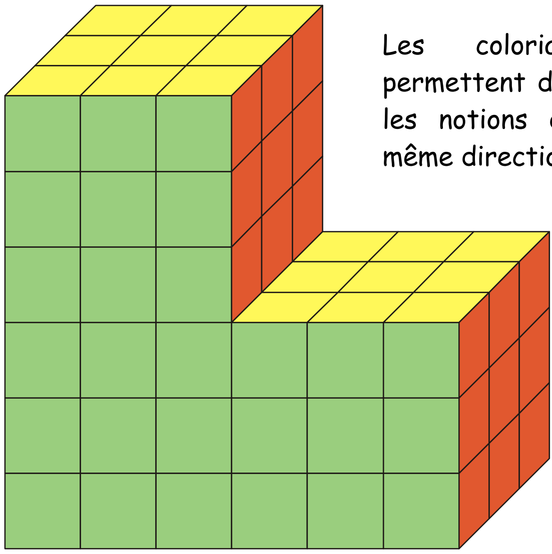
De nombreux casse-tête sont constitués de pièces formées d'assemblages de cubes. L'un deux, le « Cube Soma » a été crée en 1936 par Piet Hein en considérant les assemblages de trois et quatre cubes qui ne sont pas des parallélépipèdes. Des utilisations en cours de mathématiques ont été évoquées dans la brochure « Autour du cube Soma » éditée en 1995 par l'IREM de Lorraine. La manipulation de jeux formés de pièces de sept couleurs différentes y était évoquée comme facilitant la compréhension des dessins des solides réalisés. En voici six trouvés en classe par des élèves de sixième : les trois premiers sont considérés comme des parallélépipèdes accolés, les trois suivants comme des parallélépipèdes « écornés ». Le coloriage des dessins des solides proposés facilite leur réalisation par l'utilisateur du jeu, mais n'est pas une aide à la recherche des chaînes de calculs pouvant représenter les solides.

Un autre casse-tête, le « Pentac », est formé des assemblages « plats » de cinq cubes identiques. Le coloriage des parallélépipèdes formant les pièces du jeu sera ici une aide à la représentation de ces solides par des chaînes additives de multiplications du type « ...x...x... + ...x...x... + ...x...x... ».
Deux activités sont proposées au choix de l'enseignant : celle pour laquelle les cubes accolés sont visibles a été écrite en pensant aux élèves en grande difficulté, en particulier ceux des classes de SEGPA.
D'autres utilisations en cours de mathématiques de ce casse-tête ont été évoquées dans la brochure « D'autres objets mathématiques » éditée en 2001 par l'A.P.M.E.P. Lorraine.

DES EXEMPLES DE COLORIAGE DANS NOS CLASSES
COLORIAGES ET SOLIDES VUS EN PERSPECTIVE

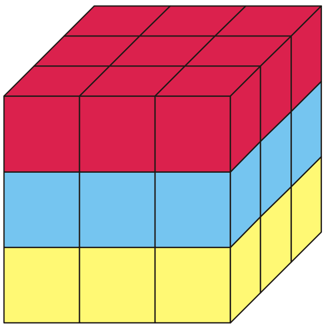


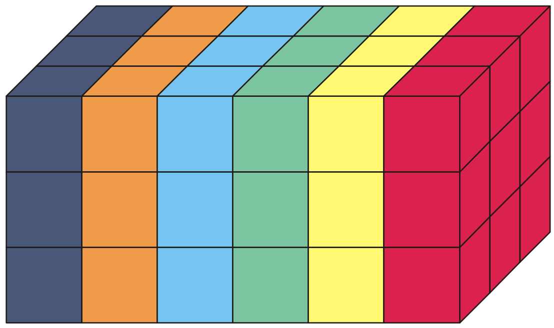
Les coloriages de cubes selon le nombre de faces visibles

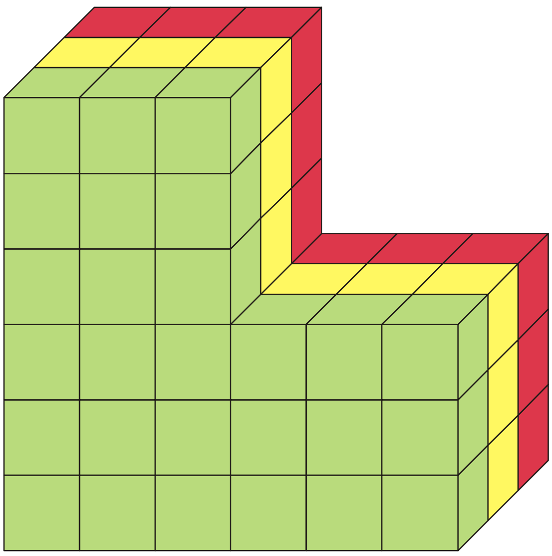


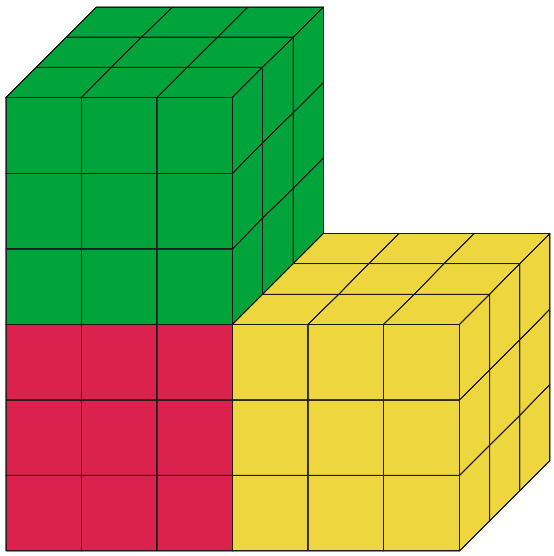
Les coloriages de faces permettent de faire comprendre les notions de faces ayant la même direction

Les coloriages par couches de cubes permettent de visualiser et donner du sens au calcul du volume.



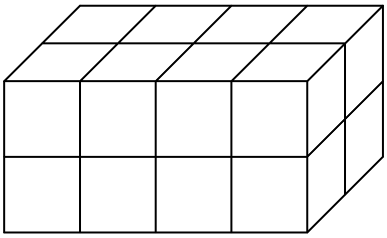






DES CUBES COLORIĒS (1)

Pour chacun des dessins de solides ci-dessous, colorie en rouge les cubes dont on voit 3 faces, en vert les cubes dont on voit 2 faces et en jaune les cubes dont on voit une face.

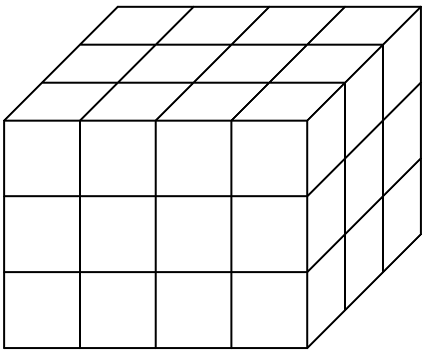


Nombre de cubes dont on voit 3 faces …

Nombre de cubes dont on voit 2 faces …

Nombre de cubes dont on voit 1 face …

Nombre total de cubes visibles …

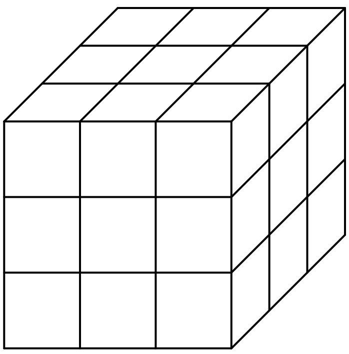


Nombre de cubes dont on voit 3 faces …

Nombre de cubes dont on voit 2 faces …

Nombre de cubes dont on voit 1 face …

Nombre total de cubes visibles …

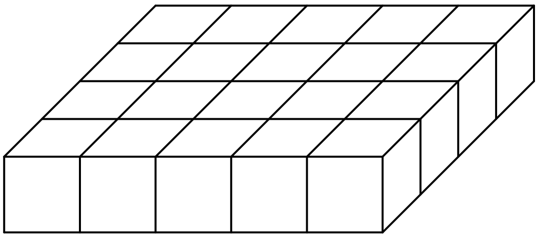


Nombre de cubes dont on voit 3 faces …

Nombre de cubes dont on voit 2 faces …

Nombre de cubes dont on voit 1 face …

Nombre total de cubes visibles …



Nombre de cubes dont on voit 3 faces …

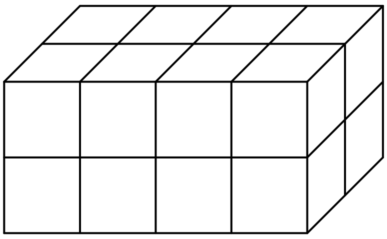
Nombre de cubes dont on voit 2 faces …

Nombre de cubes dont on voit 1 face …

Nombre total de cubes visibles …

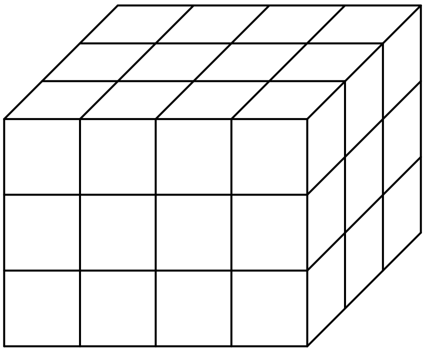
DES CUBES COLORIĒS (2)

Pour chacun des dessins de solides ci-dessous, colorie en rouge les cubes de la face supérieure, puis en utilisant des autres couleurs, colorie les autres couches de cubes.



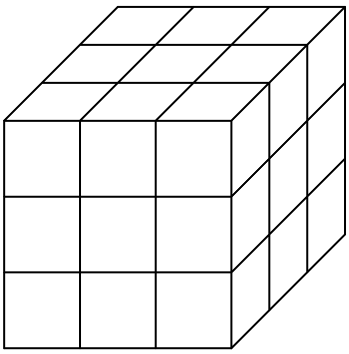
Nombre de cubes dans la couche supérieure…

Nombre total de cubes …



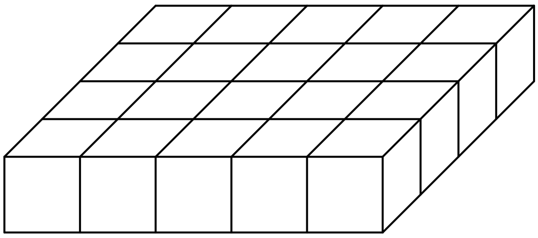
Nombre de cubes dans la couche supérieure …

Nombre total de cubes …



Nombre de cubes dans la couche supérieure …

Nombre total de cubes …

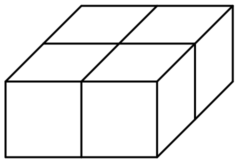


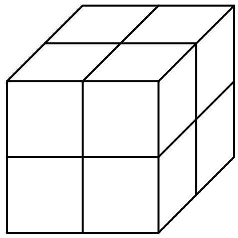
Nombre de cubes dans la couche supérieure …

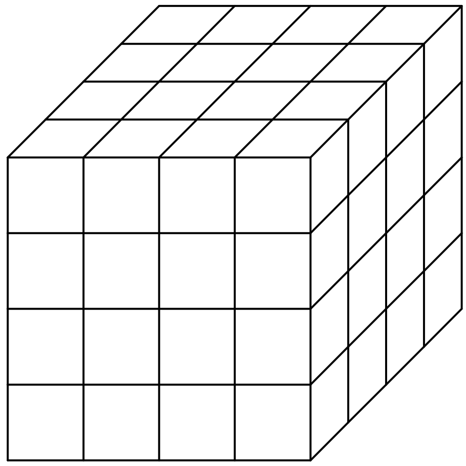
Nombre total de cubes …

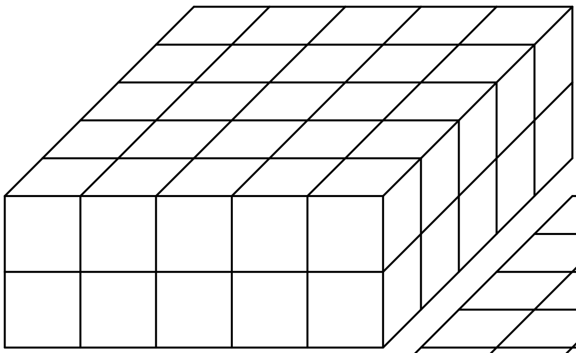
EMPILEMENTS DE CUBES (1)

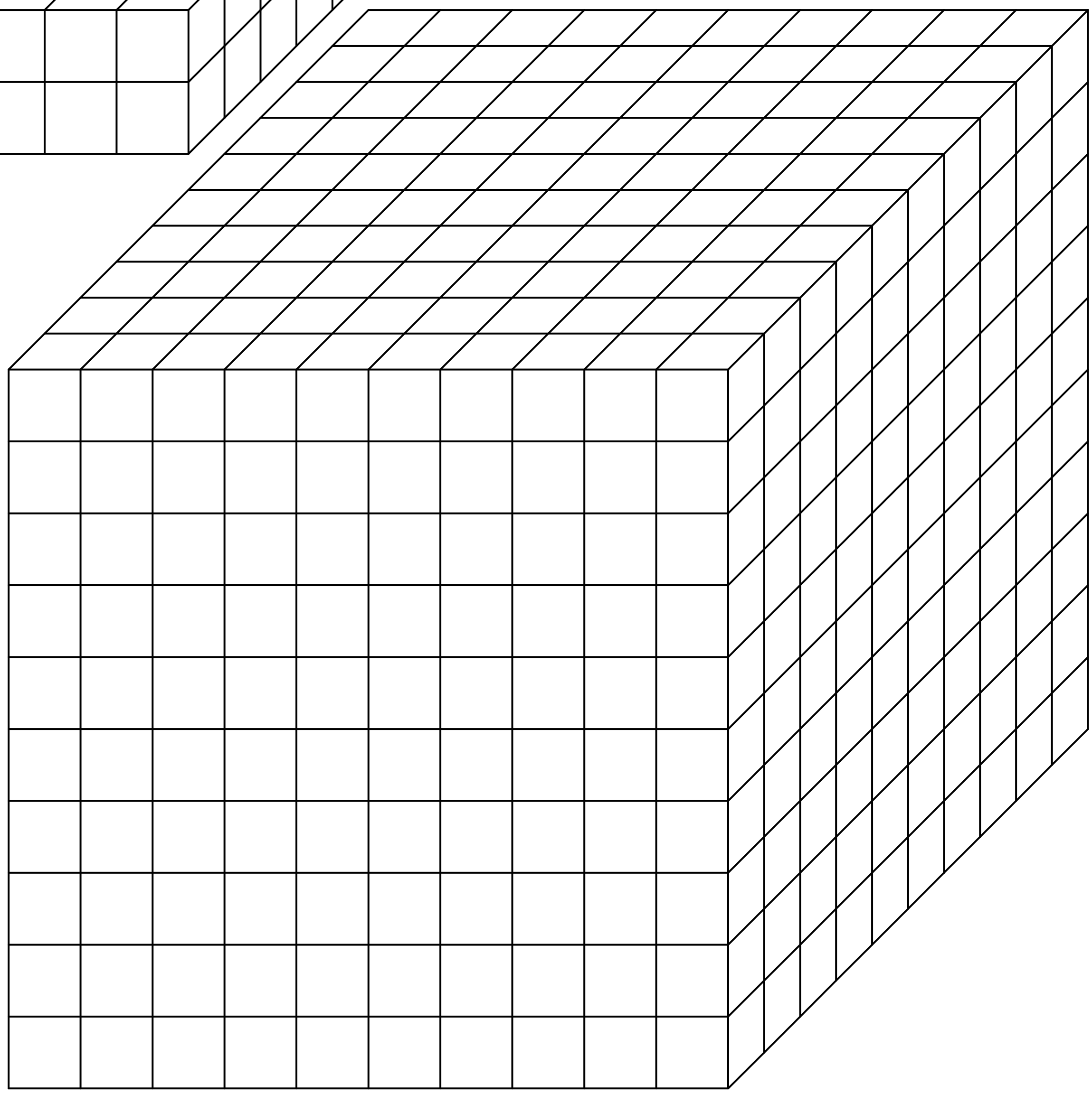
Indique sous chaque dessin le nombre de cubes formant l'empilement. Utilise des coloriages pour indiquer la méthode de calcul utilisée.





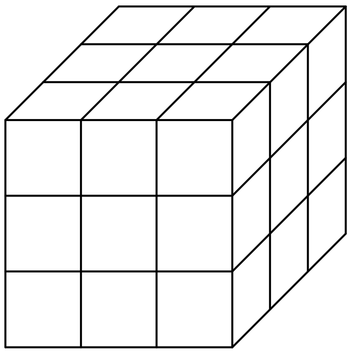


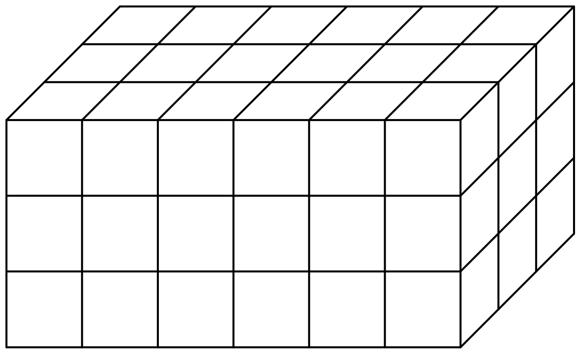


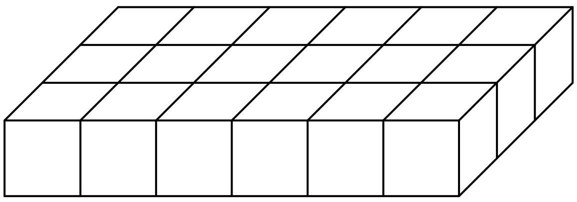


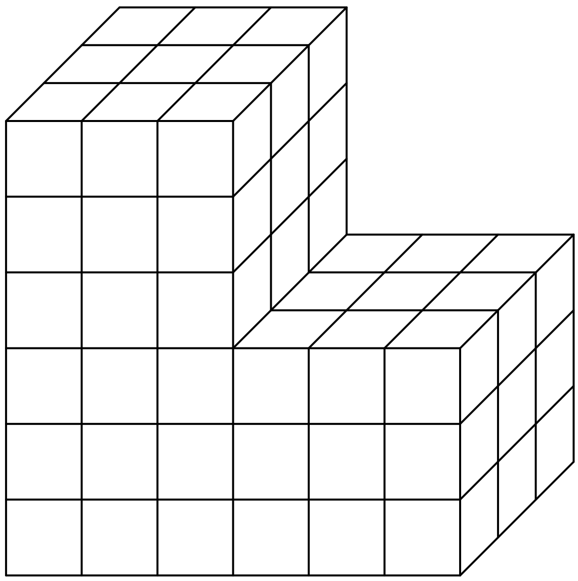
EMPILEMENTS DE CUBES (2)

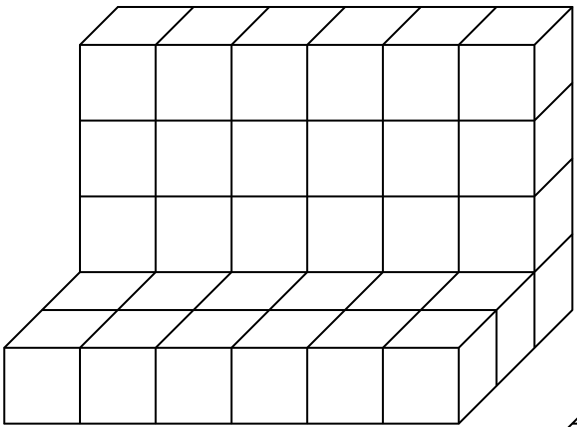
Indique sous chaque dessin le nombre de cubes formant l'empilement. Utilise des coloriages pour indiquer la méthode de calcul utilisée.

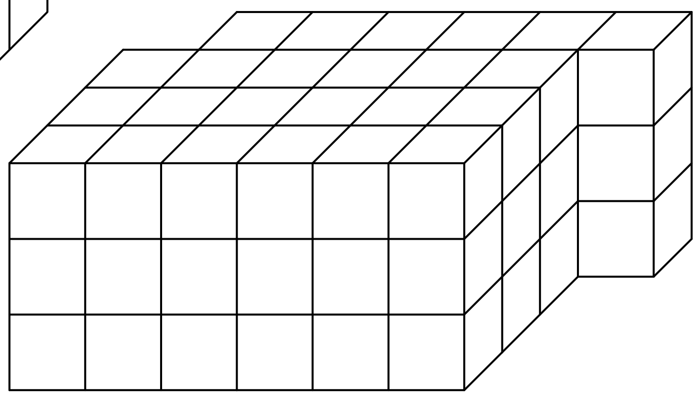






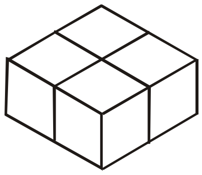


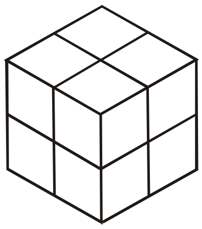


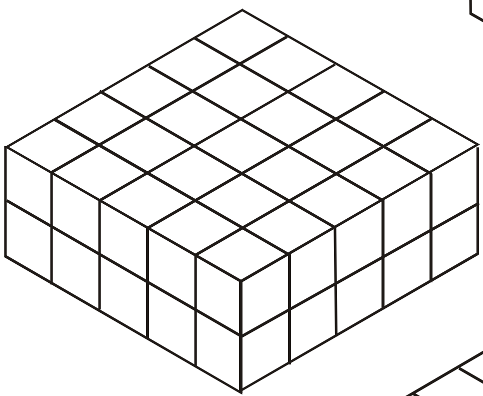


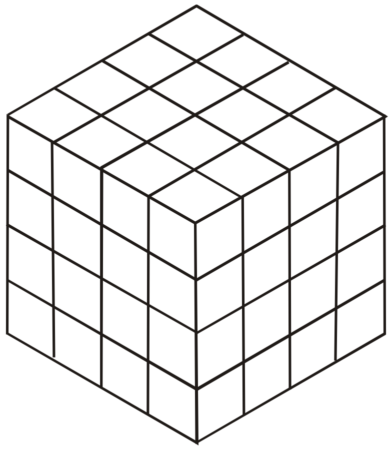
EMPILEMENTS DE CUBES (3)

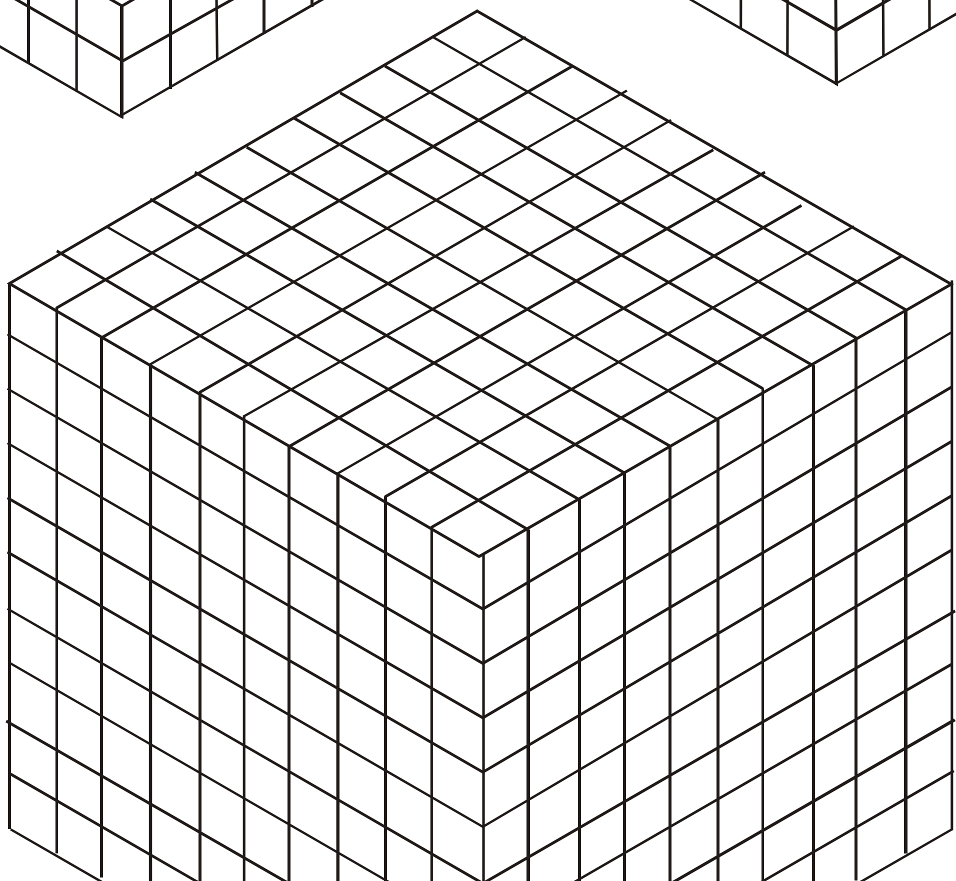
Indique sous chaque dessin le nombre de cubes formant l'empilement.
Utilise des coloriages pour indiquer la méthode de calcul utilisée.





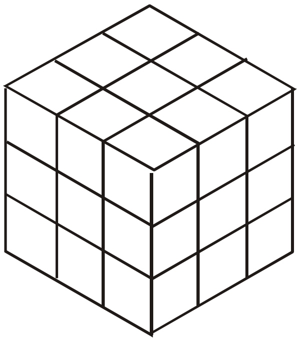


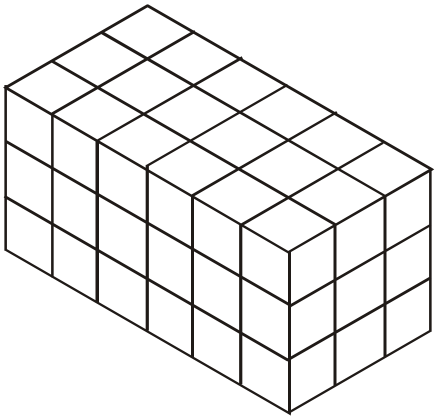


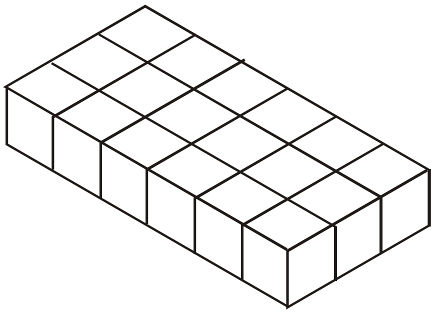


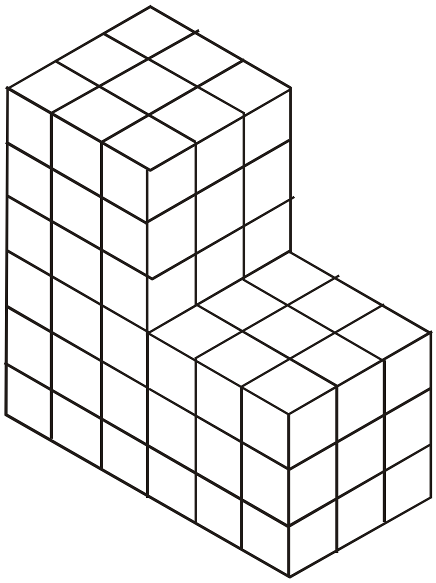
EMPILEMENTS DE CUBES (4)

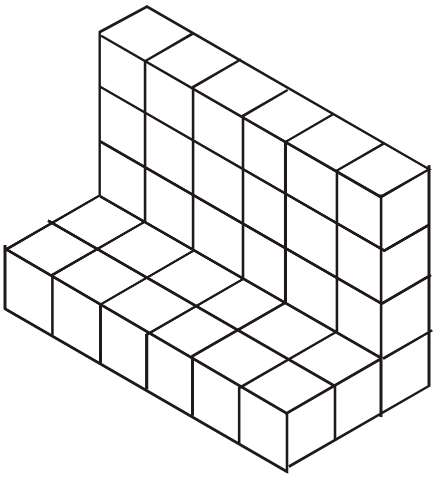
Indique sous chaque dessin le nombre de cubes formant l'empilement.
Utilise des coloriages pour indiquer la méthode de calcul utilisée.

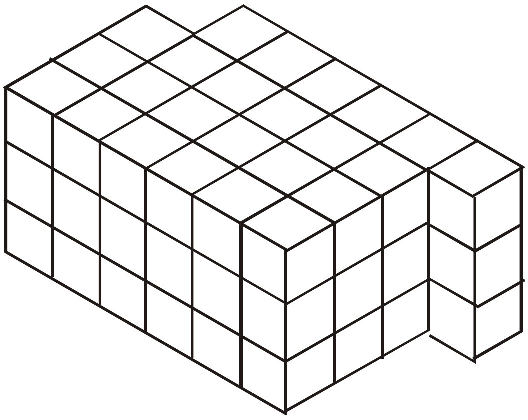






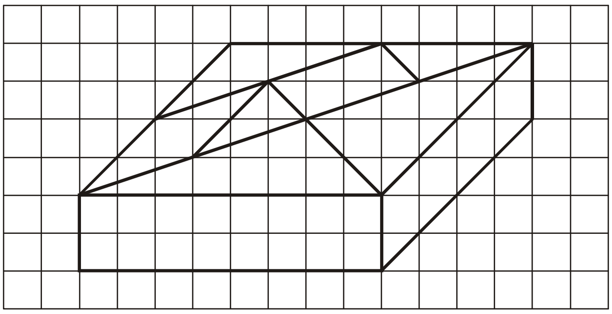






LE "TANGRAM" DÉCOUPÉ

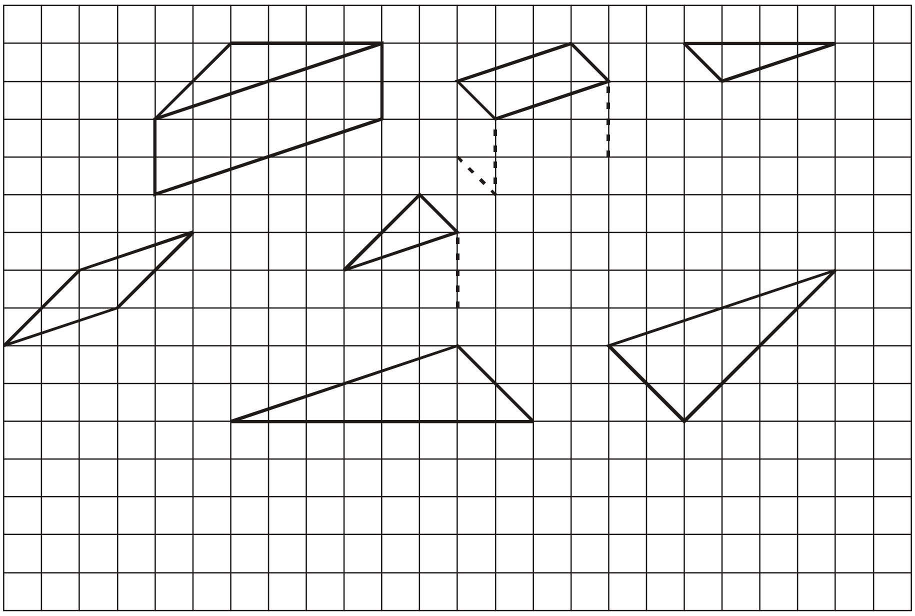
J’ai scié le " tangram " de bois. J’ai obtenu 7 morceaux que j’ai écartés, posés sur la table.



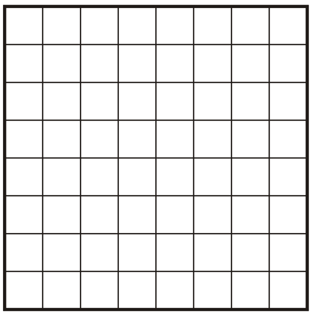
a) Ci-dessous, j’ai commencé le dessin des 7 morceaux. Termine ce dessin.

b) Dans ton dessin, colorie d’une même couleur les faces qui ont la même direction.

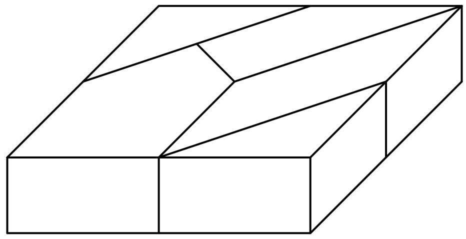
c) Les 7 morceaux sont des prismes. De quelle couleur as-tu colorié leurs bases ?



Voici la vue de dessus du " tangram ", dessine les traits de scie faits dans le bois.



LE PUZZLE DE SARRELOUIS DÉCOUPÉ

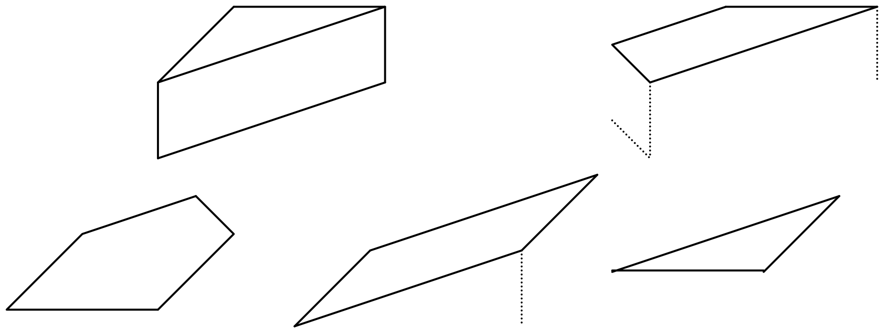


J'ai scié le puzzle de Sarrelouis. J'ai obtenu 5 morceaux que j'ai écartés, posés sur la table.

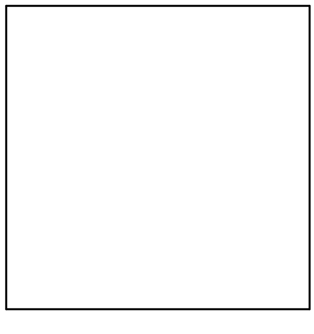
a- Ci-dessous, j'ai commencé le dessin des 5 morceaux. Termine ce dessin.

b- Ci dessus et dans ton dessin, colorie d'une même couleur les faces qui ont même direction.

c- Les 5 morceaux sont des prismes. De quelle couleur as-tu colorié leurs bases ?



d- Voici la vue de dessus du carré. Dessine les traits de scie faits dans le bois.

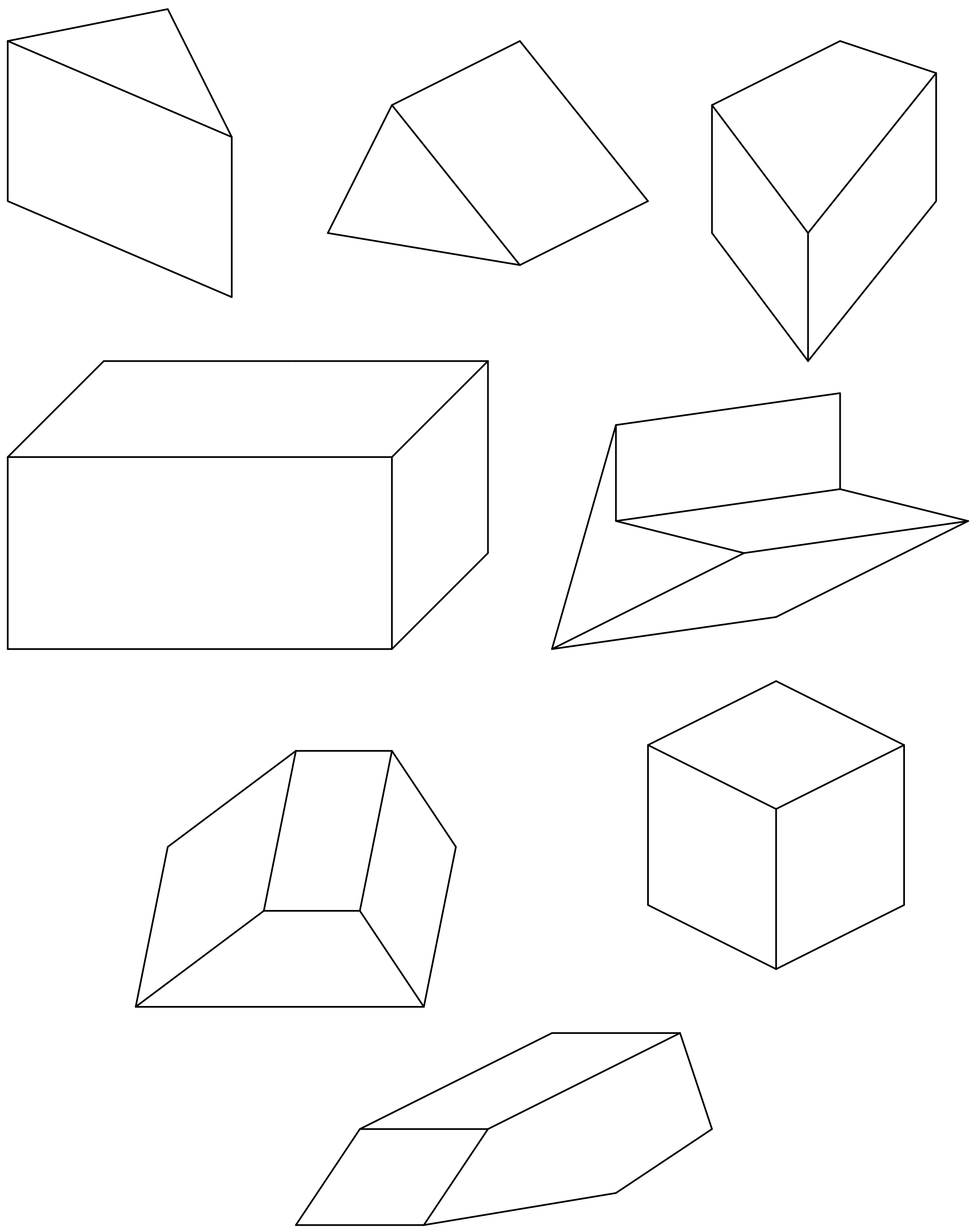


COLORIAGES DE PRISMES (1)

Voici des dessins de prismes vus en perspective.

Colorie en vert leur base visible.

Colorie en rouge leurs faces latérales visibles.

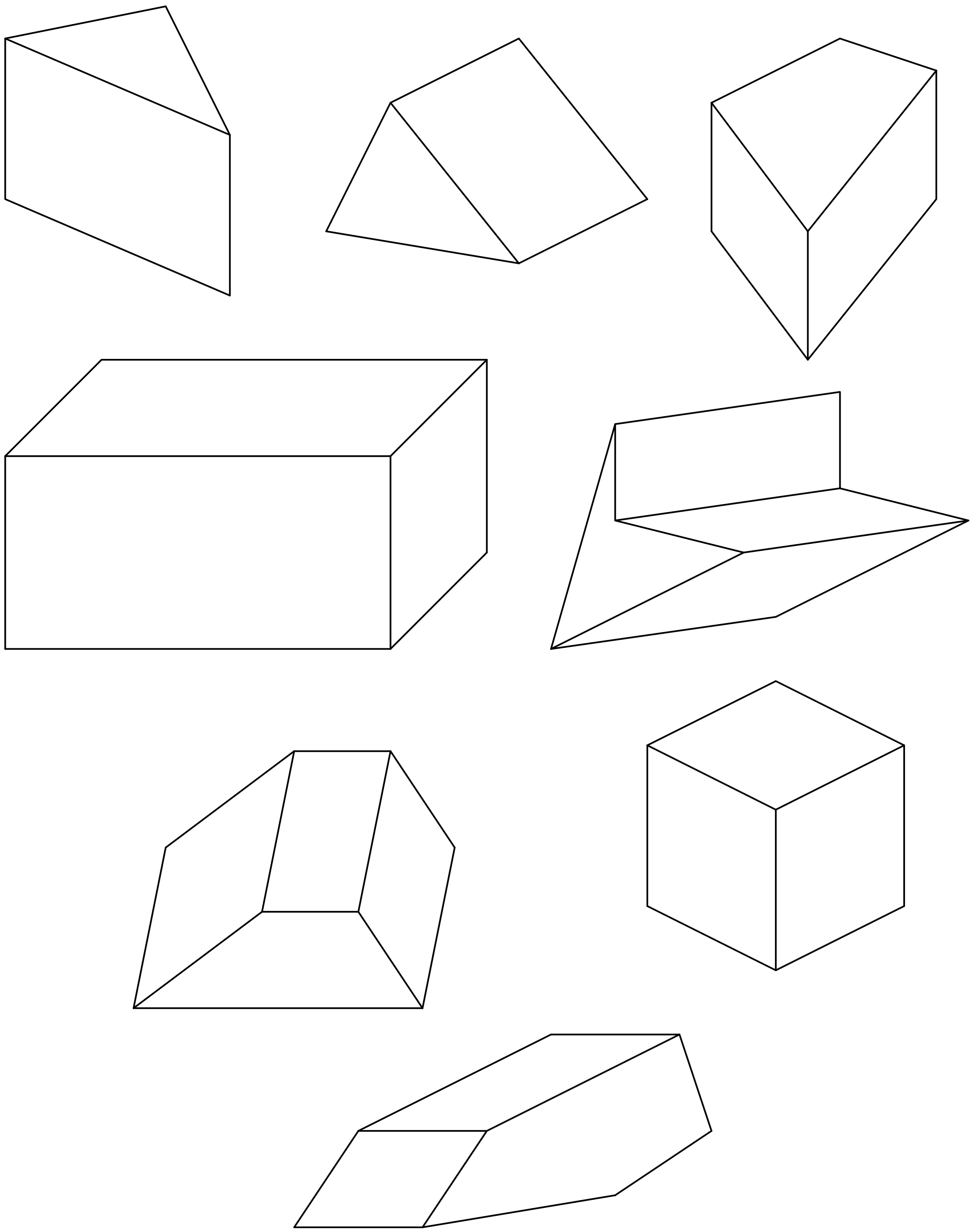


COLORIAGES DE PRISMES (2)

Voici des dessins de prismes vus en perspective.

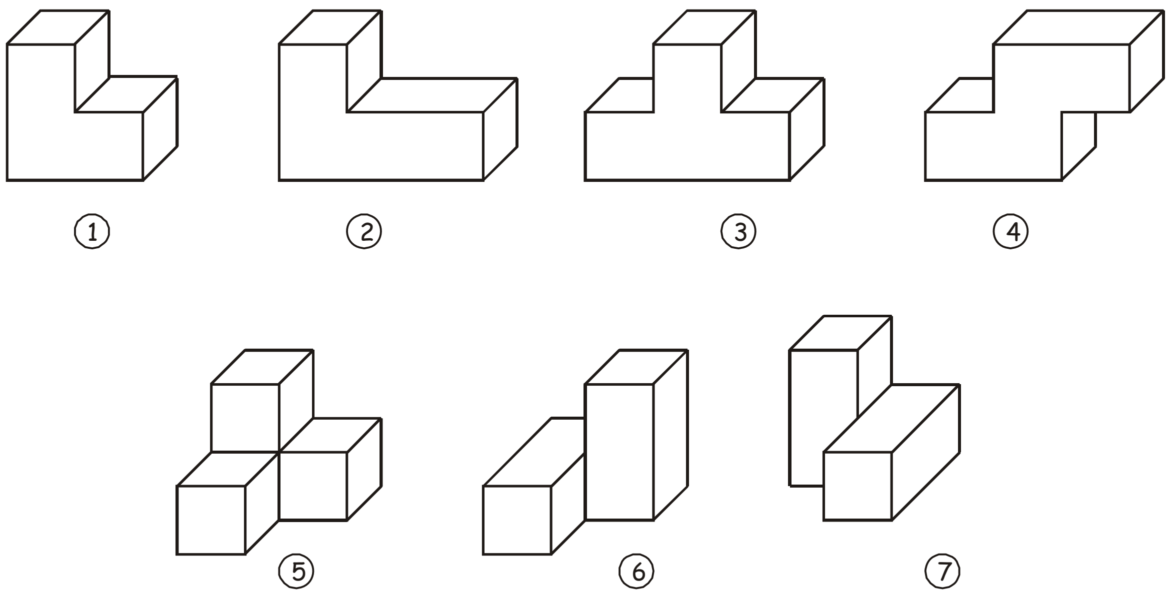
Colorie en vert leur base visible.

Repasse en rouge leurs arêtes visibles perpendiculaires aux bases.

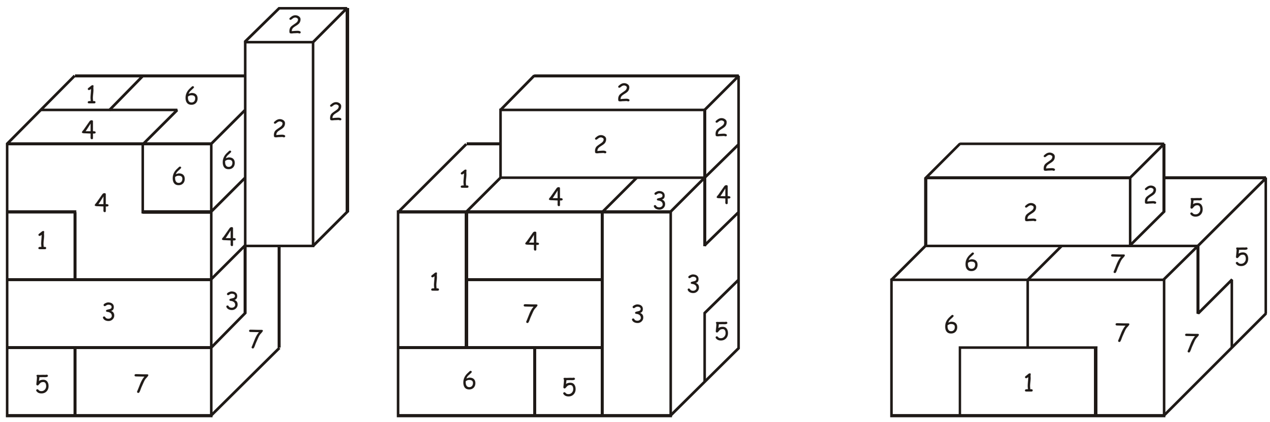


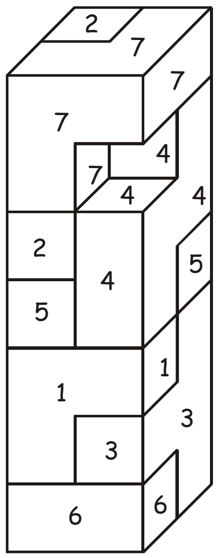
AVEC LES PIÈCES DU CUBE SOMA

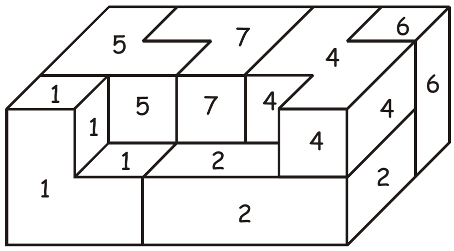
1) En utilisant 7 couleurs différentes, colorie les 7 pièces du jeu

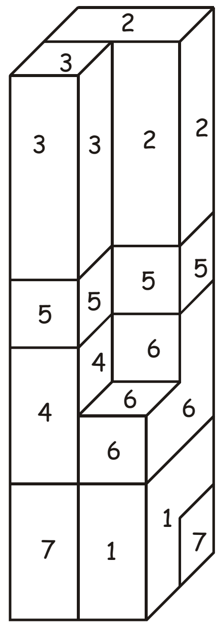


2) En utilisant les mêmes couleurs qu'à la question précédente, colorie les dessins des solides obtenus avec les 7 pièces (les zones "1" et la pièce "1" auront la même couleur, les zones "2" et la pièce "2" auront la même couleur …), puis réalise les solides en utilisant les pièces du jeu.







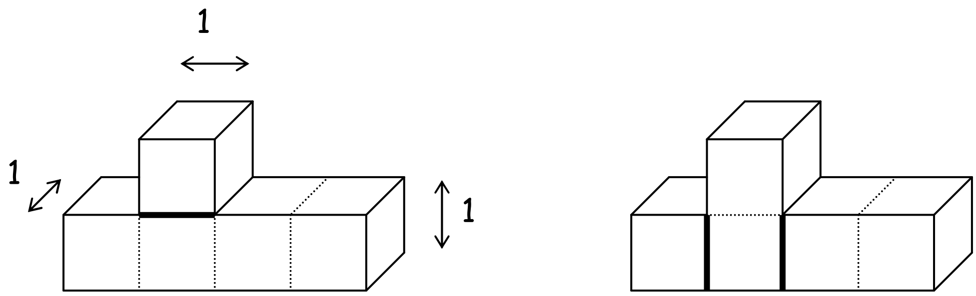


3) ◆ la pièce "1" peut-être considérée comme un assemblage de trois cubes de côté 1.
On peut la représenter par la chaîne de calculs 3 x 1 x 1 x 1.
◆ la pièce "1" peut-être considérée comme un assemblage d'un parallélépipède de dimensions 2,1, 1, et d'un cube de côté 1.
On peut la représenter par la chaîne de calculs 2 x 1 x 1 + 1 x 1 x 1.
◆ la pièce "1" peut-être considérée comme un assemblage d'un parallélépipède de dimensions 2, 2,1 duquel on a retiré un cube de côté 1.
On peut la représenter par la chaîne de calculs 2 x 2 x 1 - 1 x 1 x 1.

Pour chacun des solides dessinés à la question précédente, trouve une chaîne de calculs pouvant représenter ce solide.

PENTAC ET PARALLEPIPÈDES (1)

Les 12 pièces formant le "Pentac" sont les assemblages plats de 5 cubes.



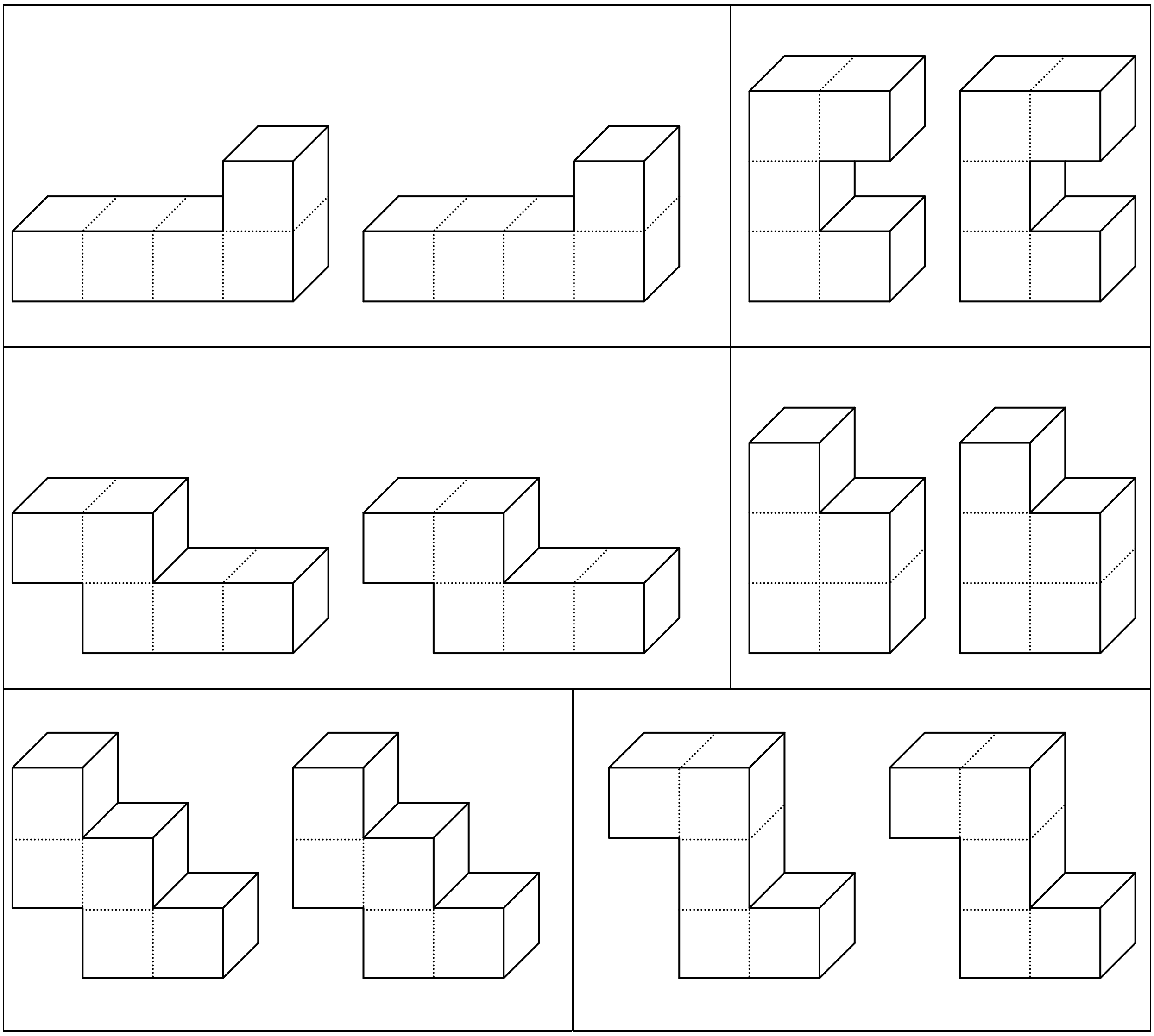
J'ai scié la pièce horizontalement. J'ai obtenu deux parallélépipèdes de dimensions $1 \times 1 \times 1$ et 4x1x1 .	J'ai scié la pièce verticalement. J'ai obtenu trois parallélépipèdes de dimensions $1 \times 1 \times 1$, $1 \times 2 \times 1$ et $2 \times 1 \times 1$.

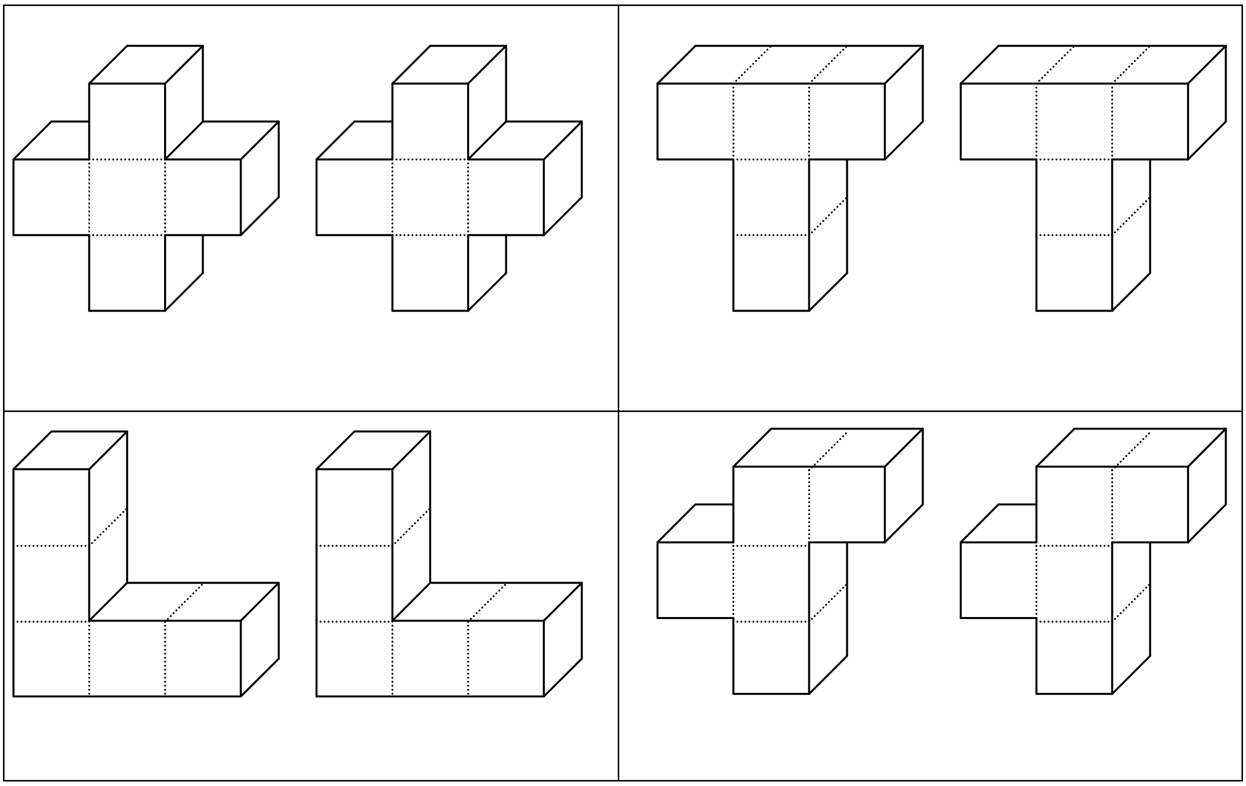
Pour chacune des dix autres pièces ci-dessous :

d- Indique les traits de scie.

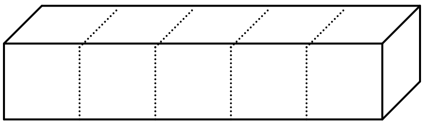
e- Colorie de couleurs différentes les parallélépipèdes obtenus.

f- Sous chaque pièce, indique les dimensions des parallélépipèdes obtenus.



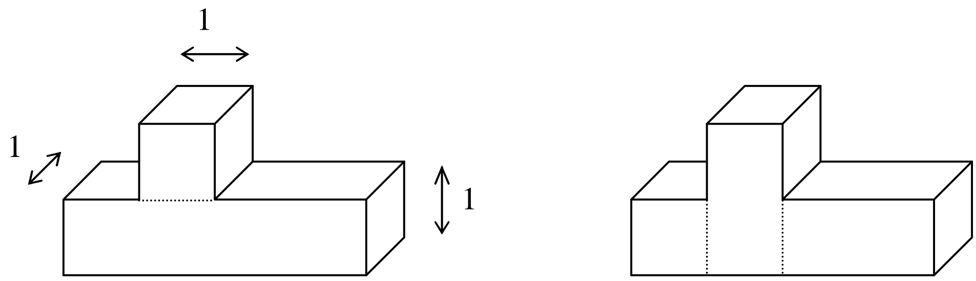


Et pour la pièce ci-dessous ?



PENTAC ET PARALLEPIPÈDES (2)

Les 12 pièces formant le "Pentac" sont les assemblages plats de 5 cubes.



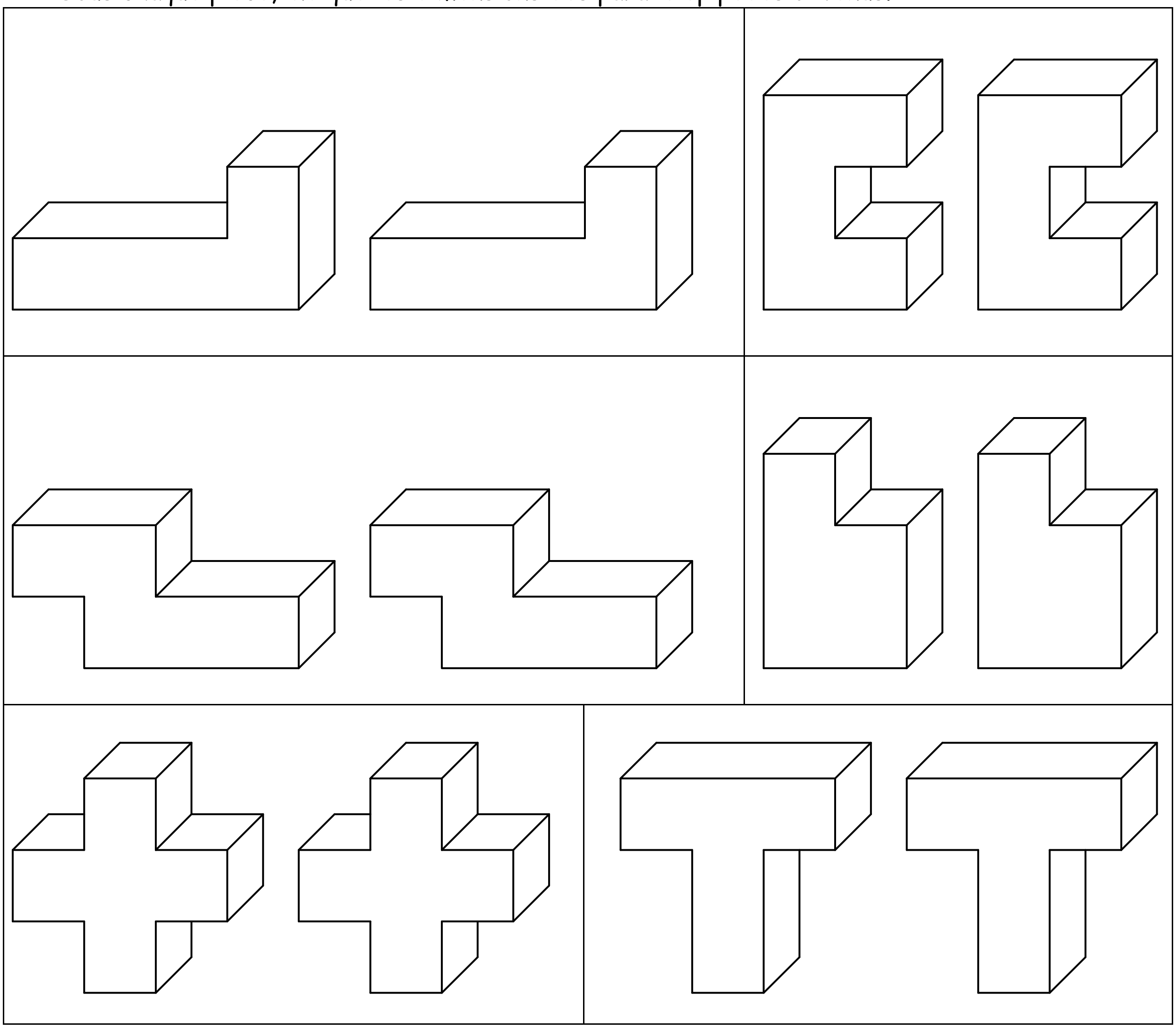
J'ai scié la pièce horizontalement. J'ai obtenu deux parallélépipèdes de dimensions $1\times1\times1$ et $4\times1\times1$.	J'ai scié la pièce verticalement. J'ai obtenu trois parallélépipèdes de dimensions $1\times1\times1$, $1\times2\times1$ et $2\times1\times1$.

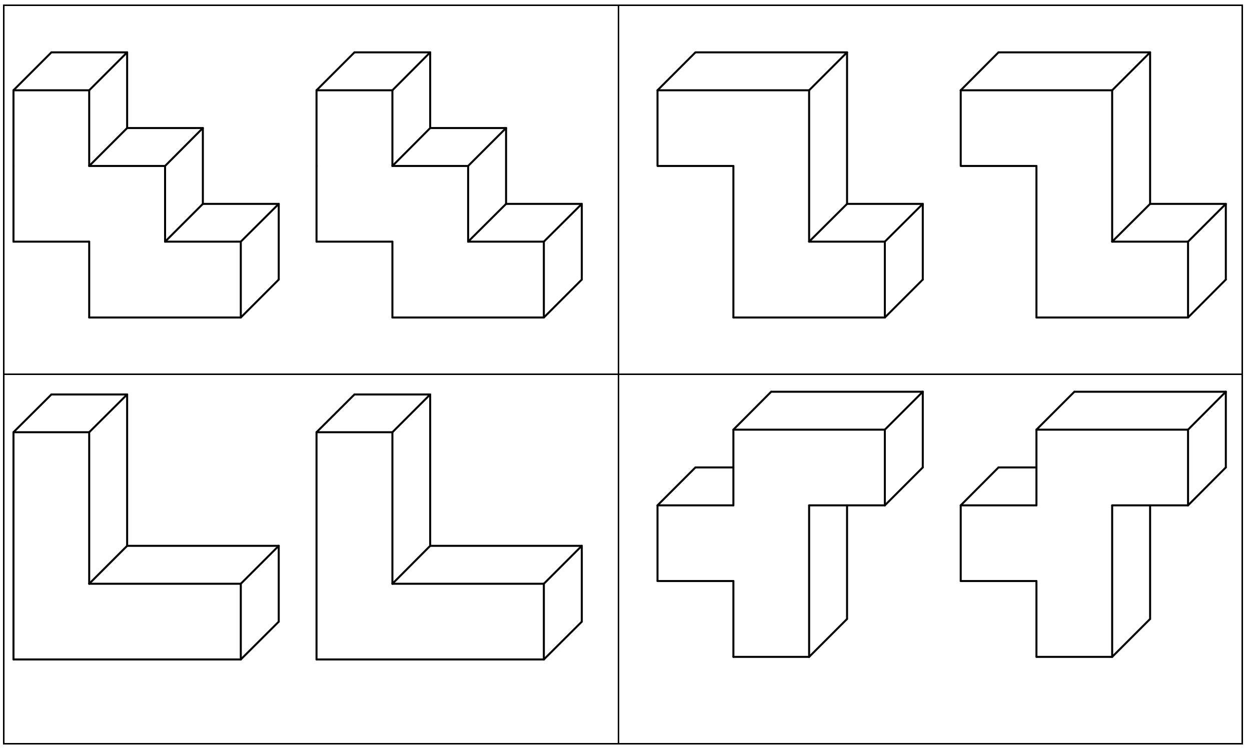
Pour chacune des dix autres pièces ci-dessous :

g- Indique les traits de scie.

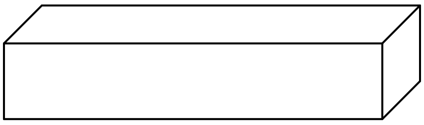
h- Colorie de couleurs différentes les parallélépipèdes obtenus.

i- Sous chaque pièce, indique les dimensions des parallélépipèdes obtenus.





Et pour la pièce ci-dessous ?

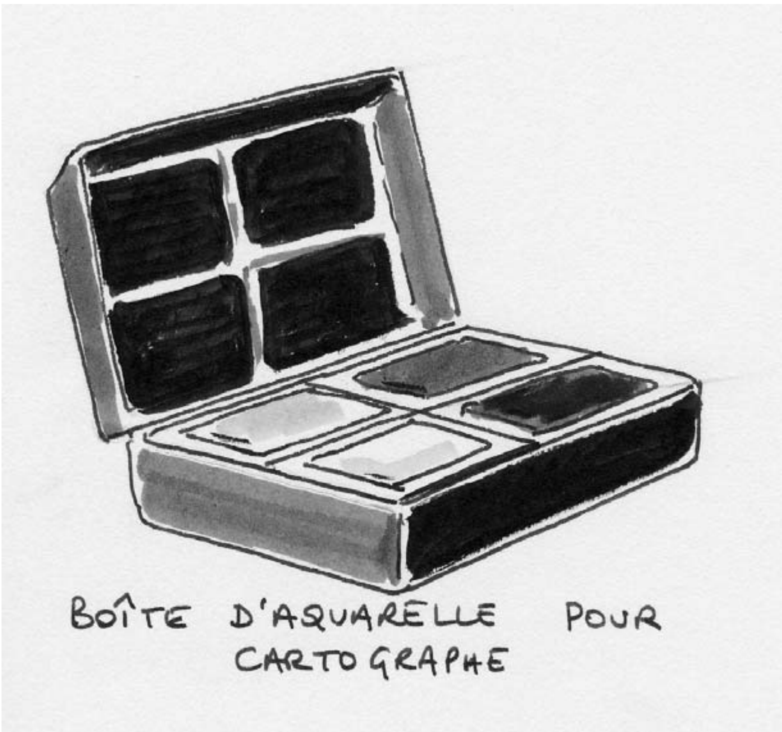


COLORIAGES, PAVAGES ET FRISES

Les pièces d'un puzzle peuvent former des motifs de pavage ou de frises. Le coloriage des pièces permet de visualiser les transformations mises en jeu. Le puzzle utilisé est celui de la brochure « Autour du puzzle de Sarrelouis » (IREM de Lorraine) » et les activités présentées ici s'inspirent de celles qui y sont décrites.
Pour les activités mettant en jeu des symétries et des rotations, le premier dessin montre quelques tracés utiles, l'élève s'en inspirera pour le second dessin.
Pour retrouver les pavages définis par translations, l'élève utilisera des regroupements de pièces. Ensuite apparaissent petit à petit des pièces se correspondant par translation. D'autres pavages à reconstruire se trouvent dans la brochure « Autour du puzzle de Sarrelouis » et « D'autres objets mathématiques » citées précédemment.

Le coloriage proposé a pour but de favoriser la vision des figures géométriques et de leur image par une des transformations rencontrées au collège. Il facilite la validation du travail de l'élève.

Nous ne pourrions quitter cette partie "coloriages mathématiques" sans aborder une utilisation du théorème des quatre couleurs appliqué à des patrons de solides.
Le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier des cartes géographiques était connu dès l'essor de l'imprimerie. Le problème a été formulé par des mathématiciens en 1852 et démontré en 1975 par W.Haken et K.Appel grâce à de puissants ordinateurs.



Le minimum de couleurs à utiliser est un défi proposé à l'élève, la correspondance des zones coloriées est un travail sur les juxtapositions des arêtes et leurs relations de collage.

La première activité proposée incite à faire appréhender plus tard le cône comme une pyramide ayant pour base un polygone régulier avec une infinité de cotés. Il est alors plus facile de comprendre que sa surface latérale est une portion de disque et non un triangle…

La deuxième activité est l'étude de divers patrons d'un même prisme à base triangulaire. La recherche préalable par les élèves des différents patrons d'un prisme est une activité à ne pas négliger. Ici, un certain nombre d'entre eux sont présentés, il reste aux élèves à les colorier et pour cela être attentif aux jonctions des arêtes. Les motifs proposés dans les différents patrons à colorier sont identiques, les faces du prisme ont simplement été placées différemment. Cette particularité n'a pas à être indiquée par avance aux élèves, à eux éventuellement de la remarquer et peut-être d'en tirer des conséquences.

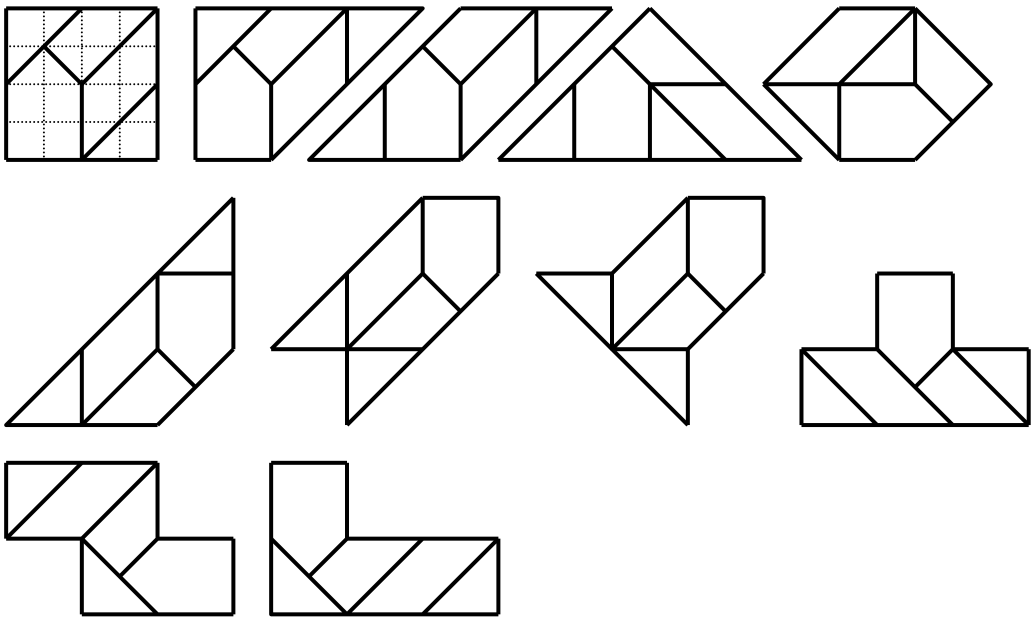
Avec nos élèves, il est possible de proposer un seul développement à colorier. Le développement choisi peut tenir compte d'une recherche préalable en classe ou des difficultés pour imaginer les correspondances des arêtes. Il n'est pas nécessaire que tous les élèves aient en même temps le même développement à colorier : la difficulté des patrons proposés peut tenir compte des difficultés éventuellement rencontrées par les élèves.
Une fois, le patron colorié, il est possible de faire découper les deux bases et les trois faces latérales. La recherche de nouveaux assemblages faisant correspondre les coloriages des arêtes est une aide pour la découverte d'autres développements. Cette approche par assemblage d'arêtes était évoquée dans « Jeux de formes Formes de jeux » (Bernard Bettinelli) IREM et CRDP de Besançon 1991 et reprise dans « Jeux 6 » APMEP 2002. Il n'est pas certain que tous les patrons possibles d'un même solide soient ainsi obtenus, mais cela permet la rencontre avec des « non traditionnels ».

Un premier patron de cube à colorier était l'une des épreuves du rallye mathématique organisé en 1992 par l' A.P.ME.P. Lorraine. D'autres pourront être trouvés dans les brochures « Objets mathématiques » et « D'autres objets mathématiques » éditées par l' A.P.M.E.P. Lorraine ainsi que « Jeux 5 » et « Jeux 6 » édités par l'A.P.M.E.P.
Par ailleurs, la brochure « Jeux 6 » citée précédemment indique comment en faire réaliser d'autres par les élèves. Nous espérons que ces coloriages ne seront pas seulement des activités pour des dernières heures de mathématiques en fin de trimestre…

PRÉSENTATION DU PUZZLE DIT DE SARRELOUIS

Ce puzzle peu connu avait été repéré au rayon jeu d'un grand magasin à Sarrelouis (Allemagne) et le nom de cette ville lui a été donné pour le différencier d'autres plus connus (Tangram par exemple) .Il est devenu le thème principal d'une brochure de l'IREM de Lorraine.

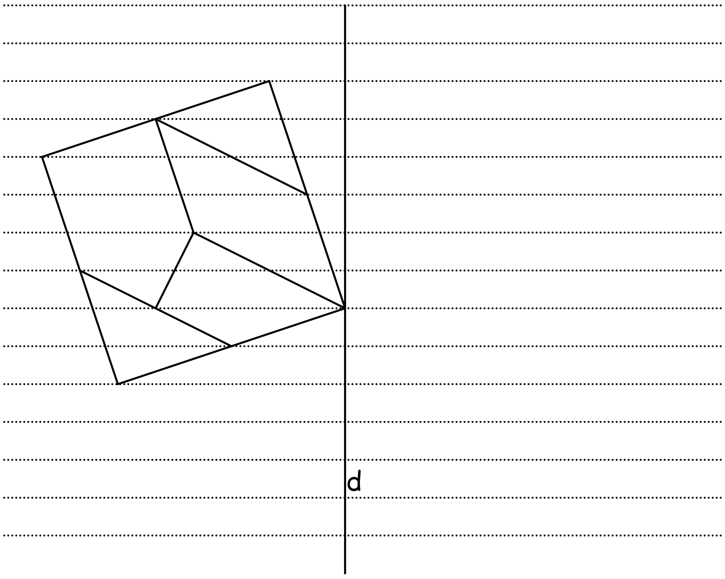
Le puzzle se dessine aisément sur un réseau quadrillé et permet la réalisation d'un grand nombre de polygones tels ceux dessinés ci-dessous.

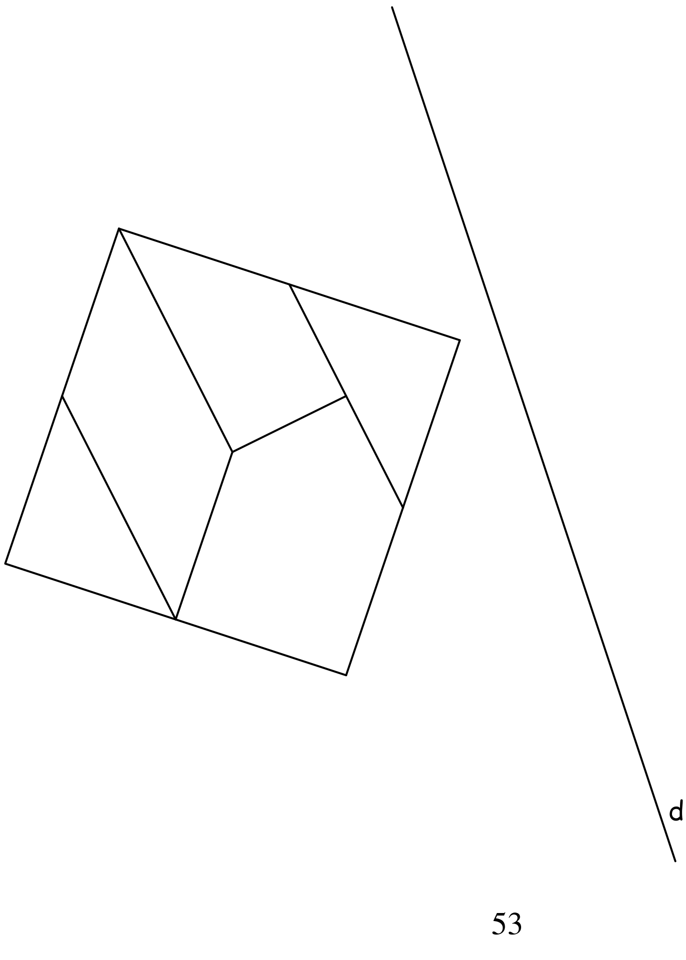


De nombreuses activités mathématiques sont envisageables avec ces polygones de même aire et de périmètre différent. Celles dans les pages qui suivent font principalement intervenir des transformations du plan, avec l'apport du coloriage pour visualiser les déplacements des pièces.

PUZZLE DE SARRELOUIS
SYMETRIE ORTHOGONALE

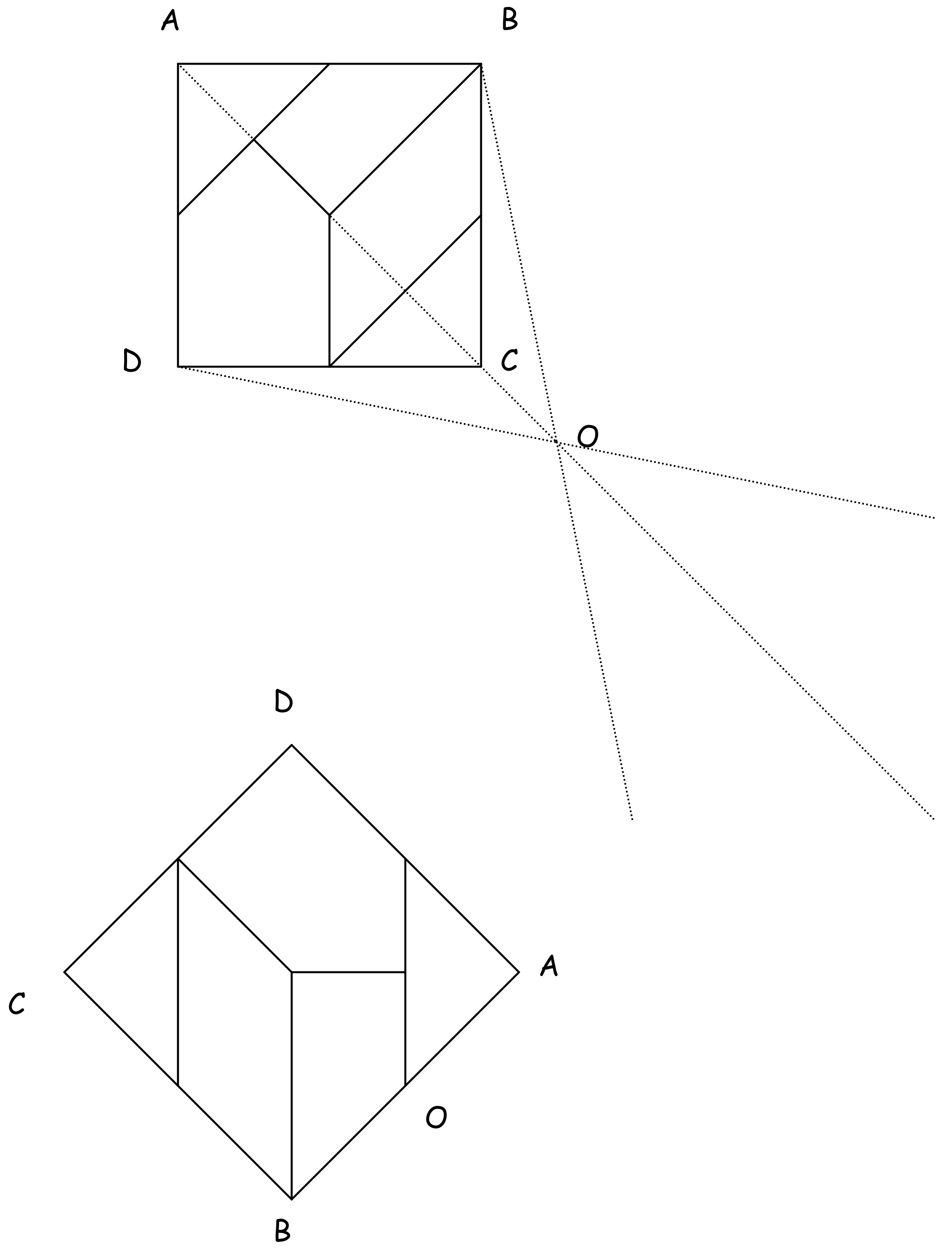
Pour chacun des dessins ci-dessous :
Trace le symétrique par rapport à la droite « d » du puzzle formé par les cinq pièces.
En utilisant cinq couleurs différentes, colorie d'une même couleur chaque pièce et sa symétrique.





PUZZLE DE SARRELOUIS : DEMI TOUR AUTOUR DU POINT O

Pour chacun des dessins ci-dessous :
Imagine que le puzzle dans le carré ABCD tourne d'un demi-tour autour du point O. Trace le symétrique par rapport au point 0 du puzzle formé par les cinq pièces.
En utilisant cinq couleurs différentes, colorie d'une même couleur chaque pièce et sa symétrique.

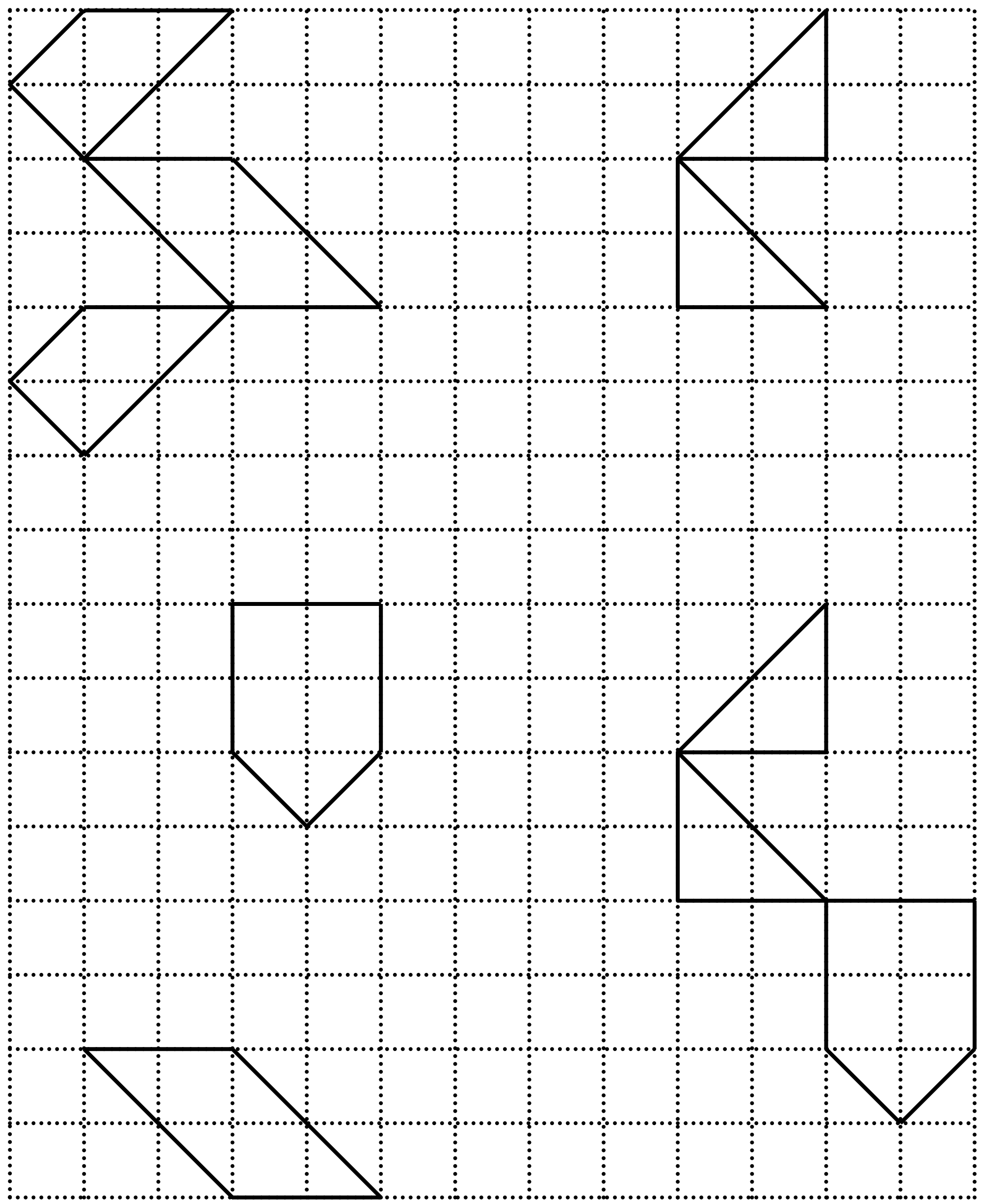


PAVAGES ET TRANSLATIONS (1)

Pour chacun des dessins, en utilisant cinq couleurs différentes, colorie les cinq pièces formant le pavage du rectangle. Chaque pièce est dessinée deux fois. Des dessins superposables mais n'étant pas images l'un de l'autre par une translation représentent des pièces différentes.

Complète le pavage du rectangle sachant que deux pièces identiques (qui seront coloriées de la même couleur) se correspondent par une translation.

Attention, sur le pourtour du rectangle, des « morceaux » de pièces peuvent être utilisées.

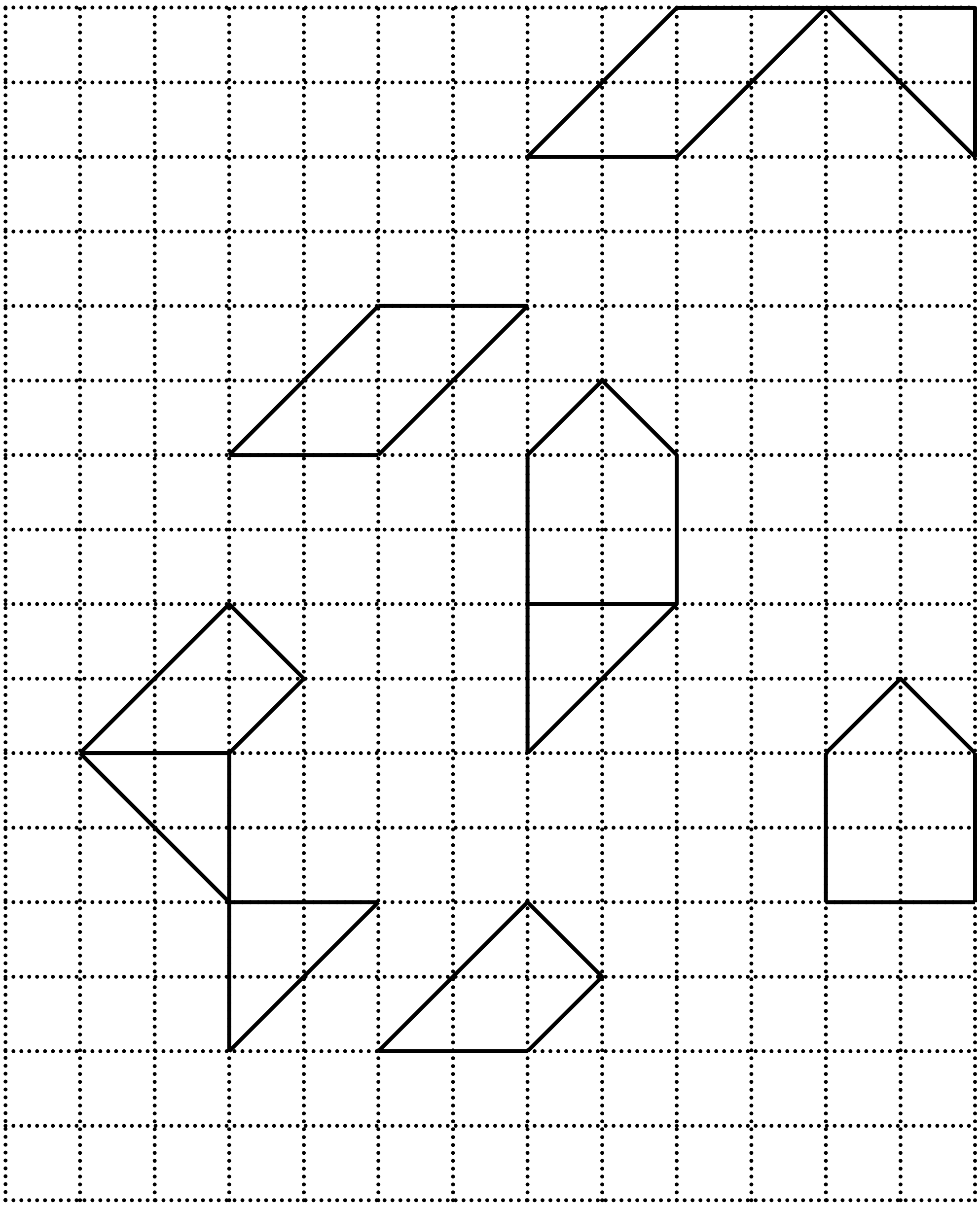


PAVAGES ET TRANSLATIONS (2)

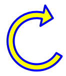
Pour chacun des dessins, en utilisant cinq couleurs différentes, colorie les cinq pièces formant le pavage du rectangle. Chaque pièce est dessinée deux fois. Des dessins superposables mais n'étant pas images l'un de l'autre par une translation représentent des pièces différentes.

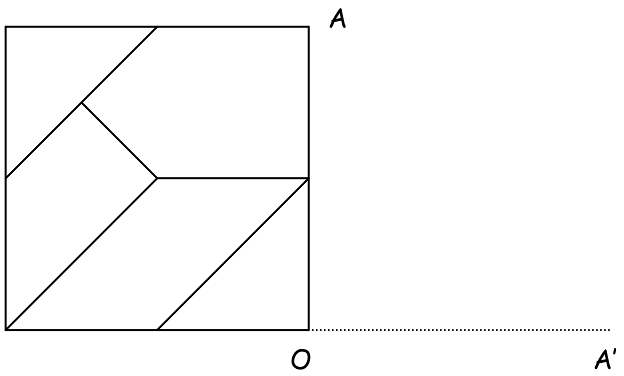
Complète le pavage du rectangle sachant que deux pièces identiques (qui seront coloriées de la même couleur) se correspondent par une translation.

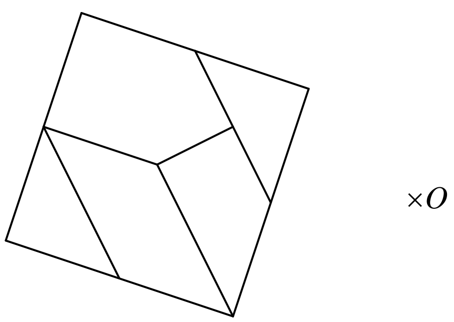
Attention, sur le pourtour du rectangle, des « morceaux » de pièces peuvent être utilisées.



PUZZLE DE SARRELOUIS
ROTATION AUTOUR DU POINT O (1)

Pour chacun des dessins ci-dessous :
Imagine que le puzzle dans le carré ABCD tourne dans le sens des aiguilles d'une montre  autour du point O.
Trace l'image du puzzle par la rotation de centre O, d'un angle de 90° dans le premier cas et de 60° dans le second.
En utilisant cinq couleurs différentes, colorie d'une même couleur chaque pièce et son image par la rotation.



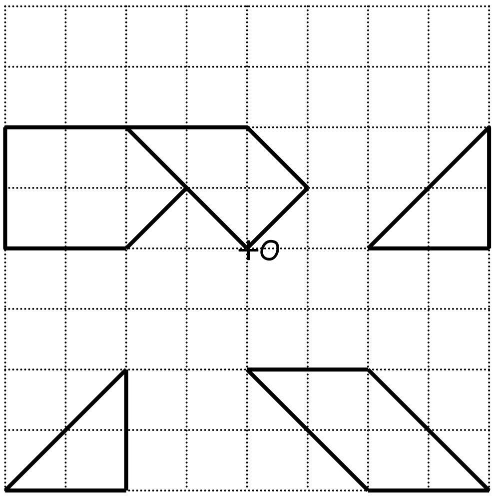


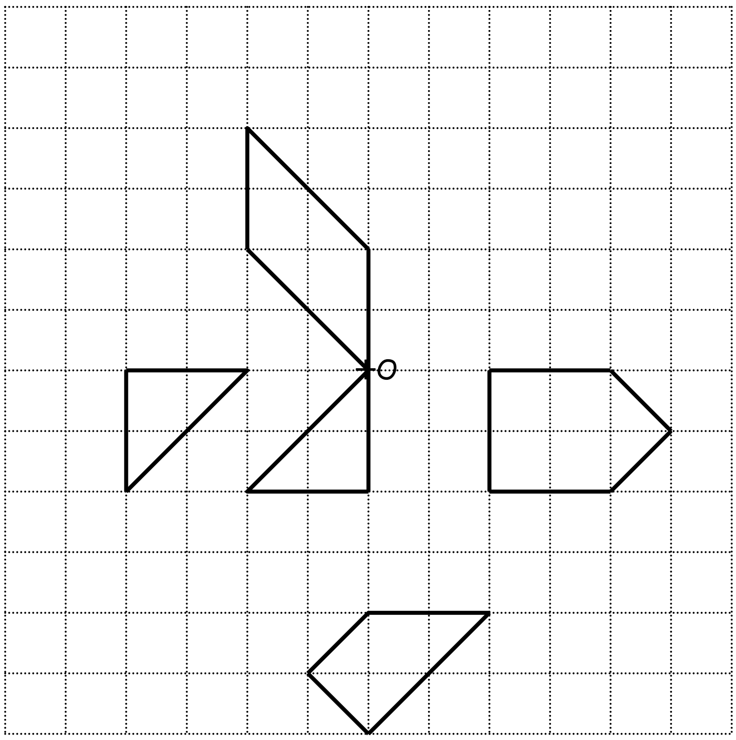
PUZZLE DE SARRELOUIS
ROTATION AUTOUR DU POINT O (2)

Dans cette activité, les rotations intervenant ont pour sens celui des aiguilles d'une montre et pour centre les centres des réseaux pointillés.

Pour chacun des dessins ci-dessous, trace les images des 5 pièces par des rotations d'angle 90°, 180° et 270° et de centre O.

Colorie d'une même couleur chaque pièce et ses images par les différentes rotations utilisées.



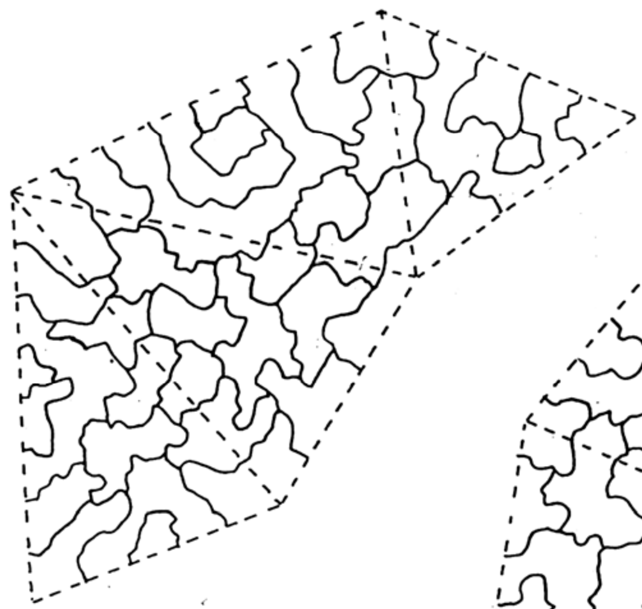


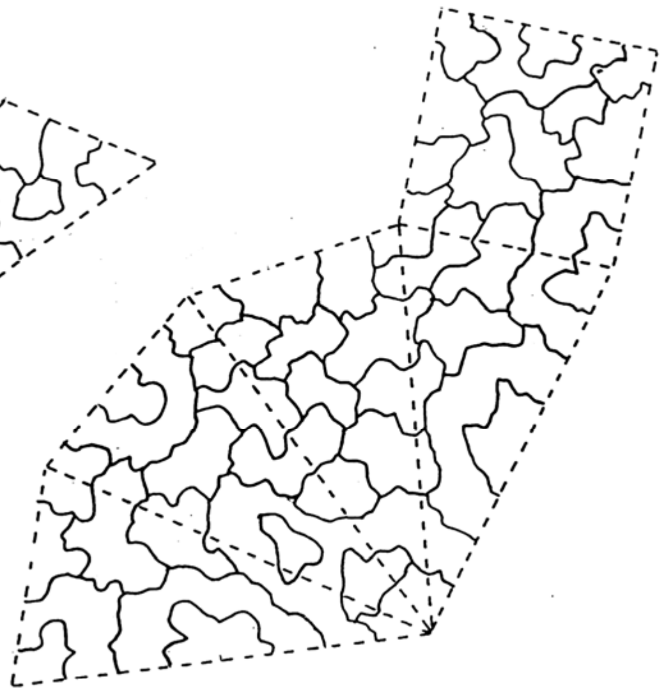
DES PATRONS DE PYRAMIDES À COLORIER

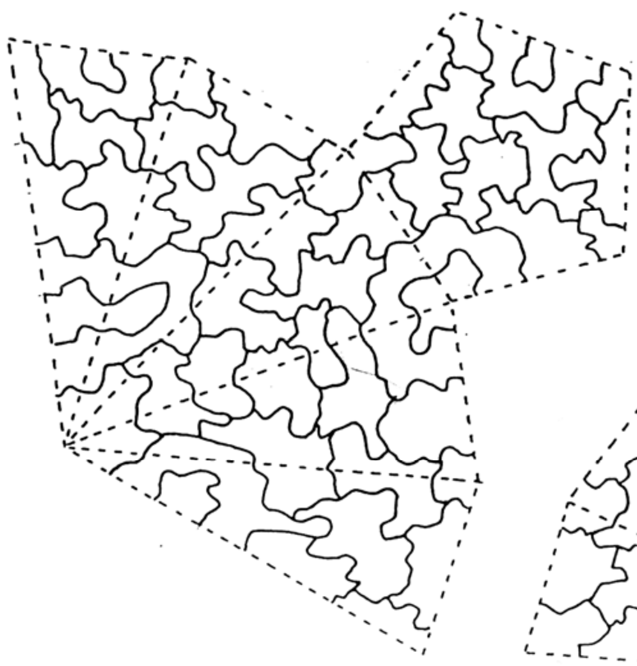
En utilisant le moins de couleurs possibles, colorie les patrons de pyramide dessinés ci-dessous.
Deux zones voisines ne peuvent pas être de la même couleur.

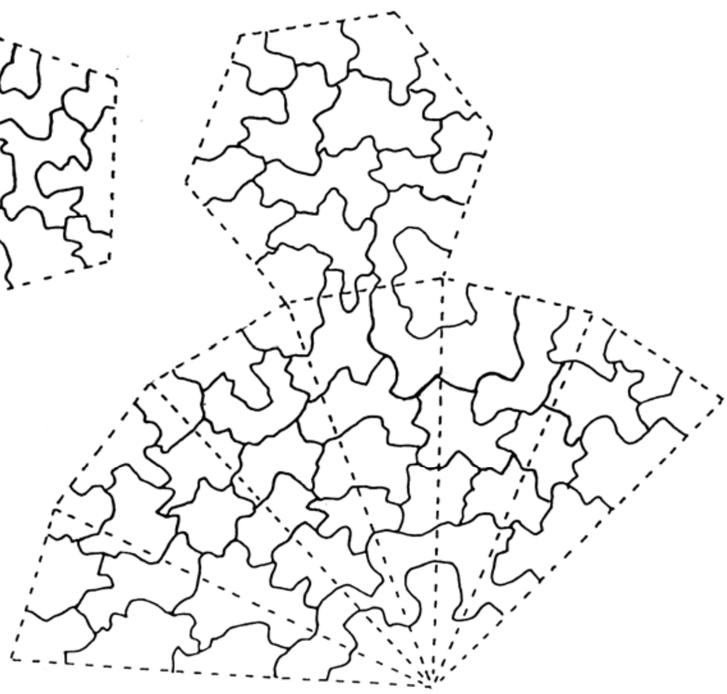
Les pointillés ne sont pas des limites de zone, une zone peut se prolonger d'une face à l'autre.

Sous chaque patron, indique le nombre de couleurs utilisées.







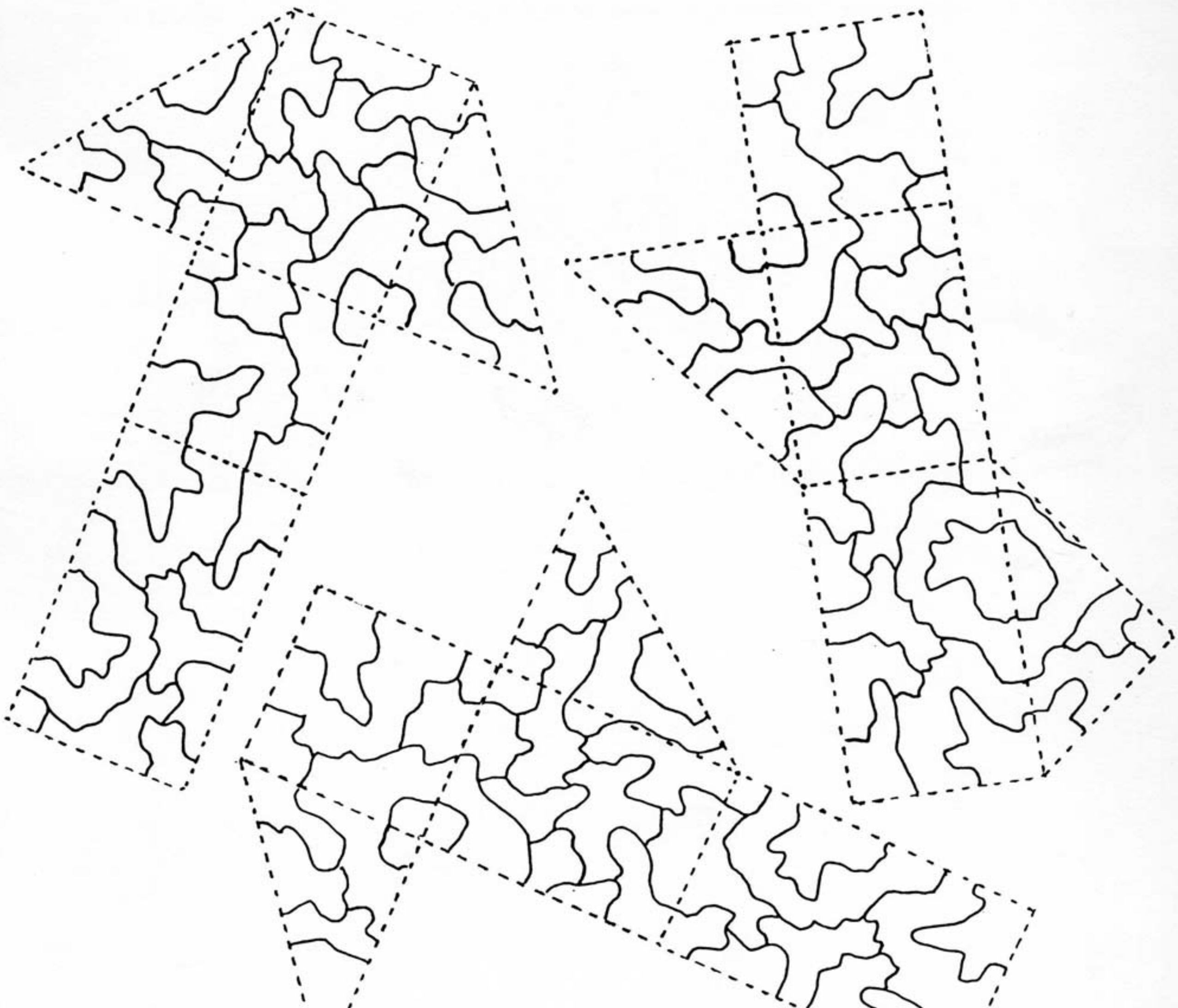


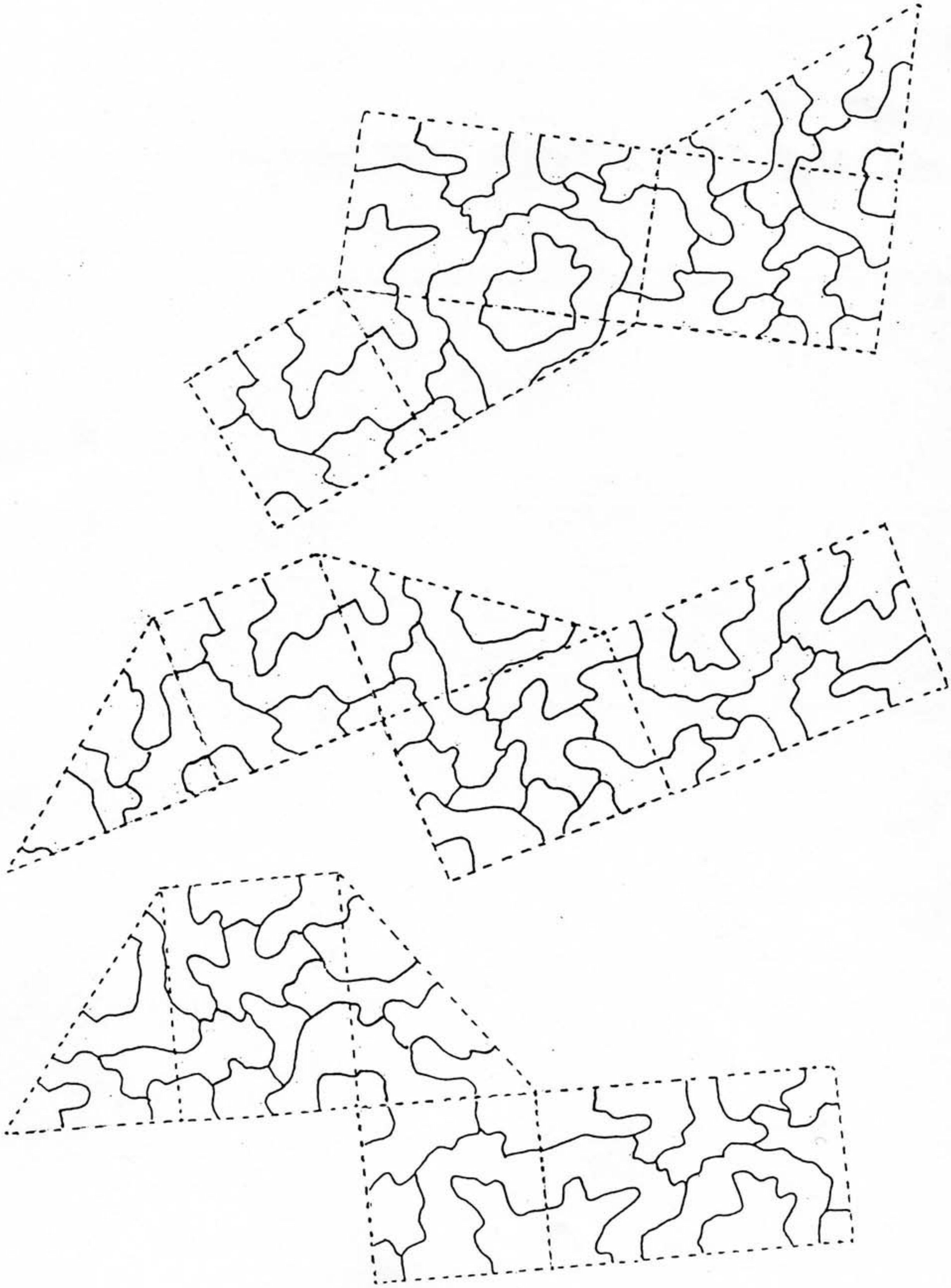
DES PATRONS DE PRISMES À COLORIER

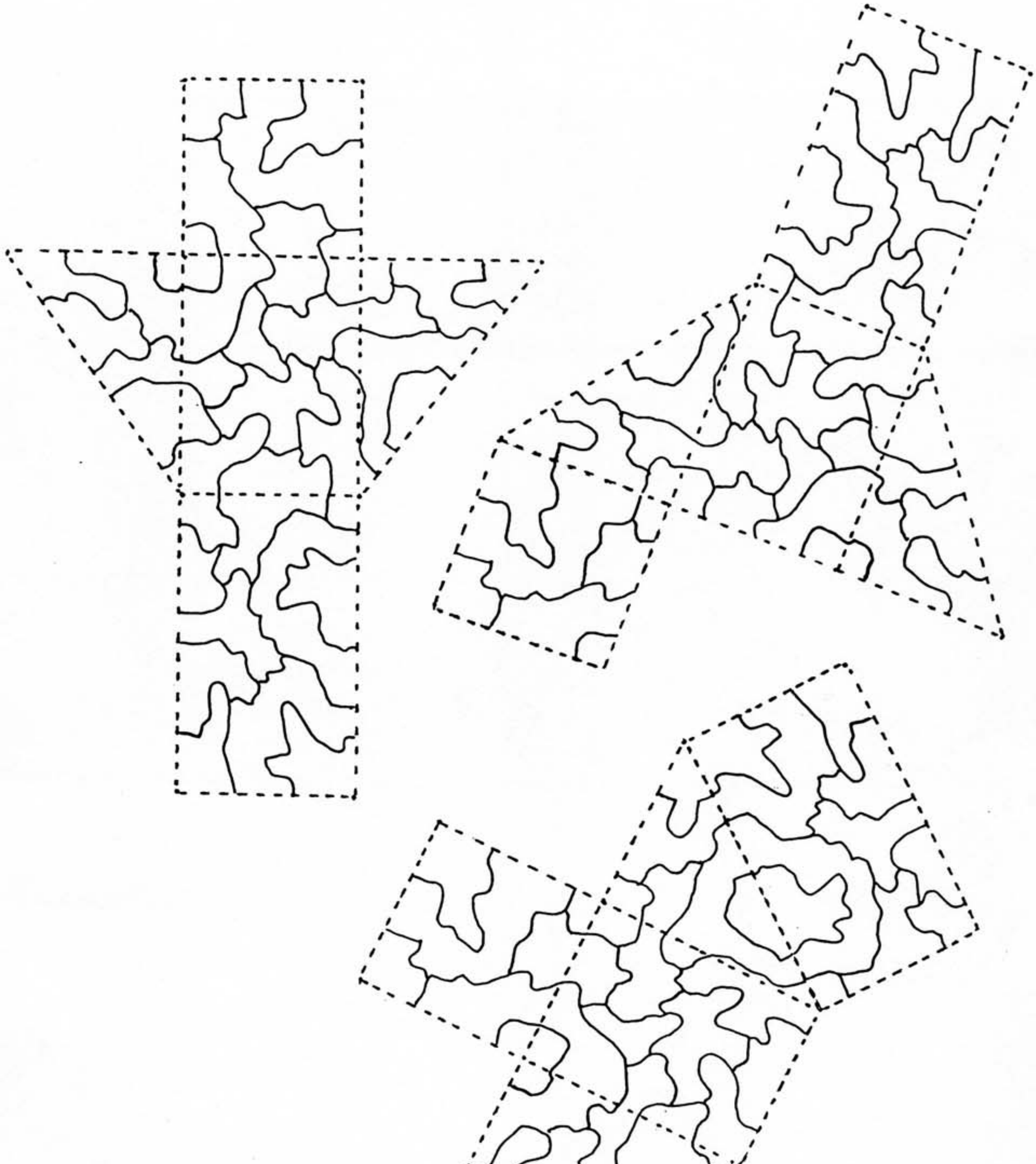
En utilisant le moins de couleurs possibles, colorie les patrons de prisme dessinés ci-dessous.
Deux zones voisines ne peuvent pas être de la même couleur.

Les pointillés ne sont pas des limites de zone, une zone peut se prolonger d'une face à l'autre.

Sous chaque patron, indique le nombre de couleurs utilisées.







Edité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
(Université Henri Poincaré - Nancy 1 – Faculté des sciences et Techniques)
B.P.239 VANDOEUVRE – Lès – Nancy Cedex
N° de la publication 2-85406-185-3
Responsable de la publication : Le Directeur de l'IREM, Jean-Pierre FERRIER

TITRE : Mathématiques visuelles : osons des coloriages…

AUTEURS :

Alain Castagnetto
Céline Coursimault
Fabienne D'Alimonte
François Drouin
Monique Gaildry
Audrey Leininger
Pol Le Gall

PUBLIC VISÉ :

Élèves de collège
Âge : 11 à 16 ans
Niveau : 6ème ;5ème ; 4ème ; 3ème

RÉSUMÉ :

La brochure présente des utilisations de coloriages pour faciliter la compréhension de contenus mathématiques. Cet écrit s'insère dans un questionnement plus général à propos de l'utilisation de l'aspect visuel et de considérations esthétiques dans l'enseignement des mathématiques.

Les documents élèves sont conformes aux programmes des classes du Collège. Le lecteur trouvera également des textes précisant nos intentions et précisant les conditions d'utilisation en classe des activités présentées.

MOTS CLÉS :

Écriture décimale, écriture fractionnaire, proportion, pourcentage, rectangle, volume, empilement de cubes, prisme, symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation, pavage, tangram, puzzle de Sarrelouis, cube Soma, Pentac, théorème des quatre couleurs.