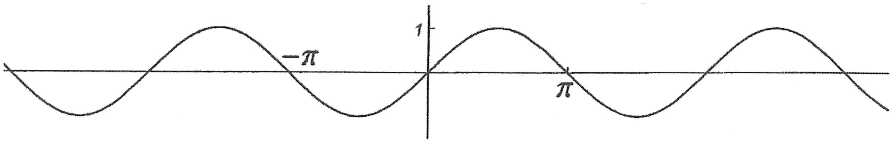
université HENRI POINCARÉ NANCY 1

I.R.E.M. DE LORRAINE

$\tan x$

$\cos x$

$\sin x$



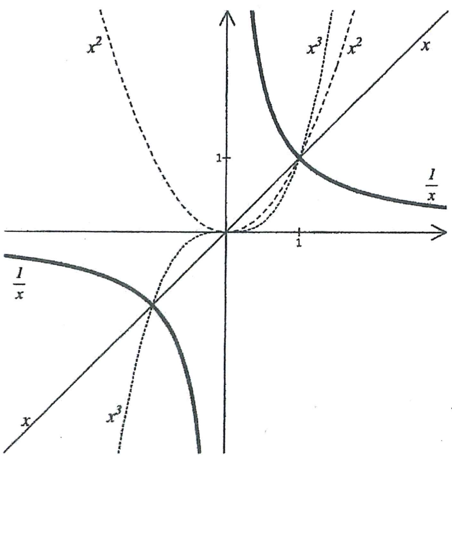
FONCTIONS USUELLES

$ax + b$

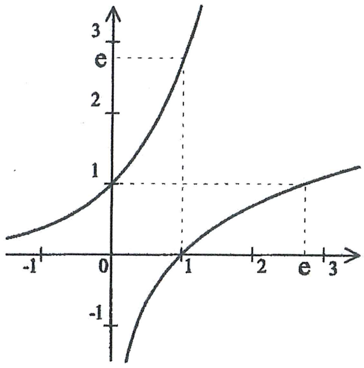
$\exp x$

$\sqrt{x}$

x^2



x^3



$\frac{1}{x}$

$\ln x$

Edité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
(Université Henri Poincaré – Nancy 1 – Faculté des Sciences et Techniques)
B.P. 239 VANDOEUVRE-LES-NANCY
Dépôt légal : 1er trimestre 2006 n° de la publication 2-85406-179-9
Responsable de la publication : la Directrice de l'IREM, Nicole BARDY-PANSE

SOMMAIRE

A

Fonctions affines

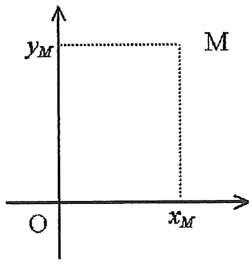
FONCTIONS AFFINES

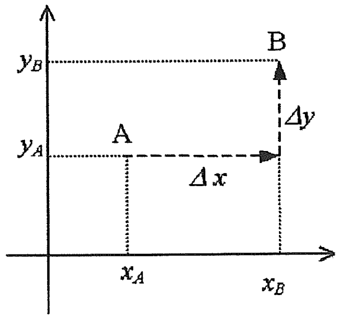
De toutes les fonctions usuelles que nous étudions, les fonctions affines, c'est-à-dire celles définies par une expression du type $f(x) = ax + b$*, sont les plus simples. Il ne faut cependant pas sous estimer leur importance : localement, c'est-à-dire assez près d'une valeur donnée de la variable, toute fonction (pourvu qu'elle soit assez régulière, ce qui sera le cas des fonctions usuelles) se comporte presque comme une fonction affine.*
Vous savez très certainement que le graphique d'une fonction affine est une droite. Nous consacrons les trois premiers paragraphes à la notion de droite dans le plan muni d'un repère : il est conseillé de s'assurer que leur contenu est solidement acquis en faisant les exercices proposés.
Le dernier paragraphe montre l'intervention des fonctions affines dans les sciences expérimentales.

Sommaire

1. D'un point à un autre dans le plan muni d'un repère.

Dans un repère, un point M est déterminé par son abscisse x_M et son ordonnée y_M.





$\Delta x = x_B - x_A$ est la variation en abscisse du point A au point B.

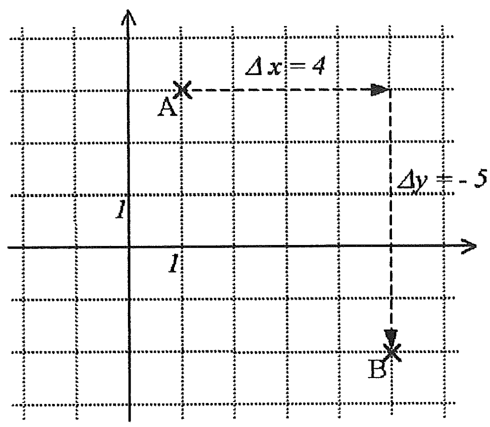
$\Delta y = y_B - y_A$ est la variation en ordonnée du point A au point B.

Sur le schéma ci-dessus, Δy et Δx sont positifs mais tous les cas de figure peuvent se présenter.

Par exemple de A(1 ; 3) à B(5 ; -2) nous avons :

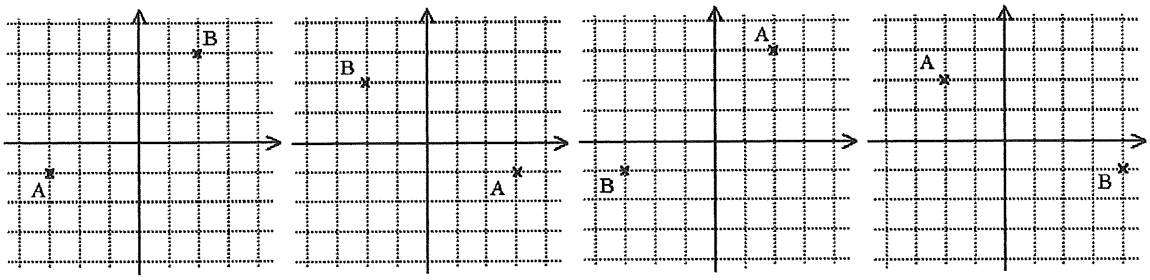
$\Delta x = 5 - 1 = 4$

$\Delta y = -2 - 3 = -5$



Exercices

1. Sur chacun des schémas suivants, représenter la variation en abscisse Δx et la variation en ordonnée Δy du point A au point B et indiquer leur valeur.



2. Soit A le point de coordonnées (2 ; -4). Calculer la variation en abscisse Δx et la variation en ordonnée Δy du point A au point B dans chacun des cas suivants :

B a pour coordonnées (10 ; 12) $\Delta x =$ .... $\Delta y =$...........

B a pour coordonnées (0 ; 0) $\Delta x =$ .... $\Delta y =$...........

B a pour coordonnées (-47 ; -312) $\Delta x =$ .... $\Delta y =$...........

3. Soit A le point de coordonnées (-23 ; 17). Ecrire les coordonnées des points B, C, D tels que :

de A à B, $\Delta x = 2$ et $\Delta y = -3$ $x_B =$.................. $y_B =$..................

de B à C, $\Delta x = -10$ et $\Delta y = 14$ $x_B =$.................. $y_B =$..................

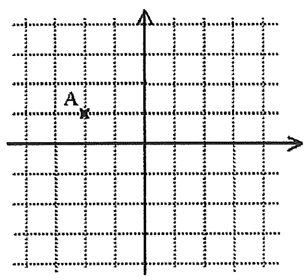
de C à D, $\Delta x = -51$ et $\Delta y = -37$ $x_B =$.................. $y_B =$..................

4. En donnant à Δx plusieurs valeurs différentes, placer sur le dessin ci contre des points M_1, M_2, M_3...... vérifiant tous la condition suivante :

de A à M, $\Delta y = \Delta x$

Placer de même plusieurs points N_1, N_2, N_3......tels que

de O à N, $\Delta y = \Delta x$

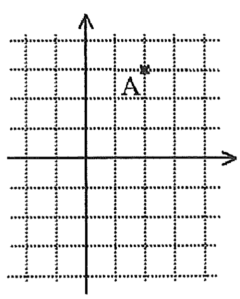


5. En donnant à Δx plusieurs valeurs différentes, placer sur le dessin ci contre des points M_1, M_2, M_3...... vérifiant tous la condition suivante :

de A à M, $\Delta y = 2\Delta x$

Placer de même plusieurs points N_1, N_2, N_3......tels que

de A à N, $\Delta y = -\frac{1}{2}\Delta x$

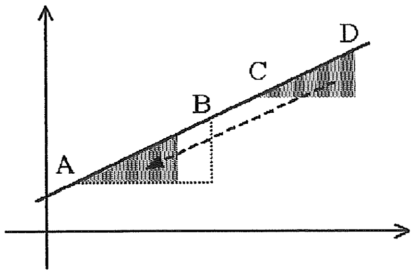


2. Coefficient directeur d'une droite dans un repère

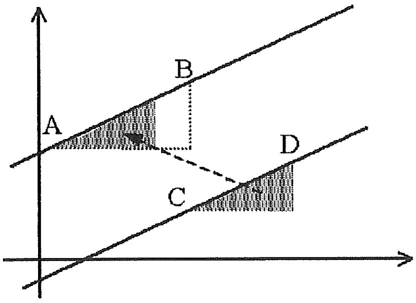
Le **coefficient directeur**, appelé également **pente**, d'une droite d = (AB) non parallèle à l'axe des ordonnées est le nombre m défini par :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Il convient bien sûr de s'assurer que si C et D sont deux autres points définissant la même droite d, on a l'égalité des rapports $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$
Cela résulte du théorème de Thalès après que l'on ait fait glisser le triangle CDE le long de la droite jusqu'à ce que C coïncide avec A.



D'un point à un autre de la droite d, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est donc constant. En réalité ce rapport est encore le même sur toute droite d' parallèle à d comme permet de le comprendre le dessin ci-contre (mais ce coefficient prend bien sûr une autre valeur sur une sécante à d). Le coefficient directeur de droite d caractérise donc la direction de la droite d.



En résumé :

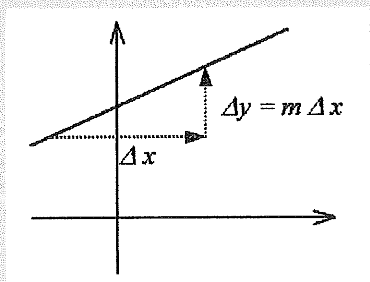
- Si A et B sont deux points du plan d'abscisses distinctes, la droite (AB) a pour coefficient directeur le nombre m défini par :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

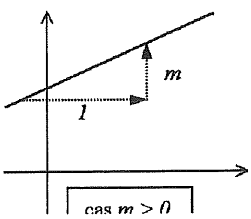
- Deux droites (non parallèles à l'axe des ordonnées) sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur. Il existe donc une seule droite passant par un point donné et de coefficient directeur donné.

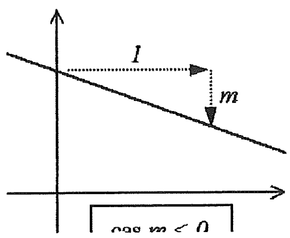
- D'un point à un autre d'une droite de coefficient directeur m, nous avons toujours :

$$\Delta y = m \ \Delta x$$



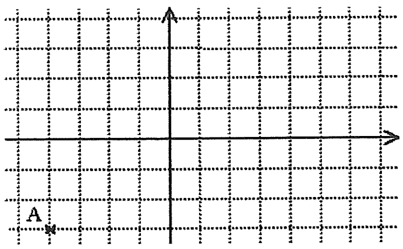
La relation $\Delta y = m \ \Delta x$ conduit à $\Delta y = m$ lorsque $\Delta x = 1$. Le coefficient directeur m indique donc en particulier de combien on s'élève ou s'abaisse sur la droite lorsqu'on s'y déplace de +1 en abscisse .



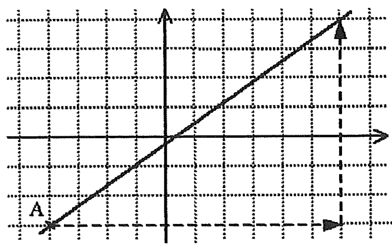


Exercices corrigés

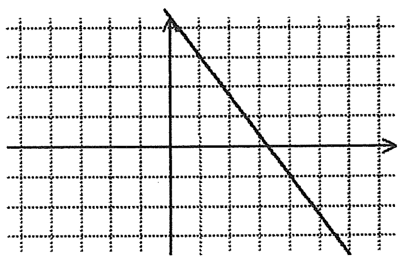
Tracer la droite de coefficient directeur m = 0,7 passant par le point A ci-dessous



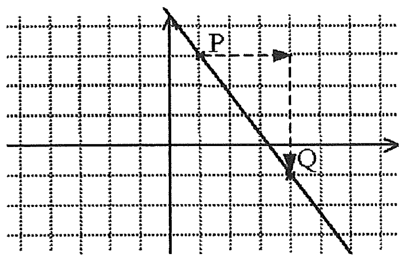
Je choisis à partir de A un écart en abscisse $\Delta x = 10$. Pour obtenir un second point de la droite, l'écart en ordonnée correspondant Δy doit valoir $0{,}7 \times 10$, c'est-à-dire 7.



Déterminer le coefficient directeur m de la droite ci-dessous



Je cherche deux points de la droite dont les écarts en abscisse et en ordonnées me paraissent simples à lire, Ici, j'ai sélectionné les points P et Q. On a $\Delta x = 3$ et $\Delta y = -4$ donc la droite a un coefficient directeur m égal à $-\frac{4}{3}$.



Calculer le coefficient directeur m de la droite passant par les points A(-10;13) et B(5;53).

De A à B, nous avons $\Delta x = 5 - (-10)$ soit $\Delta x = 15$ et $\Delta y = 53 - 13$ soit $\Delta y = 40$. Le coefficient directeur m de la droite (AB) est donc égal à $\frac{40}{15}$ soit $\frac{8}{3}$.

Sur la droite (AB) précédente, on considère le point M d'abscisse égale à 2. Calculer l'ordonnée du point M.

De A à M la variation en abscisse est $\Delta x = 2 - (-10)$ soit $\Delta x = 12$. La droite ayant un coefficient directeur de $\frac{8}{3}$, la variation en ordonnée de A à M vaut $\Delta y = \frac{8}{3} \times 12$ soit $\Delta y = 32$. Ainsi $y_M = y_A + 32$, d'où $y_M = 45$.

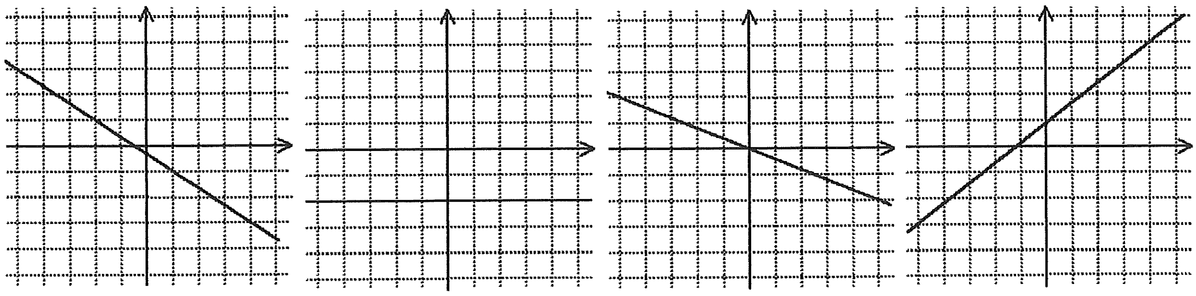
Le point N de coordonnées (50;174) est il sur la droite (AB)?

Il suffit de calculer le coefficient directeur m' de la droite (AN) et de le comparer à celui de la droite (AB).

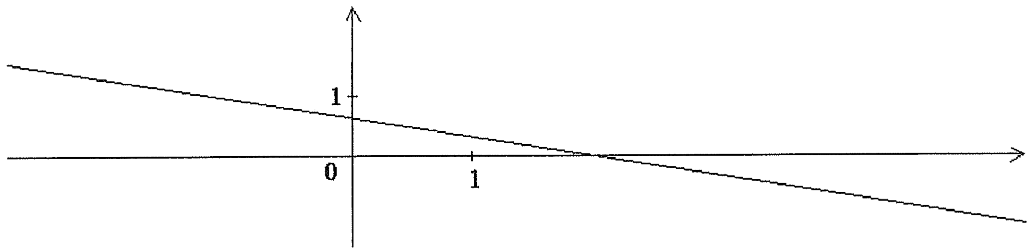
On a : $m' = \frac{174 - 13}{50 - (-10)}$ soit $m' = \frac{161}{60}$. Ce nombre est distinct de $\frac{8}{3}$ (bien que très proche puisque $\frac{8}{3} = \frac{160}{60}$). Nous pouvons donc conclure que N n'est pas situé sur la droite (AB).

Exercices

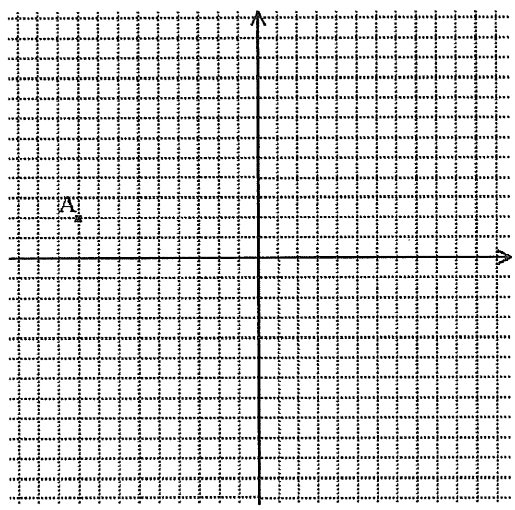
1. Calculer le coefficient directeur de chaque droite ci-dessous en faisant apparaître sur la figure les points utilisés pour faire le calcul.



2. Estimer, avec la meilleure précision possible, le coefficient directeur m de la droite ci-dessous

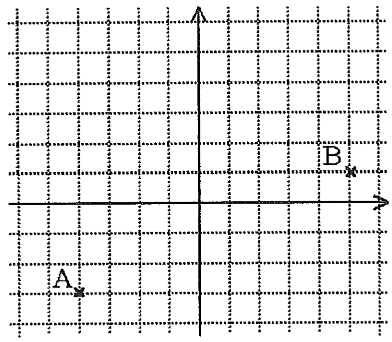


3. En se servant uniquement du quadrillage figurant sur le dessin ci contre, tracer les droites d_1, d_2, d_3, d_4 passant par le point A de coefficient directeur respectif $0{,}3$ $-\frac{10}{3}$, $\frac{3}{7}$ et $-\frac{7}{3}$.



4. Soit A et B les points de cordonnées respectives (2 ; 1) et (5 ; 7).
Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).
Soit R le point d'abscisse 4 sur la droite (AB). Calculer la variation en abscisse Δx de A à R.
En déduire la variation en ordonnée Δy correspondante, puis l'ordonnée de R.
Même question pour S d'abscisse -1, puis T d'abscisse 50.
Soit C le point de coordonnées (10 ; 20). Dire pourquoi ce point n'est pas sur la droite (AB).
Soit Q le point de coordonnées (98 ; 193). Calculer le coefficient directeur de la droite (AQ).
Que peut-on en déduire pour le point Q ?

5. Tracer la droite passant par A dont la pente est double de celle de la droite (AB) et la droite passant par B dont la pente vaut la moitié de celle de la droite (AB). Déterminer par lecture sur le graphique puis par un calcul les coordonnées x et y de leur point d'intersection.

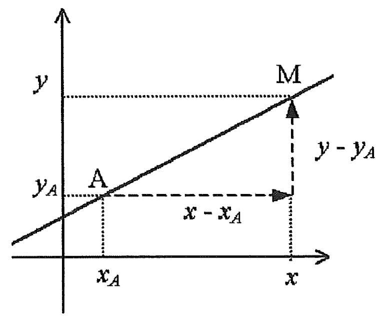


3. Equation d'une droite dans un repère.

Nous distinguons deux problèmes.

Former une équation d'une droite connue par l'un de ses points $A(x_A, y_A)$ *et son coefficient directeur m.*

Un point M distinct de A, de coordonnées (x, y) est sur cette droite si et seulement si la droite (AM) admet m pour coefficient directeur, ce qui se traduit par la relation $\frac{y-y_A}{x-x_A}=m$ ou encore $y-y_A=m(x-x_A)$, relation qui a l'avantage sur la précédente d'être aussi vérifiée par les coordonnées du point A.



En résumé :

Une **équation** de la droite de coefficient directeur m passant par le point A est

$$y-y_A=m(x-x_A).$$

En particulier une équation de la droite de coefficient directeur m passant par l'origine du repère est

$$y=mx$$

Lorsque le coefficient directeur m et les coordonnées de A sont connus numériquement, l'usage veut que l'on développe et réduise le second membre. Par exemple, la droite de coefficient directeur 0,8 qui passe par le point de coordonnées (1 ; 2) a pour équation :

$$y-2=0{,}8(x-1),$$

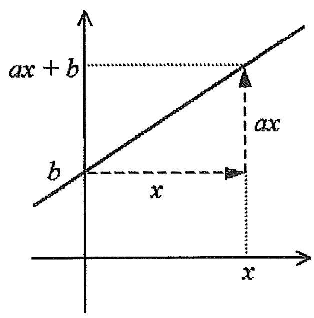
ce que l'on écrira sous la forme :

$$y=0{,}8x+1{,}4.$$

Cette dernière équation est appelée **l'équation réduite** de la droite.

Identifier les points vérifiant une relation du type $y=ax+b$.

Il suffit d'écrire la relation sous la forme $y-b=a(x-0)$ pour reconnaître d'après ce qui précède la droite de coefficient directeur a passant par le point A de coordonnées $(0, b)$.



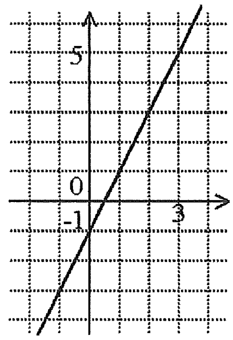
Exemples

Trouver l'équation réduite de la droite passant par les points A et B de coordonnées respectives (-3 ; 1) et (5 ; 17).

Cette droite a pour coefficient directeur le nombre $m = \dfrac{17-1}{5-(-3)} = 2$. En utilisant le fait qu'elle passe par A(-3 ; 2), il vient pour équation cartésienne : $y - 1 = 2(x-(-3))$. D'où son équation réduite : $y = 2x + 7$.

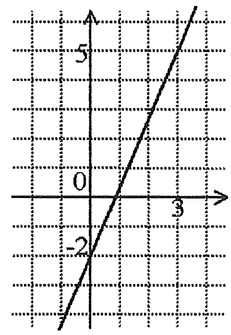
Tracer l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x;y) vérifient : $y = 2x - 1$

Nous savons que c'est une droite de coefficient directeur égal à 2. Le point A d'abscisse 0 de cette droite admet (-1) pour ordonnée. D'où le tracé cherché, que nous aurions également pu obtenir en cherchant un second point B de la droite, par exemple celui d'abscisse 3. Son ordonnée vaut $2 \times 3 - 1$, c'est-à-dire 5.



Tracer l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x;y) vérifient : $y = \dfrac{7}{3}x - 2$

C'est une droite et nous la déterminons par 2 points dont les coordonnées sont aisément calculables : le point A d'abscisse 0, son ordonnée vaut -2 et le point B d'abscisse 3, dont ordonnée vaut $\dfrac{7}{3} \times 3 - 2$, c'est-à-dire 5.



Dire pourquoi les droites d'équation réduite $y = 0{,}4x - 5$ *et* $y = 2x + 3$ *sont sécantes*

Ces droites n'ont pas même pente (0,4 pour l'une et 2 pour l'autre), elles ne sont donc pas parallèles.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites précédentes.

Leur point d'intersection a une abscisse x et une ordonnée y qui vérifient les deux relations $y = 0{,}4x - 5$ et $y = 2x + 3$. Donc x vérifie l'égalité

$$0{,}4x - 5 = 2x + 3$$

Ce qui équivaut à

$$1{,}6x = -8$$

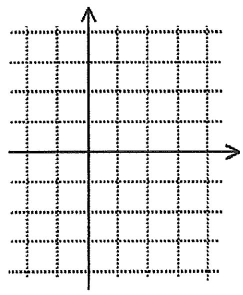
d'où

$$x = -5 \ .$$

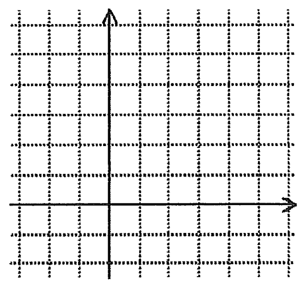
En reportant cette valeur de x dans l'une ou l'autre des relations $y = 0{,}4x - 5$ ou $y = 2x + 3$, on doit, s'il n'y a pas eu d'erreur de calcul, trouver le même nombre, qui est l'ordonnée du point cherché. On trouve ici $y = -7$.

Exercices

1. Tracer la droite d de pente 3 passant par l'origine du repère et la droite d' parallèle à d passant par le point A(0 ;-2) puis déterminer l'équation réduite de chacune de ces droites.



2. Tracer la droite d d'équation $y = \frac{3}{5}x + 2$ puis la droite δ parallèle à d et passant par l'origine du repère. Donner l'équation réduite de la droite δ.



3. Déterminer l'équation réduite de la droite d de pente 0,7 passant par le point A (3 ; -5), puis celle de la droite d' parallèle à d passant par le point B de coordonnées (-2 ; 1).

4. Quelle particularité présentent toutes les droites du plan dont l'équation réduite est de la forme $y = 0{,}5x + b$?
De même, quelle particularité présentent toutes les droites du plan dont l'équation réduite est de la forme $y = ax + 2$?

5. Soit les points A(-2 ;-1), B(2 ;5), C(7 ;-2), D(-1 ;-3). Déterminer les coordonnées du point d'intersection des diagonales du quadrilatère ABCD.

6. Vérifier, en les plaçant dans un repère, que les points dont les coordonnées sont consignées dans le tableau ci-dessous sont presque alignés.

	A	B	C	D	E
x	1	2	3	4	5
y	- 0,4	1,1	2,5	3,8	5,4

Tracer une droite ajustant "au mieux" cette série de points et en donner l'équation réduite.

4. Fonctions affines.

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, une **fonction affine** est une fonction donnée par une expression de la forme

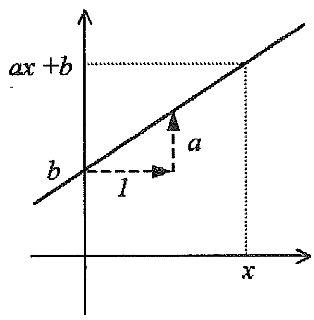
$$f(x) = ax + b \text{ (a et b sont deux constantes)}.$$

Dans le cas particulier où b est nul c'est à dire quand la fonction f est définie par une expression du type $f(x) = ax$, on dira plus précisément que f est une **fonction linéaire**.

Par exemple, la fonction définie par $f(x) = 2x - 3$ est affine. Il en va de même de celle définie par $f(x) = 2(x-4) - 5(2x + 1002)$ puisque son expression peut se réduire en $f(x) = -8x - 5018$.

Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ dans le plan rapporté à un repère est par définition l'ensemble de tous les points M(x, y) du plan dont l'ordonnée y est liée à l'abscisse x par la relation $y = ax + b$. Il s'agit donc d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.



Pour la tracer, il suffit d'en déterminer deux points ou bien d'observer que cette droite passe par le point de coordonnées (0 ; b) et admet le nombre a pour coefficient directeur.

En particulier la représentation graphique de la fonction linéaire définie par $f(x) = ax$ est la droite passant par l'origine du repère et de coefficient directeur a.

Caractérisation des fonctions affines par leur taux d'accroissement

Lorsque x varie de Δx, la grandeur $y = f(x) = ax + b$ varie de $\Delta y = a\Delta x$.
En effet :

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= (a(x + \Delta x) + b) - (ax + b)\\ &= a\Delta x\end{aligned}$$

Il en résulte que le taux d'accroissement $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ d'une fonction affine entre deux valeurs de la variable est constant et ceci **caractérise** les fonctions affines.

Supposons en effet qu'une fonction f soit telle que, calculé entre deux valeurs quelconques de la variable, son taux d'accroissement prenne toujours la même valeur a. Un nombre x_0 étant fixé, on doit donc avoir pour tout autre nombre x :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

d'où :

$$f(x) = ax + (f(x_0) - ax_0)$$

ce qui montre bien que la fonction est affine.

Sens de variation

Si Δx est positif, la relation $\Delta y = a\Delta x$ montre que Δy est du signe de a.

La fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ est donc strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$ (ce qui était prévisible au vu de sa représentation graphique).

Signe

Si a n'est pas nul, la fonction définie par $f(x) = ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ et $f(x)$ est du signe de a pour $x > -\frac{b}{a}$, du signe de $-a$ pour $x < -\frac{b}{a}$.

Cela résulte de ce qui précède.

Exercices corrigés

Peut-on trouver (et si oui donner son expression) une fonction affine g dont un relevé de valeurs est :

x	-4	1	4	8
g(x)	30	100	142	198

Si une telle fonction affine g existe, son taux d'accroissement entre 1 et une valeur quelconque x de la variable doit être égal, par exemple, au taux d'accroissement entre 1 et 4, ce qui conduit à :

$$\frac{g(x) - 100}{x - 1} = \frac{142 - 100}{4 - 1}$$

et donc à :

$$g(x) = 14x + 86.$$

On vérifie aisément que la fonction affine donnée par cette expression admet bien le relevé de valeurs ci-dessus.

Peut-on trouver (et si oui donner son expression) une fonction affine f dont un relevé de valeurs est :

x	-5	1	4	8
f(x)	30	100	135	178

On peut procéder comme précédemment : la phase de vérification conduit alors à répondre non à la question. Mais on peut aussi dire que si une telle fonction affine existe, son taux d'accroissement calculé entre deux valeurs quelconques de la variable est toujours le même. Nous constatons ici que

entre 1 et 4, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{135 - 100}{4 - 1} = \frac{35}{3}$

entre 1 et 8, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{178 - 100}{8 - 1} = \frac{78}{7}$

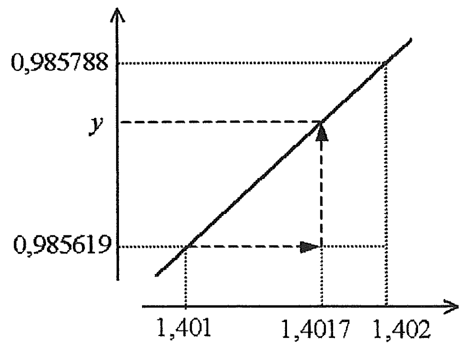
Les fractions $\frac{35}{3}$ et $\frac{78}{7}$ n'étant pas égales, nous concluons que la réponse est non.

Une table de la fonction sinus donne les valeurs suivantes :

$\sin(1,401) \approx 0,985619$ et $\sin(1,402) \approx 0,985788$

*En approchant la fonction sinus par une fonction affine sur l'intervalle $[1,401;1,402]$, donner une estimation de $\sin(1,4017)$ (le procédé est appelé **interpolation affine**). Comparer la valeur trouvée avec celle que donne votre calculatrice.*

La fonction affine f qui prend respectivement les valeurs 0,985619 et 0,985788 en 1,401 et 1,402 prend en 1,4017 une valeur y telle que son taux d'accroissement entre 1,401 et 1,4017 soit le même qu'entre 1,401 et 1,402, ce qui conduit à :



$$\frac{y - 0,985619}{1,4017 - 1,401} = \frac{0,985788 - 0,985619}{1,402 - 1,401},$$

et donc à

$$y = 0,985619 + \frac{7}{10} \times 0,000168 = 0,9857366$$

alors que la calculatrice donne , avec 6 chiffres derrière la virgule :

$$\sin 1,4017 = 0,985737.$$

On mesurera la qualité de l'approximation obtenue.

Exercices

1. Indiquer par leurs numéros les quadrants du plan traversés par la représentation graphique des fonctions affines définies par :

a. $f(x) = 2x - 3$

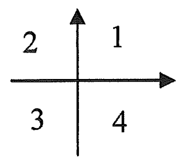
b. $f(x) = -0.01x - 431$

c. $f(x) = 2000x + 0.3$

d. $f(x) = -5$

e. $f(x) = -x + 0.1$

f. $f(x) = 10(x - 3) + 7(x - 1)$

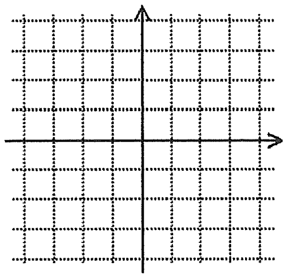


---

2. Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $-3x + 5$ et celui de $4x - 7$ En déduire suivant les valeurs de x le signe de $(-3x + 5)(4x + 7)$.

---

3. Une fonction linéaire f est telle que $f(3)=2$.
Représenter graphiquement f dans le repère ci contre et donner l'expression de f(x).



Faire de même avec la fonction affine g qui vérifie
$g(0)=-1$ et $g(1)=2$.

4. Peut-on trouver (et si oui donner son expression) une fonction affine g dont un relevé de trois valeurs est :

x	-1	7	11
g(x)	2	4	5

Même question avec le relevé de valeurs suivant :

x	-1	7	11
g(x)	2	4	6

5. Donner par interpolation affine une estimation de ln (25,3) sachant qu'une table donne ln(25) $\approx 3{,}2189$ et ln(26) $\approx 3{,}2581$. Comparer la valeur trouvée avec celle que donne votre calculatrice.

6. Donner la valeur exacte de $\sqrt{144}$ et de $\sqrt{169}$. En déduire par interpolation affine une estimation avec un chiffre derrière la virgule de $\sqrt{150}$. Comparer la valeur trouvée avec celle que donne votre calculatrice.
Trouver de même par une interpolation affine judicieuse une estimation de $\sqrt{200}$. En déduire une estimation avec deux chiffres derrière la virgule de $\sqrt{2}$. Comparer la valeur trouvée avec celle que donne votre calculatrice.

5. Lois linéaires.

Lorsque le physicien (l'astronome, le biologiste, l'économiste...) observe que deux grandeurs sont liées, il cherche une formule "mathématique" permettant de traduire cette dépendance. Cette loi permet alors de prévoir la valeur de l'une des grandeurs quand on connaît l'autre.

On constate par exemple que l'allongement d'un ressort auquel on a accroché un objet de masse m est proportionnel à m. Sa longueur l est donc donnée par la formule $l = l_0 + km$ où l_0 désigne sa longueur à vide et où k est une constante qui dépend du ressort (appelée constante de raideur du ressort).

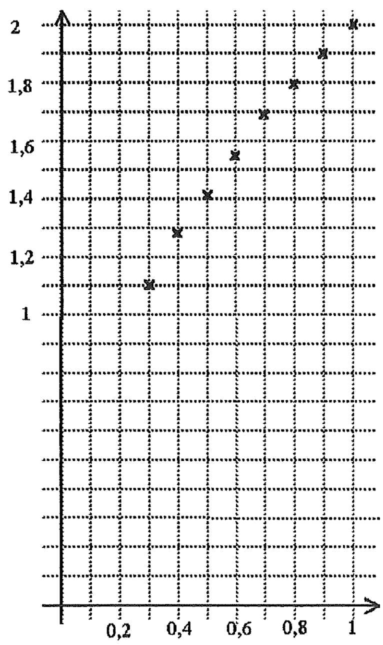
Les relations les plus simples entre deux grandeurs x et y sont celles du type $y = ax$ ou plus généralement du type $y = ax + b$. Nous parlerons alors de **dépendance linéaire** ou de **loi linéaire.**

Ce qui caractérise les lois linéaires (et en fonde d'ailleurs l'appellation), c'est qu'en reportant dans le plan muni d'un système d'axes la série de points associée à un relevé expérimental des valeurs conjointes des grandeurs x et y, on obtient une famille de points alignés (aux erreurs de mesure près, bien entendu)

Etude d'un exemple

Nous avons consigné ci-dessous quelques observations concernant la période *T* des petites oscillations d'un pendule (formé d'une bille en acier d'une masse de 50g suspendue à un fil) en fonction de sa longueur *L* (la précision obtenue pour *T* résulte d'une moyenne faite à chaque fois sur 20 oscillations).

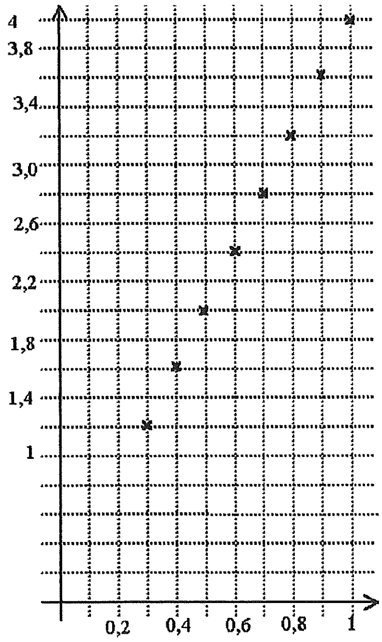
L (en m)	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
T (en s)	1,1	1,27	1,41	1,55	1,68	1,79	1,9	2



Les points correspondants ne sont visiblement pas alignés. Nous concluons que *T* ne dépend pas linéairement de *L*. Mais on peut supposer, au vu du graphique obtenu qui a l'allure d'un arc de parabole, que c'est vraisemblablement T^2 qui dépend linéairement de *L*.

Calculons alors le carré des périodes :

L	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
T^2	1,21	1,61	1,99	2,40	2,82	3,20	3,61	4



On constate cette fois que la droite passant par l'origine et de coefficient directeur 4 ajuste bien la série de points associée à ce tableau, ce qui conduit à proposer $T^2 \approx 4L$ ou $T \approx 2\sqrt{L}$ comme formule approchée.

D'autres relevés expérimentaux confirmeraient cette formule, et ceci indépendamment de la masse m de la bille suspendue à la ficelle. Mais il suffit de modifier artificiellement le champ de la pesanteur (en faisant par exemple passer la bille d'acier dans le champ d'un aimant) pour observer une modification de la constante de proportionnalité entre T et $\sqrt{L}$.
Une étude théorique montre en réalité que, pour de petites oscillations : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ où g est l'intensité du champ de la pesanteur (sur terre, $g \approx 9{,}81 \text{ ms}^{-2}$).

Exercices

1. Le tableau suivant consigne la pression p enregistrée à différents niveaux z de profondeur d'un lac.

z (en m)	0	5	10	15	20	25	30
P (en Pascal)	10^5	$1{,}48\times10^5$	$2{,}05\times10^5$	$2{,}51\times10^5$	$2{,}98\times10^5$	$3{,}49\times10^5$	$4{,}03\times10^5$

Représenter graphiquement ce relevé de mesures. Peut-on parler d'une dépendance linéaire entre la profondeur et la pression ? Si oui donner une formule approchée exprimant p en fonction de z.

---

2. L'évolution de la tension U (en volts) aux bornes d'une pile en fonction de l'intensité I (en ampères) du courant qu'elle débite est donnée par la formule $U = E - rI$ où E désigne la force électromotrice de la pile et r sa résistance interne. Déterminer graphiquement une valeur approchée "au mieux" de la force électromotrice et de la résistance interne d'une pile pour laquelle on a les résultats de mesure ci-dessous.

I	0,010	0,020	0,030	0,040	0,060	0,080	0,100	0,130	0,160	0,200	0,250	0,300
U	4,49	4,47	4,45	4,43	4,39	4,36	4,32	4,27	4,22	4,15	4,06	3,97

3. Le tableau suivant consigne pour les différentes planètes du soleil, la période de révolution T et le demi grand axe a de l'ellipse qu'elles parcourent.

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
a (en 10^8km)	0,58	1,08	1,49	2,28	7,78	14,3	28,7	45	59,1
T (en 10^3h)	2,11	5,38	8,76	16,49	104,31	258,60	737,22	1444,64	2171,34
T en jours ou ans	88j	224j	365j	687j	11,9ans	29,5ans	84,1ans	164,8ans	247,7ans

Pourquoi est-il peu raisonnable de vouloir représenter *toutes* ces données sur un même graphique? Justifier cependant que T et a ne sont certainement pas liés par une loi linéaire.
Faire un tableau contenant les puissances de a et de T jusqu'à un exposant égal à trois (on pourra utiliser un tableur). Montrer qu'il existe deux entiers m et n tels que T^m soit (aux approximations de mesure près) proportionnel à a^n (ce résultat est la troisième loi formulée par KEPLER concernant la révolution des planètes autour du soleil).

---

4. Rappelons que lors de la décharge d'un condensateur dans un circuit comportant une résistance R, la loi d'évolution de la tension U aux bornes du condensateur en fonction du temps t est exponentielle : $U = U_0\, exp(-\frac{t}{RC})$ où C désigne la capacité du condensateur.
Un condensateur que l'on a déchargé dans une résistance de 1 méga ohm a donné lieu aux mesures suivantes :

t (en s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U (en V)	100	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5

Vérifier graphiquement que la loi n'est effectivement pas une loi linéaire.
Former le tableau conjoint de t et de lnU et placer dans un repère les points associés. En déduire une valeur approchée "au mieux" de la capacité de ce condensateur.

B

Fonctions trinômes du second degré

Fonctions trinômes du second degré

Les fonctions trinômes du second degré sont définies par une expression du type $ax^2 + bx + c$ *où* $a \neq 0$. *En abrégé, nous parlerons ici de fonctions trinômes.*

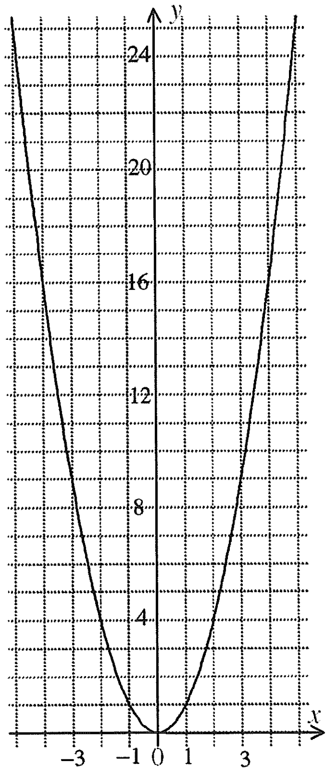
Les courbes représentatives de ces fonctions sont des paraboles. Nous remarquerons (l'explication fait l'objet du 4.) qu'elles sont toutes semblables à celle de la plus simple des fonctions trinômes : la fonction carré, définie pour tout nombre réel x *par* $f(x)= x^2$, *qui est étudiée au paragraphe 1.*

Les objectifs à atteindre sont de pouvoir ***rapidement*** *donner l'allure de la parabole à partir de quelques informations données sur une fonction trinôme ou réciproquement de retrouver une expression de la fonction et certaines de ses propriétés à partir de sa courbe.*

Table des matières

1 Définition et propriétés globales de la fonction carré

1.1 Définition



On appelle fonction carré la fonction qui à tout nombre réel x associe son carré x^2.

Dans ce chapitre on désignera parfois par f cette fonction.

Sa courbe représentative est une parabole de sommet O ([1]).

1.2 Sens de variation

La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On a pour tous nombres réels a et b distincts :

$$a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b).$$

Cette quantité est du signe de $a - b$ si a et b sont positifs (et du signe contraire de celui de $a - b$ si a et b sont négatifs).

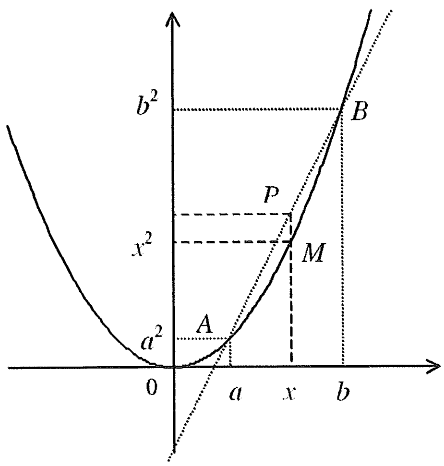
1.3 Symétrie

La fonction carré est paire, l'axe des ordonnées est donc axe de symétrie de sa courbe représentative.

On a pour tout nombre réel x : $(-x)^2 = x^2$.

1.4 Convexité

Pour tous nombres réels positifs a et b l'arc de la courbe ayant pour extrémités $A(a, a^2)$ et $B(b, b^2)$ est au dessous du segment AB. On dit que la fonction carré est convexe.



Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et x tel que $a \leq x \leq b$.
Le point P d'abscisse x du segment AB a pour ordonnée :

$$a^2 + \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) = a^2 + (a + b)(x - a)$$

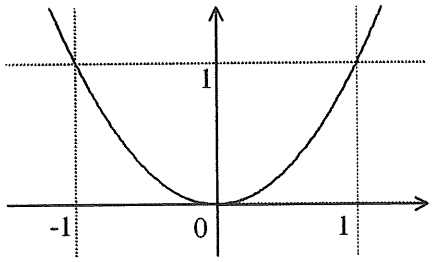
La différence $x^2 - \left(a^2 + (a+b)(x-a)\right)$ se factorise en $(x-a)(x-b)$. Elle est donc négative, ce qui prouve que P est au dessus du point M d'abscisse x de la parabole.

[1] Les paraboles sont des courbes définies à partir de propriétés géométriques. On peut démontrer que la courbe de la fonction carré en est bien une. Les courbes qui s'en déduisent par homothétie sont aussi des paraboles.

2 Propriétés locales de la fonction carré

2.1 Etude au voisinage de 0

Pour mieux visualiser le comportement de la fonction près de 0, on peut « zoomer » et représenter, comme ci-contre, la partie de la courbe relative à x variant entre –1 et 1.



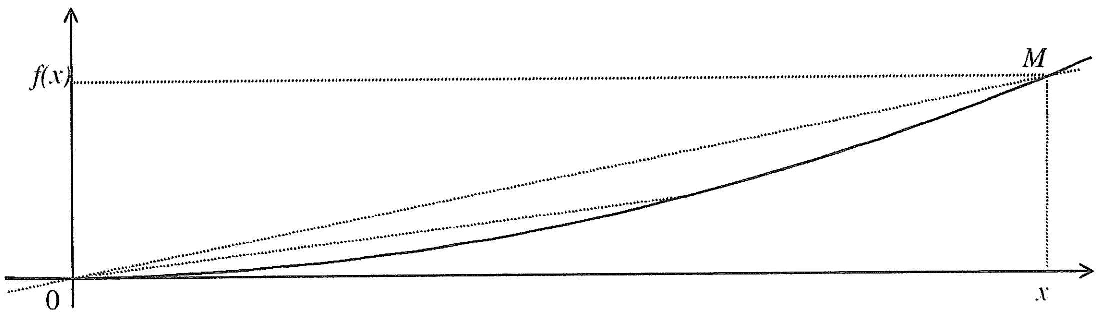
On a le tableau de valeurs :

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001	....	0
x^2	1	0.25	0.01	0.0001	0.000001	....	0

Quand x tend vers 0, x^2 tend vers 0.

Pour $|x| \leq 1$, on a, en multipliant par $|x|$, $x^2 \leq |x|$ et on en déduit le résultat.

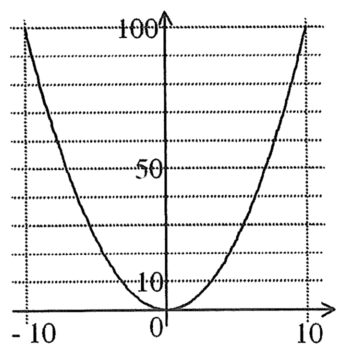
D'autre part, on a aussi $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x} = x$. Comme il apparaît sur le graphique ci-dessous, quand x devient très petit, la droite passant par l'origine et le point de coordonnées $(x, f(x))$ se rapproche de l'axe Ox. Donc la courbe de f admet la droite Ox pour tangente à l'origine.



Nous retiendrons aussi que, lorsque x est voisin de 0, x^2 est négligeable par rapport à x, car le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

2.2 Etude pour les grandes valeurs de x

Pour pouvoir représenter de manière lisible la courbe représentative de la fonction carré sur un intervalle tel que $[-10;10]$, nous sommes conduits à prendre des unités différentes sur les deux axes.



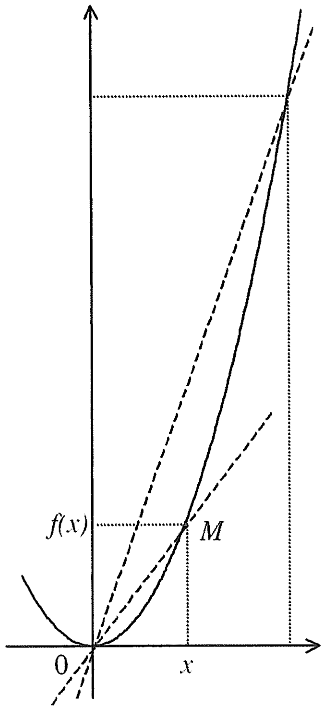
Quand x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$.

Si $x \geq 1$, on a, en multipliant par x, $x^2 \geq x$ et on en déduit le résultat.

Sur le graphique, on peut tracer la droite passant par l'origine et le point de coordonnées $(x, f(x))$.

Quand x devient très grand, cette droite se rapproche de la droite Oy. En effet, non seulement $f(x)$ devient très grand, mais son rapport à x, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x} = x$ le devient aussi.

Quand x tend vers $+\infty$, x^2 est prépondérant par rapport à x (autrement dit, x est négligeable devant x^2).



2.3 Etude au voisinage de a : nombre dérivé en a de la fonction carré

Etude au voisinage de 1

Quel que soit le nombre réel h : $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$

Lorsque h tend vers 0, h^2 est négligeable devant h.
On retiendra donc l'approximation du premier ordre :

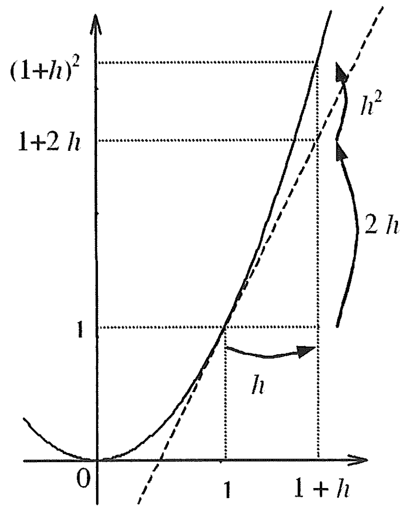
$$(1+h)^2 \simeq 1 + 2h \text{ quand } h \text{ est voisin de } 0.$$

L'écriture $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$ permet de plus d'obtenir le nombre dérivé en 1.

En effet, pour tout nombre réel h non nul, le taux d'accroissement de la fonction carré entre 1 et $1+h$ est :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 + h$$

Quand h tend vers 0, ce taux d'accroissement admet pour limite 2 ; autrement dit la fonction f est dérivable en 1 et son nombre dérivé est $f'(1) = 2$ (pente de la tangente).



Etude au voisinage de a

On a de même $(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$, d'où l'approximation du premier ordre au voisinage de a :

$$(a + h)^2 \simeq a^2 + 2ah \quad \text{quand } h \text{ est voisin de } 0.$$

Pour tout nombre réel h non nul, le taux d'accroissement de la fonction carré entre a et $a+h$ est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h.$$

Quand h tend vers 0, ce taux d'accroissement admet une limite qui est $2a$; autrement dit la fonction f est dérivable en a et son nombre dérivé est $f'(a) = 2a$.

On retiendra que la fonction carré est dérivable sur R et que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = 2x$.

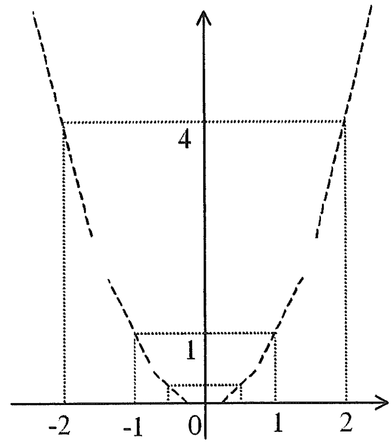
2.4 Exercices

Conseils pour les tracés de courbes

Dans certains exercices, des courbes sont à tracer.
Les fonctions dont on demande la représentation graphique sont dérivables, le tracé se fait donc de la façon la plus harmonieuse possible en épousant la tangente au voisinage du point. La main est placée à l'intérieur de la courbe et doit anticiper le tracé.

1. Dans le repère ci-contre sont indiqués des points de la parabole représentant x^2 qui ont des abscisses entre –2 et 2 ainsi que les tangentes en ces points.

   Tracer la parabole.

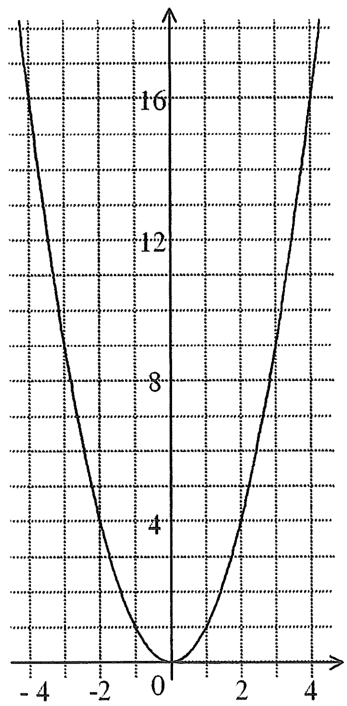


2. La deuxième figure représente la fonction carré.

   Tracer la droite D d'équation $y = 20x$.

   La droite D coupe-t-elle la parabole en un autre point que l'origine (éventuellement situé en dehors du dessin proposé) ?

   Trouver toutes les droites passant par l'origine et n'ayant que ce point en commun avec la parabole.



3. On dispose d'une feuille de papier de format 21x29,7 (c'est-à-dire de largeur 21cm et de longueur 29,7cm) sur laquelle on veut présenter la courbe représentant la fonction carré pour x variant entre -10 et 10 en prenant 1cm pour unité sur l'axe des abscisses.

   Quelle orientation de la feuille conseilleriez-vous ?

   Quelle est la position des axes la plus adaptée ?

   Quelle unité vous paraît préférable pour l'axe des ordonnées ?

3 Les fonctions ax^2 pour $a \neq 0$

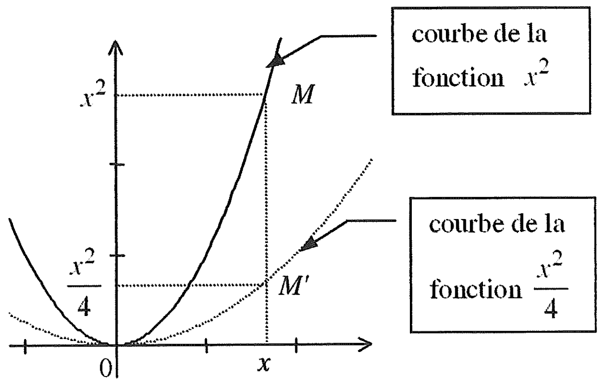
3.1 De la fonction carré aux fonctions ax^2

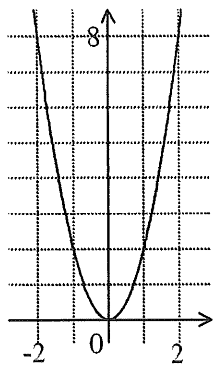
Pour $a \neq 0$, les propriétés et le tracé de la courbe de la fonction définie sur R par $f(x) = ax^2$ s'obtiennent à partir des propriétés et du tracé de la courbe de la fonction carré.

On a représenté ci-contre la construction de la courbe de la fonction définie par :

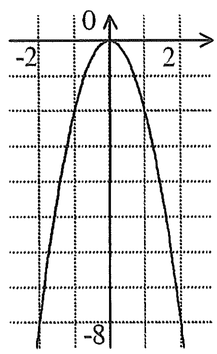
$$f(x)=\frac{1}{4}x^2$$

à partir de celle de la fonction carré.





Si $a > 0$, elle est croissante sur $[0, +\infty[$, décroissante sur $]-\infty, 0]$ et a pour minimum 0 en 0. Comme la fonction carré, cette fonction est convexe.

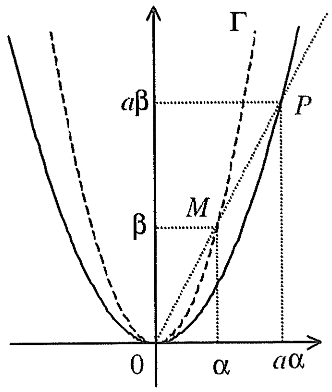


Si $a < 0$, elle est décroissante sur $[0, +\infty[$, croissante sur $]-\infty, 0]$ et a pour maximum 0 en 0. La fonction est concave.

La courbe de la fonction ax^2 est homothétique à celle de la fonction carré. C'est donc également une parabole, de sommet O (voir note en bas de page 2).

Soit Γ la courbe représentative de la fonction définie sur R par $f(x) = ax^2$.
Un point $M(\alpha, \beta)$ est situé sur Γ si et seulement si $\beta = a\alpha^2$, ou encore $a\beta = (a\alpha)^2$. Autrement dit un point $M(\alpha,\beta)$ est situé sur Γ si et seulement si le point $P(a\alpha, a\beta)$ est situé sur la courbe d'équation $y = x^2$. L'homothétie de centre O et de rapport a envoie la courbe Γ sur la parabole de la fonction carré.

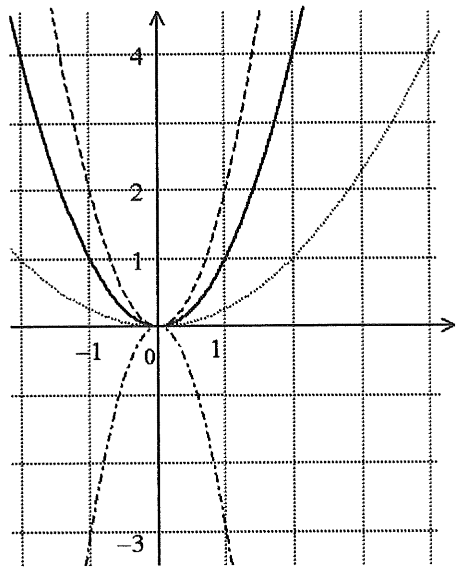
Ainsi la courbe Γ est l'image par l'homothétie de centre O et de rapport $(1/a)$ de la parabole représentant la fonction carré.



3.2 Exercices

1. Chacune des paraboles tracées ci-contre est la représentation graphique d'une fonction $f(x) = ax^2$, celle tracée en gras correspond à la fonction carré.

   Déterminer, dans chaque cas, le coefficient a correspondant.



2. Tracer la courbe représentant :
   la fonction définie par $f(x) = 3\,x^2$,
   la fonction définie par $g(x) = -\,x^2$,
   la fonction définie par $h(x) = -\,2\,x^2$.

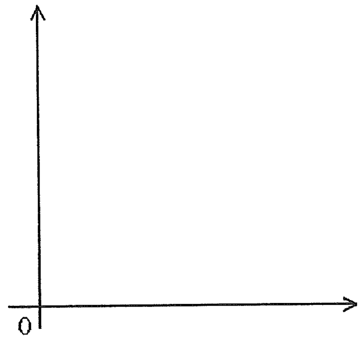
3. Tracer la courbe représentant la fonction carré sur l'intervalle [-2, 2]
   a) dans un repère orthonormé d'unité 1cm
   b) dans un repère orthogonal avec pour unité 1cm sur l'axe des x et 0,5cm sur l'axe des y.

   Dans un repère orthonormé d'unité 1cm, tracer la courbe représentant la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

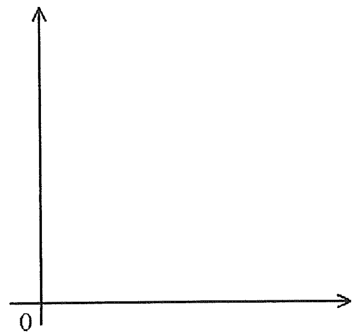
   Comparer cette courbe à celle obtenue au b).

4. Déterminer le choix des unités pour pouvoir :

a) tracer dans le système d'axes ci-contre la courbe représentant la fonction $f(x) = 0{,}001x^2$ lorsque x varie entre 0 et 5.



b) tracer dans le système d'axes ci-contre la courbe représentant la fonction $f(x) = 0{,}001x^2$ lorsque x varie entre 0 et 1000.



5. Déterminer le coefficient a sachant que la courbe représentant la fonction $f(x) = ax^2$ passe par le point de coordonnées (2, 7).

4 De la fonction carré aux fonctions trinômes

4.1 Définition

Une fonction trinôme du second degré est une fonction numérique pouvant être définie par une expression du type $ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Par exemple, sont des fonctions trinômes les fonctions définies pour tout x par :

$g(x) = 2\,x^2 + 1$,

$h(x) = (x - 1)(x - 2)$ car elle peut s'écrire aussi $h(x) = x^2 - 3x + 2$

$k(x) = 2(x - 1)^2 + 3(x - 1) + 1$ pour laquelle on a également $k(x) = 2\,x^2 - x$.

La dérivée de f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est $f\,'(x) = 2ax + b$. Ceci peut permettre d'étudier de manière classique les variations d'une telle fonction, cependant nous allons voir comment déduire de la connaissance de la fonction carré toutes les propriétés d'une fonction trinôme.

4.2 Propriétés globales

Nous expliquons ici pourquoi la courbe représentative d'une fonction trinôme quelconque est de forme semblable à celle de la fonction carré.

Réduction sous forme canonique

Soit par exemple la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$. L'idée est de faire disparaître le terme "en x ". Successivement, on a pour tout nombre réel x :

$f(x) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$ après mise en facteur du coefficient de x^2

$f(x) = 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right)$ car on reconnaît dans le terme $x^2 + \frac{3}{2}x$ le début du développement de $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$

$f(x) = 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right)$ [2]

Cette expression fait apparaître la différence de deux termes dont un seul varie avec x.

De manière générale, on veut obtenir une expression du type :

$$f(x) = a\left[(x + ❁)^2 - \Theta\right]$$

En reprenant la démarche utilisée sur l'exemple précédent, on obtient :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

.

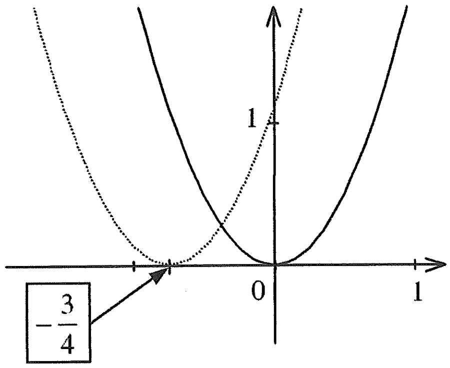
Dans cette forme, dite canonique, de $f(x)$, est mise en évidence une différence de deux expressions dont seule, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, varie en fonction de x.

[2] Après un tel calcul, on effectue un contrôle numérique du type $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2\left(\left(1 + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right)$

Comment placer la courbe ?

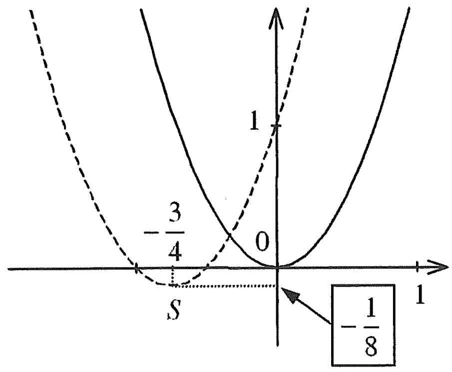
Revenons à l'exemple traité ci-dessus : $f(x)= 2x^2+3x+1 = 2\left(\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}\right)$.

On en tire : $f(x)= 2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$.



On considère d'abord la fonction $2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2$: sa courbe se déduit de celle de $2x^2$ par la translation de vecteur $-\dfrac{3}{4}\vec{i}$

On obtient ensuite la courbe de $2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$ par translation de vecteur $-\dfrac{1}{8}\vec{j}$



Finalement, la courbe de $f(x)= 2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$ se déduit de celle de $2x^2$ par translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$ où S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{8}\right)$.

Plus généralement, considérons la fonction f définie pour tout x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où $a \neq 0$, b et c sont des réels donnés).

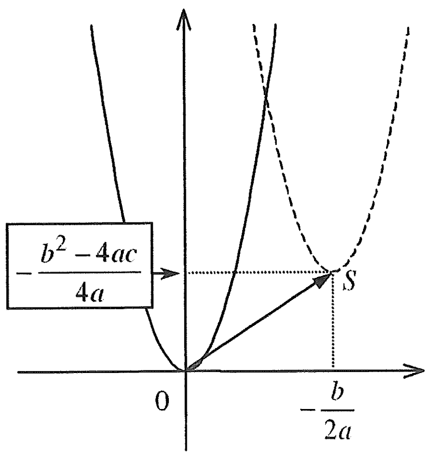
Sa forme canonique $f(x)=a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ permet d'écrire :

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

On en déduit :

La courbe représentative de f est l'image de la courbe représentant la fonction ax^2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$ où S, appelé sommet de la courbe est le point de coordonnées :

$$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$



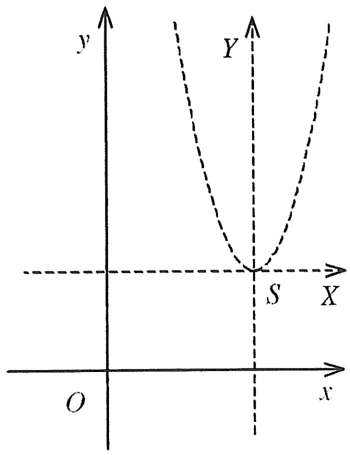
Remarque :
La courbe de f a pour équation dans le repère d'origine O :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

On peut l'écrire : $y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

En posant : $X = x + \frac{b}{2a}$ et $Y = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient :

$Y = a\,X^2$: c'est une équation de la même courbe dans le nouveau repère d'origine S, les axes étant gradués avec les mêmes unités.



Nature de la courbe

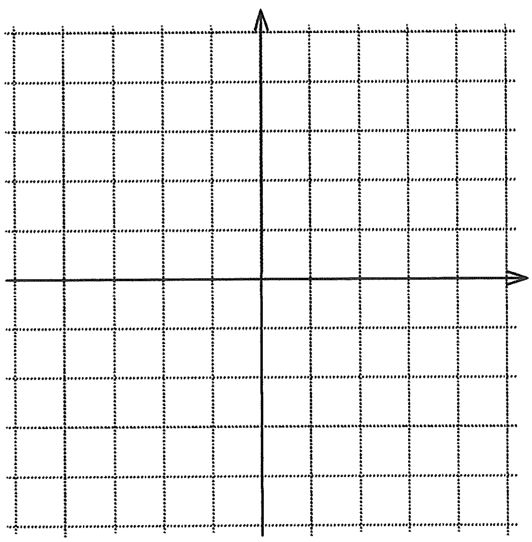
Nous avions déjà remarqué que la courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = ax^2$ se déduit de celle de la fonction carré à l'aide d'une homothétie. La courbe associée à une fonction trinôme s'obtient donc à partir de celle de la fonction carré par une homothétie suivie d'une translation. C'est donc aussi une parabole.

Connaissant l'allure de la courbe représentative d'une fonction trinôme, peu d'informations seront nécessaires pour réaliser un assez bon tracé de la courbe.

4.3 Exercices

1. Soit C la courbe représentant $f(x) = (x+2)^2 - 3$. Indiquer la translation permettant d'obtenir cette courbe à partir de celle de la fonction x^2. Tracer alors rapidement la courbe C.

2. De même, déterminer le sommet et tracer rapidement dans le repère ci-contre les courbes représentant les applications suivantes :
   $f(x) = -x^2$;
   $g(x) = 4x^2$;
   $h(x) = (x+3)^2$;
   $k(x) = -(x+3)^2$;
   $l(x) = (x+3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 5$;
   $m(x) = x^2 + 4x + 5$.



3. Déterminer la forme canonique des fonctions trinômes définies par :

   $f_1(x) = x^2 + 2x - 1$;
   $f_2(x) = x^2 - 2x - 1$;
   $f_3(x) = 4x^2 - 4x - 1$;
   $f_4(x) = -2x^2 + x - 3$;

   Déterminer les sommets et tracer les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4.

   Puis discuter suivant les valeurs de x le signe de : $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$.

Exercice corrigé

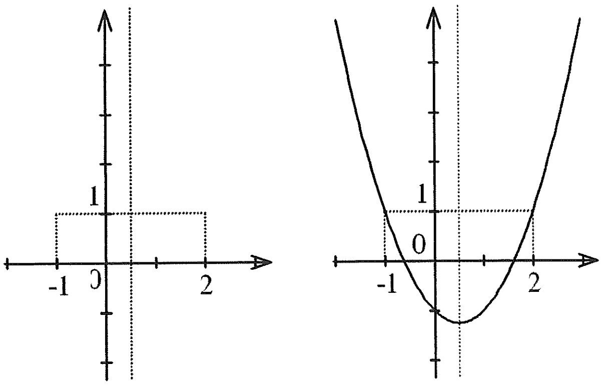
Placer (sans passer par la forme canonique) la courbe représentative de la fonction :

$$g(x) = (x - 2)(x + 1) + 1.$$

La fonction g est une fonction trinôme, sa courbe représentative est donc une parabole.

On voit facilement que lorsque x tend vers l'infini, $f(x)$ tend vers $+\infty$, ce qui permet de savoir que son sommet correspond à un minimum.

Plutôt que de déterminer d'abord son minimum, notons qu'en –1 et 2 la fonction prend la valeur 1.



L'axe de symétrie de la courbe représentant g admet donc pour équation $x =$ 0,5.

Le sommet est donc le point de coordonnées (0,5, g(0,5)).

4. Dans chacun des cas suivants, on suppose connues des informations sur la courbe représentative Γ d'une fonction trinôme du second degré f. Donner à chaque fois l'allure de la parabole, les coordonnées de son sommet, ainsi qu'une expression possible pour $f(x)$.

   a) Γ coupe l'axe des abscisses aux points (-1,0) , (1,0) et son sommet a pour ordonnée –2.

   b) Γ coupe l'axe des abscisses aux points (-3,0) , (1,0) et son sommet a pour ordonnée 3.

   c) Γ coupe la droite d'équation $y = 5$ aux points d'abscisse respectives 2, 5 et son sommet a pour ordonnée –2.

   d) Γ coupe la droite d'équation $y = 5$ aux points d'abscisse respectives 2, 5 et son sommet a pour ordonnée 6.

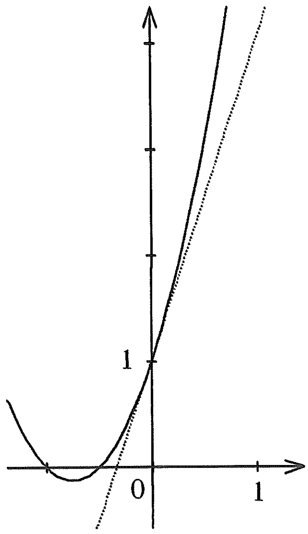
5. Déterminer les fonctions trinômes dont les courbes admettent le point de coordonnées (1, 2) pour sommet. Déterminer celle qui, de plus, passe par le point de coordonnées (2, 3).

6. Déterminer les fonctions trinômes dont les courbes admettent la droite d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie et qui passent par le point de coordonnées (2, 3).

4.4 Etude locale

Au voisinage de 0.

Etude du comportement de la fonction $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ au voisinage de 0.



Lorsque x est proche de 0, le terme prépondérant de $f(x)$ est 1 ; vient ensuite $3x$ et enfin $2x^2$; en effet, au voisinage de 0, $3x$ est négligeable devant 1 (le rapport tend vers 0) et $2x^2$ est négligeable devant $3x$ (même raison).

Il est donc préférable, lors de l'étude locale en 0, d'écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = 1 + 3x + 2x^2$ de façon que les termes soient rangés par ordre décroissant de prépondérance.

On vérifie que $f(0) = 1$ et que $f'(0) = 3$ (limite de $\dfrac{f(x)-1}{x}$ quand x tend vers 0) ; le comportement de $f(x)$ au voisinage de 0 est donc proche de celui de $1+3x$: géométriquement la courbe C de f admet au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = 1 + 3x$ comme tangente. Le signe du terme négligé, $2x^2$, donnant alors la position de C par rapport à cette tangente.

Remarque : l'écriture $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, quant à elle, est adaptée à une étude au voisinage de l'infini (grandes valeurs de x) car les termes y sont rangés par ordre décroissant de prépondérance lorsque x tend vers l'infini.

Au voisinage de a

Pour étudier de manière analogue le comportement local d'un trinôme au voisinage de a, nous transformerons l'écriture de ce trinôme pour qu'il apparaisse comme un trinôme en $(x - a)$ car $(x - a)$ est voisin de 0 lorsque x est voisin de a.

Exemple :
Etude de la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - x + 1$ au voisinage de 1.

Posons $x = 1 + h$, alors $f(1+h) = 2(h+1)^2 - (h+1) + 1 = 2 + 3h + 2h^2$.

Donc, nous obtenons l'égalité $f(x) = 2 + 3(x-1) + 2(x-1)^2$, écriture où les termes sont rangés par ordre décroissant de prépondérance lorsque x est au voisinage de 1.

Ce qui nous donne une approximation du premier ordre au voisinage de 1 : $f(x) \simeq 2 + 3(x-1)$.

Comme dans le cas précédent, l'expression $f(x) = 2 + 3(x-1) + 2(x-1)^2$ permet de voir rapidement que la droite d'équation $y = 2 + 3(x-1)$ est la tangente à la parabole au point d'abscisse 1 et d'affirmer que la courbe est au-dessus de cette tangente puisque le terme $2(x-1)^2$ est toujours positif.

Exercices :

1. On cherche une fonction trinôme dont la courbe admet la droite d'équation $y = 1 + 3x$ comme tangente au point d'abscisse 0, et passe par le point $A(2\ ;\ 2)$.
   a) Essayer de tracer une parabole vérifiant ces contraintes.
   b) Montrer qu'il existe une fonction trinôme et une seule vérifiant ces conditions.

2. Mêmes questions avec la droite d'équation $y = -x + 1$ et le point $B(2\ ;\ 3)$.

4.5 Racines et signe de $ax^2 + bx + c$

Comme précédemment, f est définie pour tout x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels donnés). Pour l'étude du signe de $f(x)$, sa mise sous forme canonique est encore une fois très utile.

Pour tout x réel, on a donc $f(x) = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$.

Suivant le signe de $b^2 - 4ac$ cette expression fait apparaître une somme ou différence de deux carrés.

On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ l'expression $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, on peut encore modifier la forme canonique de $f(x)$ pour obtenir une forme factorisée :

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Dans ce cas, f s'annule donc en deux nombres réels $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ appelées les racines du trinôme.

De plus $f(x)$ est du signe de a sur $]-\infty, x_1[$ et sur $]x_2, +\infty[$, et du signe de $-a$ sur $]x_1, x_2[$ (en supposant $x_1 \leq x_2$).

On retiendra que si $\Delta > 0$, f admet deux racines $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et que $f(x)$ est du signe de $-a$ quand x est entre les racines et du signe de a sinon.

Si $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$: f a une racine dite double $-\dfrac{b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, $\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ est strictement positif pour tout x : $f(x)$ ne s'annule pas et est du signe de a.

Remarques :

- Le signe de $f(x)$ pour $|x|$ très grand est donné par le signe de a.

- Ayant fait une étude exhaustive de cas, on en déduit que si f a deux racines, alors Δ est strictement positif, si f a une racine, alors Δ est nul et f n'a pas de racine, alors Δ est strictement négatif.

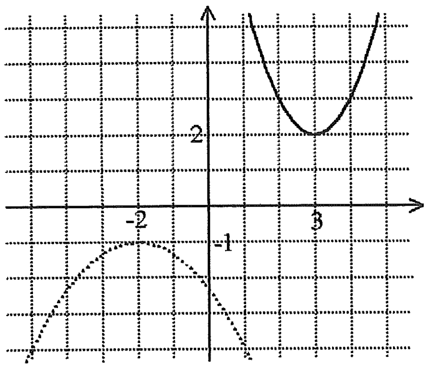
$\Delta < 0$

x	
signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a

Exemples :

$x \mapsto (x-3)^2 + 2$

$x \mapsto -\frac{1}{3}(x+2)^2 - 1$



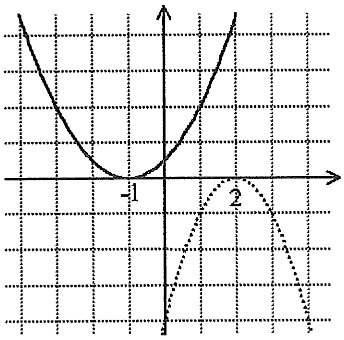
$\Delta = 0$

x		$x_1 = x_2$	
signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

Exemples :

$x \mapsto -(x-2)^2$

$x \mapsto \frac{1}{2}(x+1)^2$



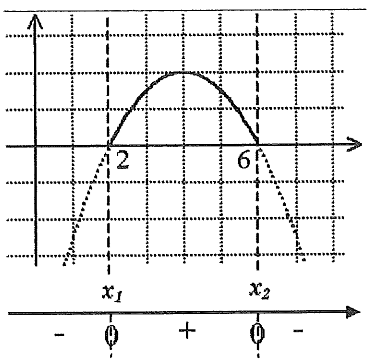
$\Delta > 0$

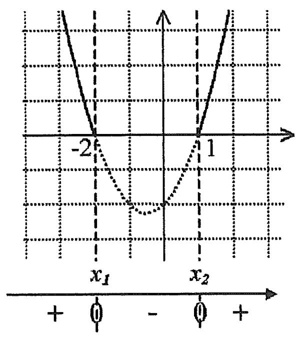
x		x_1		x_2	
signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Exemples :

$x \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)(x-6)$

$x \mapsto (x-1)(x+2)$





4.6 Somme et produit des racines

Considérons une fonction trinôme admettant deux racines réelles, c'est-à-dire définie pour tout x, par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$, b et c sont des réels donnés tels que le discriminant de f soit strictement positif.

Notons x_1, x_2 les deux racines de f. D'après ce qui précède, on a :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right)$$

Cette écriture donne $f(0) = a\, x_1x_2$; or avec $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a $f(0) = c$.

On en déduit : $\boxed{x_1x_2 = \frac{c}{a}}$

Avec $f(x) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right)$, on obtient $f'(x) = a(2x - (x_1 + x_2))$, d'où $f'(0) = -a\,(x_1 + x_2)$; or avec $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a $f'(x) = 2\,ax + b$, d'où $f'(0) = b$.

On en déduit : $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$

Ces deux formules peuvent en particulier être utilisées comme moyen de vérification après une détermination des racines par les formules données ci-dessus. Elles permettent également de résoudre rapidement une équation du second degré dont on connaît une racine.

4.7 Exercices

1. Dans chaque cas suivant, trouver une racine évidente puis donner l'autre

   i) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

   ii) $-10x^2 - 27x - 17 = 0$

   iii) $-\frac{15}{2}x^2 - 31x + 24 = 0$ (une racine est $-1{,}5$).

2. Résoudre les systèmes suivants : $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ xy = 6^2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{13}{2} \\ xy = \frac{5}{8} \end{cases}$

3. Soit l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   i) Justifier que cette équation admet deux racines x_1 et x_2. (on ne demande pas de les expliciter)

   ii) Donner la valeur de x_1x_2 puis de $x_1 + x_2$

   iii) En déduire les valeurs de $x_1^2 + x_2^2$ et de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

   iv) Déterminer des entiers a et b tels que $x_1^3 = ax_1 + b$ et des entiers a' et b' tels que $x_1^4 = a'x_1 + b'$

   v) Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_1^4 + x_2^4$

$\boxed{\mathbf{C}}$

Fonction racine carrée

Fonction racine carrée

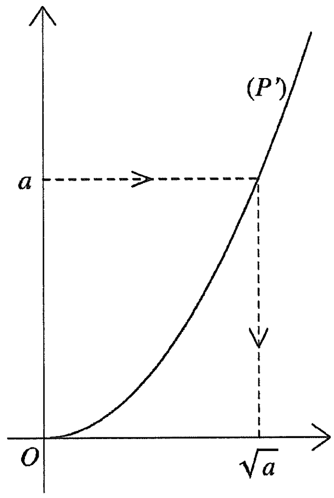
Nous étudions ici la fonction racine carrée. Une de ses particularités par rapport aux fonctions déjà présentées est qu'elle n'est définie que sur les réels positifs ou nuls. Par ailleurs, elle est un exemple de fonction définie comme fonction réciproque d'une fonction déjà connue. Les objectifs de ce chapitre sont principalement de voir que sa courbe est une demi-parabole, de placer cette courbe par rapport aux courbes d'autres fonctions usuelles, d'étudier son comportement en 0, en $a > 0$ *et en* $+\infty$ *et de se familiariser ainsi avec des études locales.*

Table des matières

1 Définition de la fonction racine carrée

1.1 Introduction

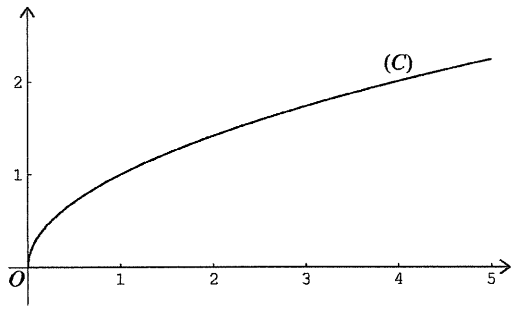
L'équation $X^2 = 9$ a deux solutions réelles : $X = 3$ ou $X = -3$; une seule, 3 , est positive. Plus généralement, si a est un nombre réel positif ou nul, il existe un unique nombre réel positif ou nul dont le carré est égal à a ; on note ce nombre $\sqrt{a}$ ou $a^{\left(\frac{1}{2}\right)}$.
On peut visualiser cette situation sur la demi-parabole (P') représentant la fonction qui associe à tout réel positif ou nul son carré :



1.2 Définition de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction associant à tout nombre réel positif ou nul, x, le nombre réel positif ou nul, $\sqrt{x}$, dont le carré est égal à x .

On notera (C) sa courbe (voir ci-contre).



Donc si x et y sont deux nombres réels positifs ou nuls on a : $y = \sqrt{x} \Longleftrightarrow y^2 = x$.

Par exemple $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{(-4)^2} = 4$ et pour tout nombre réel, a , on a :

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases} . \qquad \text{C'est-à-dire : } \sqrt{a^2} = |a| .$$

1.3 Exercices

1. Déterminer l'ensemble des nombres réels x pour lesquels chacune des expressions suivantes existe :

   a. $\sqrt{2x+1}$; b. $\sqrt{1-3x}$.

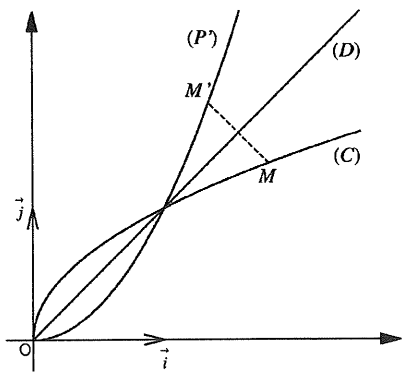
2. Résoudre les équations

   a. $(\sqrt{-x})^2 = \sqrt{x^2}$; b. $\left(\sqrt{1-x}\right)^2 = \sqrt{(x-1)^2}$.

2 Propriétés globales de la fonction racine carrée

2.1 Courbe

Soit (C) la représentation graphique de la fonction racine carrée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a vu que $\sqrt{x}$ existe si et seulement si x est positif ou nul et que c'est alors un réel positif ou nul.
La courbe (C) est donc dans le premier quadrant.
Pour que le point M de coordonnées positives (x, y) soit sur (C) il faut et il suffit que $y = \sqrt{x}$, c'est-à-dire que $x = y^2$, c'est-à-dire que le point $M'(y, x)$ soit sur la demi-parabole (P') d'équation $(Y = X^2 \text{ et } X \geq 0)$. Or M et M' sont symétriques par rapport à la première bissectrice, (D), du repère.
Ainsi, (C) est la symétrique par rapport à (D) de la demi-parabole (P').



Rem. On peut noter que (P') est la représentation graphique de la fonction racine carrée dans le repère $(O, \vec{j}, \vec{i})$.

Le dessin ci-dessus, qu'il est bon d'avoir présent à l'esprit, fait apparaître la position relative, sur $\mathbb{R}^+$, des courbes (D), (P') et (C) des fonctions respectives $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$:

$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de }]0,1[\,,\ x^2 < x < \sqrt{x}}$ et $\boxed{\text{pour tout } x > 1\,,\ \sqrt{x} < x < x^2}$.

2.2 Exercices

1. Comment peut-on déduire de la courbe de la fonction racine carrée les courbes des fonctions suivantes :
   a. $x \longmapsto \sqrt{x} - 2$; b. $x \longmapsto \sqrt{x-2}$; c. $x \longmapsto \sqrt{-x}$;
   d. $x \longmapsto \sqrt{|x| + 2}$; e. $x \longmapsto |\sqrt{x} - 2|$?

   Réponse du a. La courbe demandée est l'image de celle de la fonction racine carrée par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.
2. Si a et b sont deux nombres réels, on note $\max(a, b)$ le plus grand des deux nombres a ou b s'ils sont distincts et leur valeur commune s'ils sont égaux.
   Tracer sur le même dessin la représentation graphique des fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{2-x}$.
   En déduire celle de $x \longmapsto \max(x^2, \sqrt{2-x})$.

2.3 Sens de variation

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration 1 :
On a, pour $0 \leq a < b$, $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$; donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Rem. Cette technique de calcul est appelée "multiplication par la quantité conjuguée" : ici la quantité conjuguée de $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ est $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ et on a $(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) = b - a$.

Démonstration 2 :
Soit a et b deux nombres réels tels que $0 \leq a < b$ . . Si on avait $\sqrt{b} \leq \sqrt{a}$, la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ on aurait $b \leq a$ ce qui est en contradiction avec $a < b$; d'où le résultat.

2.4 La fonction racine carrée est concave

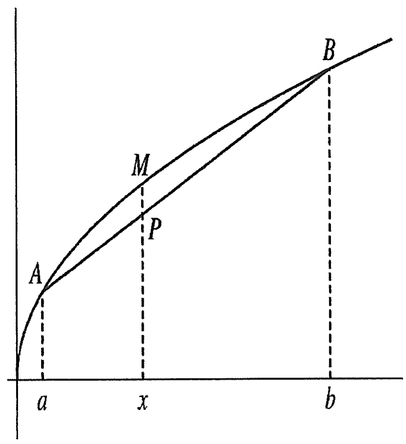
Soit a et b deux nombres réels tels que $0 \leq a < b$ et $A(a, \sqrt{a})$, $B(b, \sqrt{b})$ les points d'abscisses a et b de la courbe, C, de la fonction racine carrée. L'arc d'extrémités A et B de C est situé au-dessus du segment AB .
On dit que la fonction racine carrée est $\boxed{\text{concave sur } \mathbb{R}^+}$.

Soit x un nombre réel tel que $a < x \leq b$, M et P les points d'abscisse x de, respectivement, la courbe C et le segment AB . L'ordonnée, y, de P vérifie

$$\frac{y-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} \quad ; \quad \text{d'où}$$

$$y = \sqrt{a} + \frac{x-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} . \quad \text{Donc}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - y &= \sqrt{x} - \sqrt{a} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{x})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \end{aligned} \quad ;$$



Or cette quantité est positive, puisque $a < x \leq b$. On en déduit que M et au dessus de P et le résultat annoncé.

On peut aussi "voir" ce résultat comme conséquence du fait que la fonction x^2 est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et que la courbe C de la fonction racine est symétrique par rapport à la première bissectrice de la courbe (P') de la restriction à $\mathbb{R}^+$ de la fonction x^2 (voir le paragraphe 2.1), cette symétrie inversant la position relative des arcs et des cordes.

3 Propriétés locales de la fonction racine carrée

3.1 Etude en 0

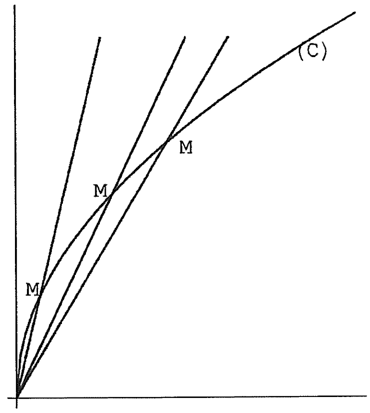
Pour $x > 0$, le coefficient directeur de la droite joignant les points d'abscisse 0 et x de la courbe (C) est : $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or, la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $+\infty$;

par exemple, pour avoir $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 1000$, il suffit de prendre $0 < x < 10^{-6}$;

plus généralement, si A est un nombre réel positif quelconque, pour avoir $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > A$, il suffit de prendre $0 < x < \dfrac{1}{A^2}$.

Donc la courbe (C) admet à l'origine la droite Oy comme (demi-)tangente et la fonction racine carrée n'admet pas de (demi-)dérivée en 0.

Quand le point M de coordonnées (x, y) tend vers l'origine en restant sur (C), la droite (O, M) "pivote" autour de O et tend à se confondre avec l'axe Oy.



3.2 Etude au voisinage de $a > 0$: nombre dérivé en a de la fonction racine carrée

Etude du cas $a = 1$

Pour étudier le comportement de la fonction racine carrée au voisinage de 1, étudions au voisinage de $h = 0$ la différence $f(1+h) - f(1) = \sqrt{1+h} - 1$;

on a $\sqrt{1+h} - 1 = \dfrac{h}{\sqrt{1+h}+1}$ (on a multiplié par la quantité conjuguée) ;

or, puisque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \dfrac{1}{2}$, on peut écrire $\dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \dfrac{1}{2} + \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ est une quantité (qu'il est inutile d'expliciter) qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi on obtient :

$$\boxed{\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h + h\,\varepsilon(h)} \qquad (*)$$

où $h\,\varepsilon(h)$ est négligeable devant h quand h est voisin de 0 (car $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h\,\varepsilon(h)}{h} = 0$). On retiendra l'approximation du premier ordre : $\sqrt{1+h} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}h$ quand h est voisin de 0 .

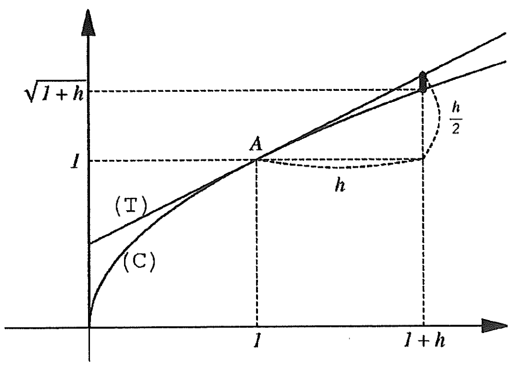
L'écriture $(*)$ permet, de plus, d'obtenir le nombre dérivé en 1 de la fonction racine carrée ; en effet, le taux d'accroissement de cette fonction entre 1 et $1+h$ vaut :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{h}\left(\sqrt{1+h} - 1\right) = \frac{1}{2} + \varepsilon(h) .$$

Il tend donc vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque h tend vers 0. On en déduit que la fonction racine carrée est dérivable en 1 avec $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Graphiquement, cela signifie que sa courbe représentative, (C) , admet au point $A(1, 1)$ une tangente, (T) , de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

Remarque : L'équation de (T) est $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x-1)$ c'est-à-dire $y = \dfrac{1}{2}(x+1)$.



Noter que la partie entre la tangente et la courbe, en gras sur le dessin, correspond à $h\,\varepsilon(h)$

Etude du cas général $a > 0$

On procède comme ci-dessus : on a : $\sqrt{a+h} - \sqrt{a} = \dfrac{h}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$;

puisque $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, on peut écrire $\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} + \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ est une quantité (qu'il est inutile d'expliciter) qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi on obtient :

$\boxed{\sqrt{a+h} = \sqrt{a} + \dfrac{1}{2\sqrt{a}}h + h\,\varepsilon(h)}$, où $h\,\varepsilon(h)$ est négligeable devant h quand h est voisin de 0 (car $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{h\,\varepsilon(h)}{h} = 0$) ; ceci montre que le taux d'accroissement, $\dfrac{1}{h}\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)$, de la fonction racine carrée entre a et $a+h$ est égal à $\dfrac{1}{2\sqrt{a}} + \varepsilon(h)$; il tend donc vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ lorsque h tend vers 0.

Donc le nombre dérivé en a de la fonction racine carrée, f , est $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

On retiendra que $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Remarque : La formule, nx^{n-1} , donnant, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de x^n , s'applique donc aussi au cas $n = \dfrac{1}{2}$; en effet la dérivée de $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ qui est bien égale à $\dfrac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)}$.

3.3 Exercices

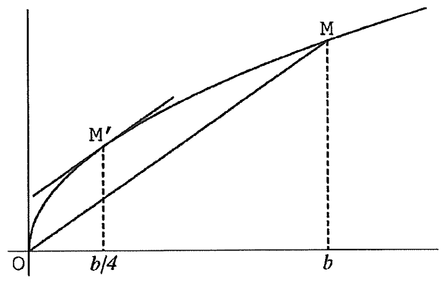
1. Déterminer des valeurs approchées de :
   a. $\sqrt{1,006}$; b. $\sqrt{4,0064}$; c. $\sqrt{100,02}$.
   Comparer avec le résultat donné par une calculatrice.

   Solution du b.
   On a $\sqrt{4,0064} = \sqrt{4(1+0,0016)} \approx 2(1+0,0008) = 2,0016$.
   La calculatrice donne $\sqrt{4,0064} \approx 2,001599995$.

2. De quel pourcentage (environ) doit-on augmenter le rayon d'un cercle pour que son aire augmente de 4% ?

3. Soit b un nombre réel strictement positif fixé et M le point d'abscisse b de la courbe (C) de la fonction racine carrée. Déterminer en fonction de b les coordonnées d'un point M' de (C) où la tangente à (C) est parallèle à la droite (O,M) . Montrer que le rapport des abscisses de M et de M' est indépendant de b . Faire des illustrations graphiques.

Solution : La tangente à (C) en son point d'abscisse $x > 0$ a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; pour qu'elle soit parallèle à à la droite (O, M) il faut et il suffit que $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{b}}{b}$, c'est-à-dire que $x = \dfrac{1}{4}b$. On en déduit les résultats demandés, le rapport constant étant $\dfrac{1}{4}$.



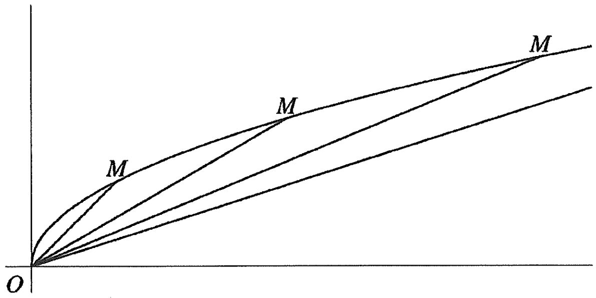
4. Soit A le point d'abscisse 1 et M le point d'abscisse x (x est un nombre réel positif distinct de 1) de la courbe (C) de la fonction racine carrée. Déterminer, en fonction de x , l'abscisse x' du point M' de (C) où la tangente à (C) est parallèle à la droite (A, M) (on vérifiera le résultat avec $x = 0$ et l'exercice précédent) . Déterminer la limite, quand x tend vers 1, de $\dfrac{x'-1}{x-1}$ (on simplifiera par $\sqrt{x} - 1$) et interpréter géométriquement le résultat.

3.4 Etude en $+\infty$

La limite de $\sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$;

(Par exemple, pour avoir $\sqrt{x} > 100$ il suffit de prendre $x > 10^4$. Plus généralement, si grand que soit le nombre A , pour avoir $\sqrt{x} > A$, il suffit de prendre $x > A^2$).

Toutefois la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est nulle ce qui signifie que, lorsque le point $M(x, \sqrt{x})$ s'éloigne infiniment sur (C) c'est-à-dire quand x tend vers $+\infty$, la droite (O, M) tend à se confondre avec l'axe Ox (alors que, pourtant, l'ordonnée, $\sqrt{x}$, de M tend vers $+\infty$); dans cette situation, on parle de branche parabolique dans la direction de Ox .



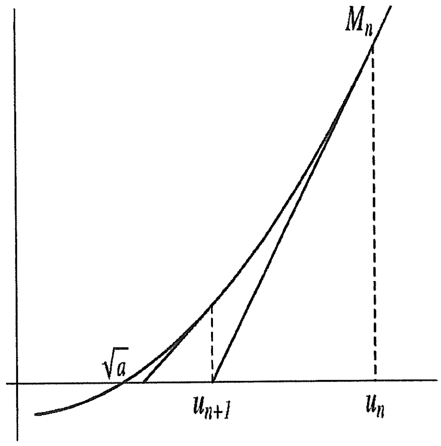
3.5 Calcul de $\sqrt{a}$ avec une précision imposée en n'utilisant que les opérations élémentaires

Il existe de nombreuses méthodes pour cela ; nous proposons l'algorithme de Héron d'Alexandrie qui revient à appliquer la méthode de Newton .

Principe

Soit C la courbe de la fonction, définie sur $\mathbb{R}^+$, qui à x associe $x^2 - a$. Elle coupe l'axe Ox au point $(\sqrt{a}, 0)$. Soit u_0 un nombre réel supérieur à $\sqrt{a}$. On construit une suite u_0 , u_1 ,$\cdots$,u_n $\cdots$ de la façon suivante : la tangente à C au point $M_n(u_n\, , u_n^2 - a)$ coupe Ox au point d'abscisse u_{n+1} . En exprimant de deux façons le coefficient directeur de cette tangente, on obtient $2u_n = \dfrac{u_n^2 - a}{u_n - u_{n+1}}$,

d'où $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.



La suite (u_n) converge très rapidement vers $\sqrt{a}$ (voir ci-dessous).

Exemple

Calculer $\sqrt{7}$ à 10^{-6} près.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right)$.

On a $\quad u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{7})^2 \geq 0 \quad (1)$;

Donc, puisqu'on a aussi $u_0 = 3 > \sqrt{7}$, on a, pour tout entier naturel n, $\quad \sqrt{7} \leq u_n$.

On a aussi $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2u_n}(7 - u_n^2) = \dfrac{1}{2u_n}(\sqrt{7} + u_n)(\sqrt{7} - u_n) \leq 0$;

donc pour tout n, $\quad \sqrt{7} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{u_n} < 1$;

on en déduit, avec (1) que pour tout n $\quad \dfrac{1}{2}(u_{n+1} - \sqrt{7}) \leq \left(\dfrac{1}{2}(u_n - \sqrt{7})\right)^2$;

puis, par une récurrence facile, que $\dfrac{1}{2}(u_n - \sqrt{7}) \leq \left(\dfrac{1}{2}(u_0 - \sqrt{7})\right)^{2^n}$; donc, on a :

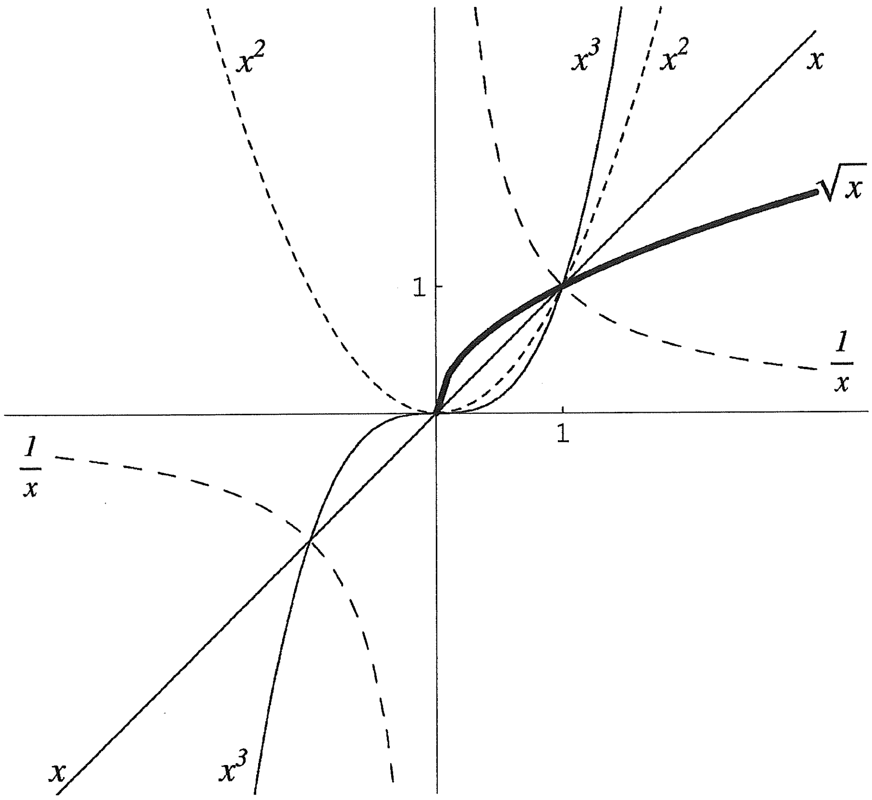
$0 \leq u_n - \sqrt{7} \leq 2^{1 - 2^{n+1}}$.

Or, pour $n = 4$, $\quad 2^{1-2^5} < 10^{-7}$; donc $\sqrt{7} \leq u_4 \leq \sqrt{7} + 10^{-7}$. On obtient

n	0	1	2	3	4
u_n	3	$\frac{8}{3}$	$\frac{127}{48}$	$\frac{32257}{12192}$	$\frac{2081028097}{786554688}$.
$u_n \approx$	$3,0000000$	$2,6666667$	$2,6458333$	2.6457513	2.6457513

Ainsi, on a $\quad 2,645751 < \sqrt{7} < 2.645752$.

4 Tracé des courbes des premières fonctions puissances



5 Exercices complémentaires

1. Représenter la courbe de
   a. $x \longmapsto \sqrt{-x}$; b. $x \longmapsto \sqrt{|x|}$; c. $x \longmapsto \sqrt{|x+1|}$.
2. A l'aide de la courbe du c. de l'exercice précédent, déterminer graphiquement les solutions de l'équation $\sqrt{|x+1|} = 2$. Retrouver ce résultat par le calcul. Quel est l'ensemble des solutions de $\sqrt{|x+1|} < 2$?
3. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}$.

Solution : Notons $f(x)$ la quantité étudiée. Lorsque x tend vers 0 le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ tendent tous deux vers 0 : on ne peut donc rien dire a priori. En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du numérateur, on obtient, pour tout x non nul de $[-2, 2]$,

$$f(x) = \frac{4-(4-x^2)}{(2+\sqrt{4-x^2})x^2} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} .$$

La limite demandée, égale à $\dfrac{1}{4}$, s'obtient sans difficulté sous cette forme.

4. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de

   a. $\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x}$; b. $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

5. Comparer pour x positif très proche de 0 les nombres $\frac{1}{4}\sqrt{x}$, $100x$ et x^2 .

6. Soit (u_n) la suite déterminée par

   $u_0 = 4$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{15}{n}\right)$.

   Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ $\qquad 0 \leq u_n - \sqrt{15} \leq 6^{-2^n}$.

   Est-il vrai que u_4 soit une valeur approchée de $\sqrt{15}$ à 10^{-12} près ?

   Est-il vrai que u_{11} soit une valeur approchée de $\sqrt{15}$ à 10^{-990} près ?

D

Fonction cube

Fonction cube

Nous étudions ici la fonction cube qui associe à tout nombre réel, x, son cube x^3. Une de ses particularités par rapport à d'autres fonctions usuelles est la présence d'un point d'inflexion sur sa courbe. Les objectifs de ce chapitre sont, principalement, de placer cette courbe par rapport aux courbes d'autres fonctions usuelles, d'étudier le comportement de la fonction cube en 0, en $+\infty$ et en a $(a \in \mathbb{R})$, de se familiariser ainsi avec des études locales et d'apprendre à placer rapidement les courbes des fonctions polynômes de degré 3.

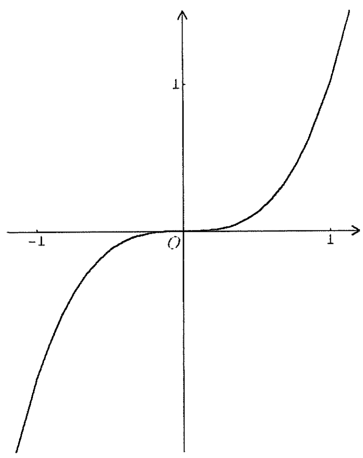
Table des matières

1 Définition et propriétés globales de la fonction cube

1.1 Définition

La fonction cube est la fonction qui associe à tout nombre réel, x, son cube, x^3 .

On notera C sa représentation graphique (voir ci-contre).



1.2 Symétrie

La fonction cube est impaire. L'origine du repère est donc centre de symétrie de C .

■[1] En effet, pour tout nombre réel x, on a : $(-x)^3 = -x^3$. ■

1.3 Variation

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

■ En effet, soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
si $a \leq 0 < b$, alors $a^3 \leq 0 < b^3$;

si $(a < b \leq 0$ ou $0 \leq a < b)$, alors $a^2 + ab + b^2 > 0$;
or $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$; donc $b^3 - a^3 > 0$.
Ainsi, dans tous les cas, si $a < b$ alors $a^3 < b^3$. ■

Remarque : deux nombres réels sont donc toujours dans le même ordre que leurs cubes. Notons qu'il n'en est pas de même pour les carrés : on a $-3 < 2$ et $(-3)^2 > 2^2$.

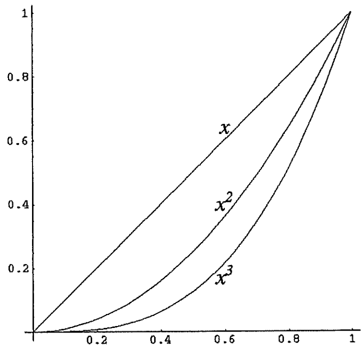
[1] Les démonstrations, dans ce document, seront encadrées par des symboles ■ .

1.4 Comparaison de x , x^2 , x^3

Pour tout nombre réel x tel que $0 < x < 1$, on a

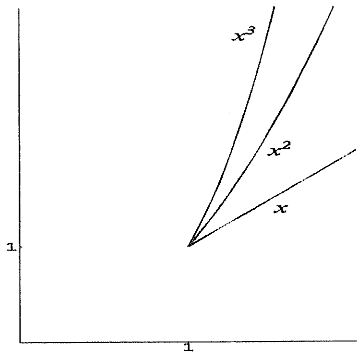
$$0 < x^3 < x^2 < x < 1 .$$

■ Par exemple, l'inégalité $x^3 < x^2$ résulte de
$x^2 - x^3 = x^2(1-x) > 0$. ■



Pour tout nombre réel x tel que $1 < x$, on a $\quad 1 < x < x^2 < x^3$.

■ Par exemple, l'inégalité $x^2 < x^3$ résulte de
$x^3 - x^2 = x^2(x-1) > 0$. ■

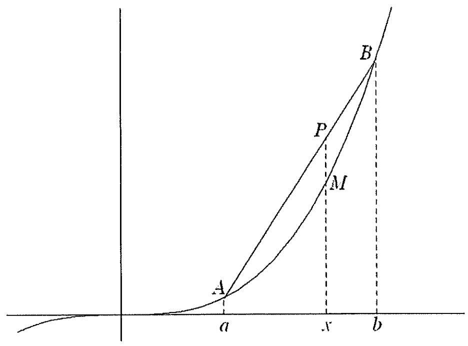


1.5 La fonction cube est concave sur $\mathbb{R}^-$ et convexe sur $\mathbb{R}^+$

Pour tous nombres réels négatifs a et b, l'arc de C ayant pour extrémités $A(a, a^3)$ et $B(b, b^3)$ est au dessus du segment AB. On dit que la fonction cube est $\boxed{\text{concave sur } \mathbb{R}^-}$.

Pour tous nombres réels positifs a et b, l'arc de C ayant pour extrémités $A(a, a^3)$ et $B(b, b^3)$ est au dessous du segment AB. On dit que la fonction cube est $\boxed{\text{convexe sur } \mathbb{R}^+}$.

■ Soit trois nombres réels a , b , x tels que $0 \leq a \leq x \leq b$. L'ordonnée du point, P, d'abscisse x du segment joignant $A(a, a^3)$ et $B(b, b^3)$ est
$a^3 + \dfrac{b^3 - a^3}{b - a}(x-a) = a^3 + (b^2 + ab + a^2)(x-a)$;
la quantité $\quad x^3 - (a^3 + (b^2 + ab + a^2)(x-a))$
se factorise en $\quad (x-a)(x-b)(x+a+b)$;
elle est donc négative d'après les hypothèses sur a , b , x . On en déduit que P est au dessus du point, M, de C d'abscisse x : la fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}^+$.
On procède de même sur $\mathbb{R}^-$ ou on fait appel à la symétrie par rapport à O. ■



2 Propriétés locales de la fonction cube

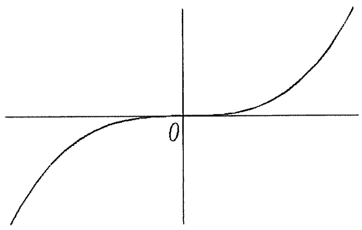
2.1 Etude en 0

Au voisinage de 0, chacune (sauf la dernière) des fonctions x^3 , x^2 , x , 1 est négligeable devant toutes celles qui la suivent.

■ Par exemple, x^3 est négligeable devant x , lorsque x tend vers 0 car le rapport $\frac{x^3}{x} = x^2$ tend vers 0 quand x tend vers 0. ■

A l'origine, la tangente à la courbe de la fonction cube est l'axe des abscisses et ce point est un $\boxed{\text{point d'inflexion}}$.

■ Le taux de variation de la fonction cube entre 0 et x est $\frac{x^3}{x} = x^2$. Cette quantité tend vers 0 lorsque x tend vers 0; donc la tangente en l'origine à la courbe C de la fonction cube est l'axe des abscisses.



On a vu qu'en 0 la courbe C change de concavité. Un tel point est appelé un point d'inflexion . La courbe C est de part et d'autre de sa tangente en ce point (d'après le signe de x^3 ou la symétrie). ■

2.2 Etude pour les grandes valeurs de x

Lorsque x tend vers $+\infty$, chacune (sauf la dernière) des fonctions 1 , x , x^2 , x^3 est négligeable devant toutes celles qui la suivent.

■ Par exemple, x est négligeable devant x^3 , lorsque x tend vers $+\infty$ car le rapport $\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. ■

x^3 tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et la courbe C admet une branche parabolique dans la direction de Oy lorsque x tend vers $+\infty$.

■ Pour $1 < x$, on a $1 < x < x^3$; donc x^3 tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$;
le rapport $\frac{x^3}{x} = x^2$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Donc la droite joignant O au point $M(x, x^3)$ tend à se confondre avec Oy, lorsque l'abscisse de M tend vers $+\infty$ (alors que, pourtant, l'abscisse, x, de M tend vers $+\infty$); dans cette situation, on parle de branche parabolique dans la direction de Oy . ■

2.3 Etude au voisinage de a : nombre dérivé en a de la fonction cube

Etude du cas $a = 1$.

Pour tout nombre réel, h, on a

$(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$; donc

$\boxed{(1+h)^3 = 1 + 3\,h + h\,\varepsilon(h)}$ $\quad (*)$

avec $\varepsilon(h) = 3h + h^2$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$; ce qui montre que $h\varepsilon(h)$ est négligeable devant h quand h tend vers 0.

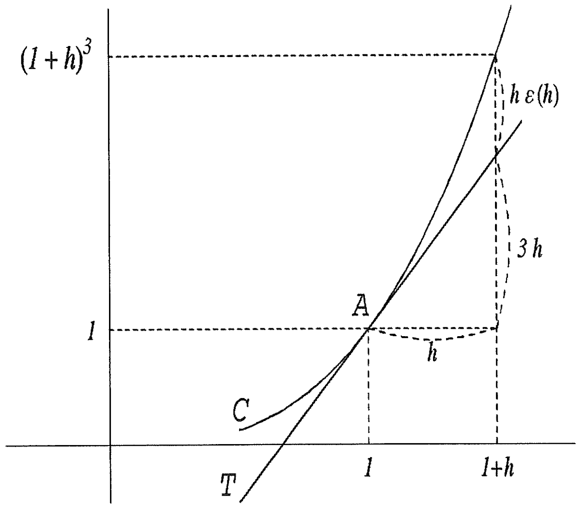
On retiendra l'approximation du premier ordre :

$(1+h)^3 \simeq 1 + 3h$ quand h est voisin de 0 .

L'écriture $(*)$ permet, de plus, d'obtenir le nombre dérivé en 1 de la fonction cube : en effet, le taux d'accroissement de cette fonction entre 1 et $1+h$ vaut :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{h}\left((1+h)^3 - 1\right) = 3 + \varepsilon(h) \ ;$$

il tend donc vers 3 lorsque h tend vers 0. On en déduit que la fonction cube est dérivable en 1 et son nombre dérivé est $f'(1) = 3$.



Bien noter que, sur ce dessin, pour des raisons de lisibilité, nous avons choisi des unités différentes sur les axes : en particulier la longueur noté $3h$ le long de Oy , qui est à rapporter à l'unité correspondante est bien le triple de la longueur notée h le long de l'axe Ox avec son unité.

Cas général

■ Soit a un nombre réel. On procède comme ci-dessus : on a, pour tout nombre réel h :

$\boxed{(a+h)^3 = a^3 + 3a^2\,h + h\,\varepsilon(h)}$ $\quad (*)$ avec $\varepsilon(h) = 3ah + h^2$ de limite nulle lorsque h tend vers 0.

On en déduit l'approximation du premier ordre $(a+h)^3 \simeq a^3 + 3a^2h$ quand h est voisin de 0.

Pour tout nombre réel non nul, h, le taux d'accroissement de la fonction cube entre a et $a+h$ est, d'après l'écriture $(*)$, $\quad \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{1}{h}\left((a+h)^3 - a^3\right) = 3a^2 + \varepsilon(h)$;

il tend donc vers $3a^3$ lorsque h tend vers 0. On en déduit que la fonction cube est dérivable en a et que son nombre dérivé est $f'(a) = 3a^2$. ■

On retiendra que $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2$.

3 Exemples d'études de fonctions polynômes de degré 3

Il s'agit des fonctions du type $\quad x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$.

3.1 Centre de symétrie

Etude d'un exemple

Soit C la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x - 1$. Montrons que C admet un centre de symétrie.

La méthode consiste à effectuer un changement d'origine de façon que, dans le nouveau repère, la courbe C soit la courbe d'une fonction impaire.

On a en posant $x = X + \alpha$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}(X+\alpha)^3 + (X+\alpha)^2 + 2(X+\alpha) - 1 \\ &= \frac{1}{3}X^3 + (1+\alpha)X^2 + (2+2\alpha+\alpha^2)X + \frac{1}{3}\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 1 \end{aligned}$$

Avec $\alpha = -1$, on obtient $f(x) = \frac{1}{3}X^3 + X - \frac{7}{3}$.

Ainsi, avec $x = X - 1$, $y = Y - \frac{7}{3}$, on a $y = f(x) \Longleftrightarrow Y = \frac{1}{3}X^3 + X$. C'est-à-dire que la courbe C de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est aussi la courbe de $g \ : \ X \longmapsto \frac{1}{3}X^3 + X$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\overrightarrow{O\Omega} = -\vec{i} - \frac{7}{3}\vec{j}$. La fonction g étant impaire, le point Ω est centre de symétrie de C .

Cas général

La courbe d'une fonction polynôme de degré 3 admet un centre de symétrie.

■ Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$. On choisit α et β pour que, en posant $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$, on ait $y = f(x) \Longleftrightarrow Y = aX^3 + c'X$. C'est toujours possible : il suffit de choisir α de façon à annuler le coefficient de X^2 dans le développement de $a(X+\alpha)^3 + b(X+\alpha)^2 + c(X+\alpha) + d$ et de prendre alors le coefficient constant de ce polynôme en X comme valeur pour β . Ainsi la courbe C de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est aussi la courbe de $g \ : \ X \longmapsto aX^3 + c'X$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\overrightarrow{O\Omega} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.

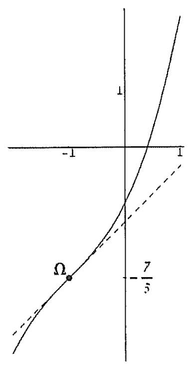
La fonction g étant impaire, le point Ω est centre de symétrie de C . ■

3.2 Allure de la courbe d'une fonction polynôme de degré 3

Exemples.

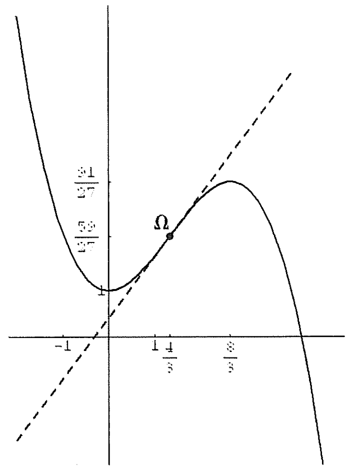
1. Placer la courbe, C, de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+2x-1$.

   Solution : On a vu (3.1) que C admet $\Omega\left(-1,-\frac{7}{3}\right)$ comme centre de symétrie et que C est la courbe de $g\ :\ X\longmapsto\frac{1}{3}X^3+X$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$; g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g(X)-X$ est négligeable devant X en 0. On en déduit l'allure de C avec sa tangente de coefficient directeur 1 en Ω .



2. Placer la courbe, C, de la fonction f définie par $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+x^2+1$.

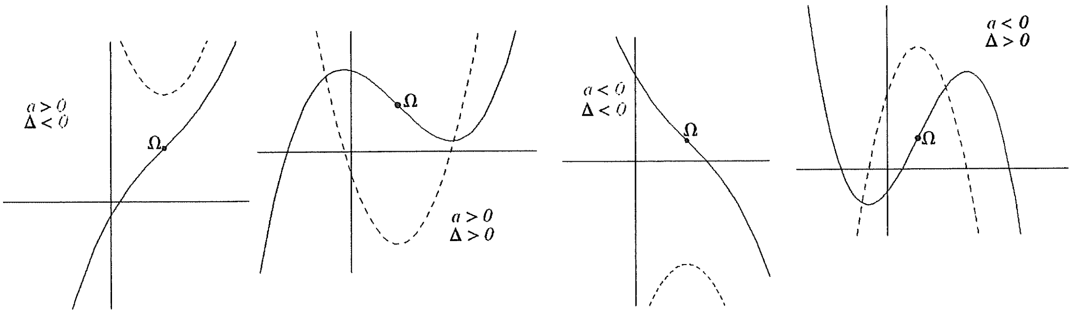
   Solution : La valeur de α annulant le coefficient de X^2 dans $-\frac{1}{4}(X+\alpha)^3+(X+\alpha)^2+1$ est $\frac{4}{3}$. Le centre de symétrie de C est donc le point $\Omega\left(\frac{4}{3},f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{59}{27}\right)$. On a $f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+2x=x\left(-\frac{3}{4}x+2\right)$. Donc f est croissante sur $\left[0,\frac{8}{3}\right]$ et décroissante sur $]-\infty,0]$ et sur $\left[\frac{8}{3},+\infty\right[$. On en déduit l'allure de C .



Cas général.

Soit C la courbe d'une fonction polynôme de degré 3, du type $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad(a\neq 0)$. La dérivée, $f'(x)$ est un polynôme de degré 2. Soit Δ son discriminant et α la demi-somme de ses racines (réelles ou complexes). Le signe de $f'(x)$ est facile à obtenir.
Le centre de symétrie Ω de C est le point de coordonnées $(\alpha,f(\alpha))$. C'est immédiat si $\Delta>0$, car Ω est le milieu du segment joignant les deux points à tangentes horizontales ; c'est vrai aussi dans les autres cas : le montrer en exercice.

On obtient les différentes allures de C suivantes, où dans chaque cas, on a fait apparaître en pointillé la courbe de la dérivée :

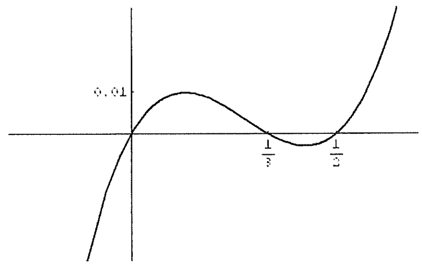


Si $\Delta = 0$, on obtient des allures semblables aux cas où $\Delta < 0$, mais la tangente en Ω est horizontale.

Exemple.

Déterminer l'allure de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

Solution : Il s'agit d'un polynôme de degré 3 et puisque f s'annule trois fois et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on est dans la situation $a > 0$, $\Delta > 0$ décrite ci-dessus. On en déduit directement (si on n'a pas besoin de préciser les extrema) l'allure de la courbe C de f donnée ci-contre .



Remarques : 1. On a choisi des unités différentes sur les axes pour que le graphe fasse apparaître les variations. L'utilisation (qui serait ici malvenue) trop hâtive d'une calculette graphique risque de conduire à ne pas voir l'essentiel en obtenant une courbe très proche de celle de $x \longmapsto x^3$. Même plusieurs "zooms" effectués à partir des valeurs par défaut sont insuffisants; il faut imposer un domaine de variation de y assez petit pour faire apparaître les variations de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. On peut montrer (exercice 5, page 9) que l'abscisse du centre de symétrie de C est la moyenne des trois solutions (car celles-ci sont toutes réelles) de $f(x) = 0$, donc $\frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{18}$.

4 Exercices

1. Déterminer une valeur approchée de $(2,006)^3$ en utilsant l'approximation donnant $(1+h)^3$ pour h voisin de 0. Comparer avec la valeur donnée par une calculatrice.

2. Etudier le signe et les variations de la fonction f définie par $f(x)=x^3-x^2$. On commencera par une étude graphique à partir des courbes des fonctions carré et cube et on précisera par une étude algébrique.

   Solution : Pour tout x , $f(x)$ est l'écart (algébrique) entre les courbes des fonctions carré et cube au point d'abscisse x . La courbe de la fonction cube est au dessus de celle de la fonction carré seulement lorsque $x>1$. On en déduit que $f(x)$ est positif si $x>1$, nul pour x nul ou égal à 1 et négatif dans tous les autres cas. Lorsque $x>1$, on "voit sur le dessin"(1.4) que $f(x)$ croît avec x ; pour $x<0$, lorsque x croît la valeur absolue de $f(x)$ diminue et $f(x)<0$, donc là aussi $f(x)$ croît avec x ; pour x variant de 0 jusqu'à une certaine valeur, a, comprise entre 0 et 1 , la valeur absolue de $f(x)$ augmente et $f(x)<0$ donc f est décroissante sur $[0,a]$; sur l'intervalle $[a,1]$, la valeur absolue de $f(x)$ diminue et $f(x)<0$ donc f est croissante sur $[a,1]$. En résumé f est croissante sur $]-\infty,0]$, décroissante sur $[0,a]$ et croissante sur $[a,+\infty[$. La valeur a correspond à l'abscisse entre 0 et 1 pour laquelle l'écart entre les courbes des fonctions carré et cube est, en valeur absolue, maximum. En effectuant l'étude classique au moyen de la dérivée $f'(x)=3x^2-2x$, on retrouve facilement ces résultats avec $a=\frac{2}{3}$.

3. Représenter la courbe C de la fonction cube avec sa tangente, D, au point d'abscisse 1. Déterminer suivant les valeurs du réel x la position relative de C et de D.

4. Montrer que, sur $\mathbb{R}^+$, la courbe de la fonction cube est toujours au dessus de chacune de ses tangentes.

5. Soit $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad (a\neq 0)$ une fonction polynôme de degré 3 et C sa courbe. On suppose que l'équation $f(x)=m$ a trois solutions réelles α , β , γ (non nécessairement distinctes). Montrer que l'abscisse du centre de symétrie de C est $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$.

6. Donner l'allure de la courbe de la fonction $x\longmapsto\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{4}\right)$.

7. Représenter sur le même dessin les courbes des fonctions $x \longmapsto x^3 + ax$ pour $a \in \{-1, 0, 1\}$.

8. Déterminer une fonction polynôme de degré 3 dont la courbe admet un point d'inflexion à tangente horizontale au point de coordonnées $(1, 2)$.

   Solution : On "translate" la courbe de $x \longmapsto x^3$ suivant le vecteur de coordonnées $(1, 2)$; on obtient alors comme fonction solution $x \longmapsto (x-1)^3 + 2$.

9. Déterminer une fonction polynôme de degré 3 dont la courbe admet, au point de coordonnées $(-1, 2)$, un point d'inflexion en lequel la tangente a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

   Une réponse possible est : $f(x) = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + (x+1)^3$.

10. Soit f , g , h les fonctions définies respectivement par : $f(x) = x+1$, $g(x) = -x^2+x+1$, $h(x) = x^3-x^2+x+1$ et C_1 , C_2 , C_3 leurs courbes respectives. Représenter ces courbes, d'abord localement au voisinage de $x = 0$, puis globalement sur un intervalle convenable. Dans les deux cas on fera apparaître leur position relative.

11. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 2x - 1$. Etudier l'allure de la courbe de f avec sa tangente au voisinage du point d'abscisse 1. (Indication : calculer $f(1+h)$ et l'écrire sous la forme $f(1+h) = a + bh + ch^2 + dh^3$ en effectuant le changement de variable $x = 1 + h$.)
    Mêmes questions pour la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$.

12. Donner l'expression algèbrique de deux fonctions polynômes, f , g telles que $d^o f = 2$, $d^o g = 3$, $f(1) = g(1) = f(-1) = g(-1) = -1$ et les courbes de f et de g admettent au point d'abscisse -1 une tangente de coefficient directeur 1. Déterminer toutes les solutions de ce problème.

13. Soit A, B et C trois points deux à deux distincts de la courbe de la fonction cube. Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si leur isobarycentre est sur l'axe des ordonnées.

14. a. Placer dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe C de la fonction, f, définie par $f(x) = x^3 - 2x$.

On veut déterminer les points, M , de C d'abscisses positives tels que la tangente en M à C soit orthogonale à la droite OM .

Montrer qu'il y a seulement deux points vérifiant cette propriété et donner les abscisses de ces points.

b. En déduire qu'il existe (au moins) deux droites deux fois normales à C (*On dit qu'une droite, D, est deux fois normale à* C *si, parmi les points où elle rencontre* C*, il y en a deux (distincts) où la tangente à* C *est orthogonale à* D). Placer ces deux droites sur le dessin ainsi que les tangentes correspondantes.

c. Montrer qu'une droite deux fois normale à C passe nécessairement par O . En déduire qu'il ne peut exister d'autre droite deux fois normale à C que les deux trouvées ci-dessus.

d. A quelle condition nécessaire et suffisante sur le nombre réel α , la courbe C_α de la fonction $x \longmapsto x^3 + \alpha x$ admet-elle au moins une droite deux fois normale ? Combien y en-a-t-il alors ?

e. Déterminer de même une condition nécéssaire et suffisante sur les nombres réels a , b et c pour que la courbe Γ de la fonction $x \longmapsto x^3+ax^2+bx+c$ admette au moins une droite deux fois normale.

Réponses :

a. Les points de C vérifiant la propriété sont les points d'abscisses 1 ou $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

d. C_α admet $0, 1$ ou 2 droites deux fois normales suivant que $\alpha > -\sqrt{3}$, $\alpha = \sqrt{3}$ ou $\alpha < -\sqrt{3}$.

e. La condition demandée est $3(b + \sqrt{3}) \leq a^2$.

$\boxed{\textbf{E}}$

De la fonction inverse aux fonctions homographiques

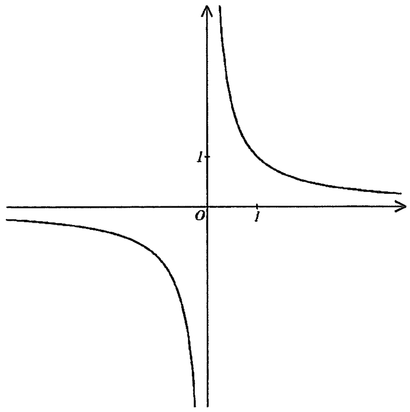
De la fonction "inverse" aux fonctions homographiques

Nous étudions ici la fonction inverse qui associe à tout réel non nul son inverse, ainsi que les fonctions homographiques (du type $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *); leur particularité par rapport aux fonctions étudiées précédemment est que leurs courbes possèdent deux asymptotes .*
Un des objectifs de ce chapitre est de savoir placer très rapidement les courbes de ce type de fonctions à partir de leurs deux asymptotes . Un autre est de se familiariser avec les études locales de fonctions.

Table des matières

1 Définition de la fonction inverse

La fonction inverse est la fonction qui associe à tout réel non nul, x, son inverse $\dfrac{1}{x}$ noté encore x^{-1} .



Dans ce chapitre, on notera f cette fonction et (C) sa courbe qui est une hyperbole (voir ci-contre).

2 Propriétés globales de la fonction inverse

2.1 Sens de variation

La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.

■[1] On a pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$:

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{b-a}{ab} < 0 \quad ; \quad \text{donc} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} .$$

D'où le résultat sur $\mathbb{R}_+^*$. On procède de même sur $\mathbb{R}_-^*$. ■

2.2 Exercices

1. La fonction inverse, f, est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

   Solution : On a $f(-1) = -1$ et $f(2) = \dfrac{1}{2}$; le fait que $-1 < 2$ et que $f(-1) < f(2)$ montre que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Sur la courbe (C) de f , on voit que certaines sécantes (par exemple celle joignant les points d'abscisse -1 et 2) "montent", ce qui traduit le fait que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

2. La fonction inverse étant toujours désignée par f, résoudre l'inéquation
   $f(x) < f(5)$.

2.3 Symétries

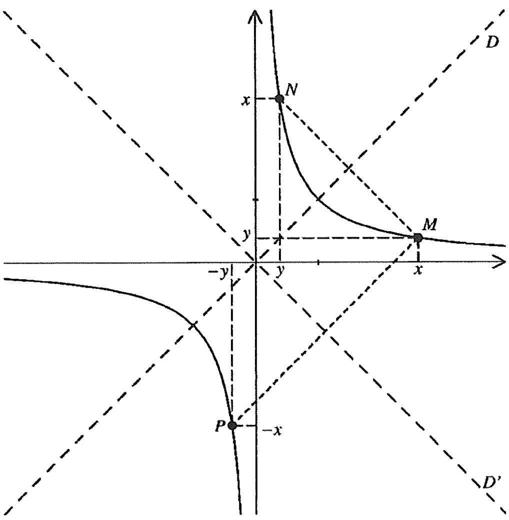
La fonction inverse est impaire ; l'origine O du repère est donc centre de symétrie de (C) .

■ En effet, pour tout réel non nul, x , on a : $\quad f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.■

[1] Dans ce document, les démonstrations seront encadrées par des symboles ■ .

La courbe de la fonction inverse en repère orthonormé admet les bissectrices du repère comme axes de symétrie.

■ Considérons deux points M et N symétriques par rapport à la première bissectrice, D, du repère orthonormé. Si les coordonnées de M sont (x, y) alors celles de N sont (y, x). Puisque, pour x et y non nuls, la relation $y = \frac{1}{x}$ équivaut à la relation $x = \frac{1}{y}$, nous concluons que M est sur (C) si et seulement si le point N est sur (C). Ainsi la première bissectrice du repère est un axe de symétrie de (C).
De même, si P est le symétrique de M par rapport à la seconde bissectrice, D', du repère, les coordonnées de P sont $(-y, -x)$ et comme la relation $y = \frac{1}{x}$ équivaut à la relation $-x = \frac{1}{-y}$, on en déduit que D' est aussi axe de symétrie de (C).■

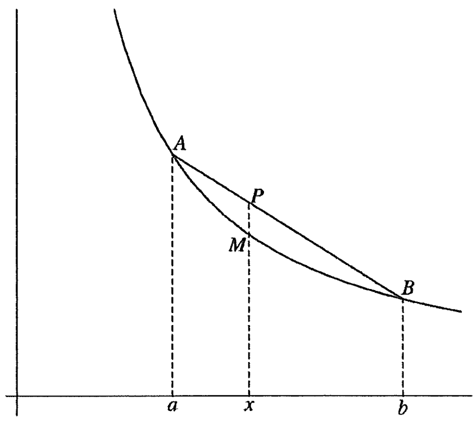


2.4 La fonction inverse est concave sur $\mathbb{R}_-^*$ et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

Pour tous nombres réels strictement négatifs a et b l'arc de (C) ayant pour extrémités $A(a, \frac{1}{a})$ et $B(b, \frac{1}{b})$ est au dessus du segment AB . On dit que la fonction inverse est $\boxed{\text{concave sur } \mathbb{R}_-^*}$.

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b l'arc de (C) ayant pour extrémités $A(a, \frac{1}{a})$ et $B(b, \frac{1}{b})$ est au dessous du segment AB . On dit que la fonction inverse est $\boxed{\text{convexe sur } \mathbb{R}_+^*}$.

■ Soit trois nombres réels a , b , x tels que $0 < a \leq x \leq b$. L'ordonnée du point, P, d'abscisse x du segment joignant $A(a, \frac{1}{a})$ et $B(b, \frac{1}{b})$ est : $\frac{1}{a} + \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a}(x - a) = \frac{1}{a} - \frac{x - a}{ab}$;
la quantité $\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{a} - \frac{x - a}{ab}\right)$
se factorise en $\frac{(x - a)(x - b)}{abx}$;
elle est donc négative d'après les hypothèses sur a , b , x . On en déduit que P est au dessus du point, M, de (C) d'abscisse x : la fonction inverse est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
On procède de même sur $\mathbb{R}_-^*$, ou on fait appel à la symétrie par rapport à O.■



3 Propriétés locales de la fonction inverse

3.1 Etude au voisinage de 0

On a le tableau de valeurs :

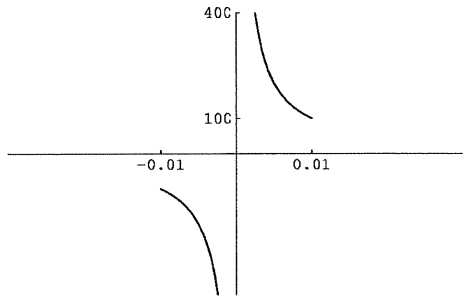
x	1	$0,1$	$0,001$	10^{-6}
$\frac{1}{x}$	1	10	1000	10^{6}

.

Il semble que l'on puisse avoir $\dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x assez petit. C'est bien le cas : par exemple, pour avoir $\dfrac{1}{x} > 10^{10}$, il suffit de prendre $0 < x < 10^{-10}$ et, plus généralement, si b est un réel positif quelconque, pour avoir $\dfrac{1}{x} > b$, il suffit de prendre $0 < x < \dfrac{1}{b}$.

Donc $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

Dans cette situation, on dit que l'axe Oy est asymptote à la courbe (C) lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
On montre de même, que $\dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives et, donc, que l'axe Oy est asymptote à la courbe (C) lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives.



3.2 Etude pour les grandes valeurs de x

On a le tableau de valeurs :

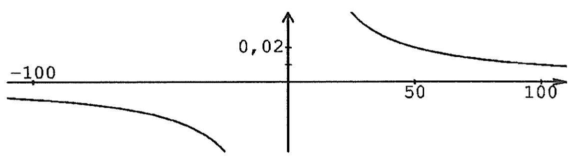
x	1	10	100	10^{6}
$\frac{1}{x}$	1	$0,1$	$0,01$	10^{-6}

.

Il semble que l'on puisse avoir $\dfrac{1}{x}$ aussi petit que l'on veut à condition de prendre x assez grand. C'est bien le cas : par exemple, pour avoir $0 < \dfrac{1}{x} < 10^{-10}$, il suffit de prendre $10^{10} < x$ et, plus généralement, si b est un réel positif quelconque, pour avoir $0 < \dfrac{1}{x} < b$, il suffit de prendre $\dfrac{1}{b} < x$.

Donc $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

La courbe (C) est aussi proche de l'axe Ox que l'on veut à condition de prendre x assez grand : l'axe Ox est asymptote à la courbe (C) lorsque x tend vers $+\infty$.
On montre de même, que $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ et, donc, que l'axe Ox est asymptote à la courbe (C) lorsque x tend vers $-\infty$.



3.3 Etude au voisinage de a $(a \neq 0)$: nombre dérivé en a de la fonction inverse

Etude du cas $a = 1$

Pour étudier le comportement de la fonction inverse au voisinage de 1, étudions au voisinage de $h = 0$ la différence $f(1+h) - f(1) = \dfrac{1}{1+h} - 1$; on a $\dfrac{1}{1+h} - 1 = \dfrac{-h}{1+h} = h\left(\dfrac{-1}{1+h}\right)$;
or, puisque $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{1+h} = -1$, on peut écrire $\dfrac{-1}{1+h} = -1 + \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ est une quantité (qu'il est inutile d'expliciter) qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{1+h} = 1 - h + h\,\varepsilon(h)} \qquad (*)$$

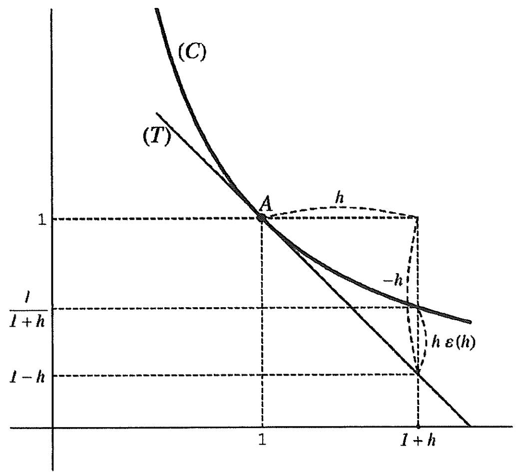
où $h\,\varepsilon(h)$ est négligeable devant h quand h est voisin de 0 (car $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,\varepsilon(h)}{h} = 0$). On retiendra l'approximation du premier ordre : $\dfrac{1}{1+h} \simeq 1 - h$ quand h est voisin de 0 .

L'écriture $(*)$ permet, de plus, d'obtenir le nombre dérivé en 1 de la fonction inverse ; en effet, le taux d'accroissement de cette fonction entre 1 et $1+h$ vaut :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}\right) = -1 + \varepsilon(h) .$$

Il tend donc vers (-1) lorsque h tend vers 0. On en déduit que la fonction inverse est dérivable en 1 avec $f'(1) = -1$.
Graphiquement, cela signifie que sa courbe représentative, (C) , admet au point $A(1,1)$ une tangente, (T) , de coefficient directeur -1 .

Remarque : Une équation de (T) *est* $y - 1 = (-1)(x-1)$ *c'est-à-dire* $y = -x + 2$.



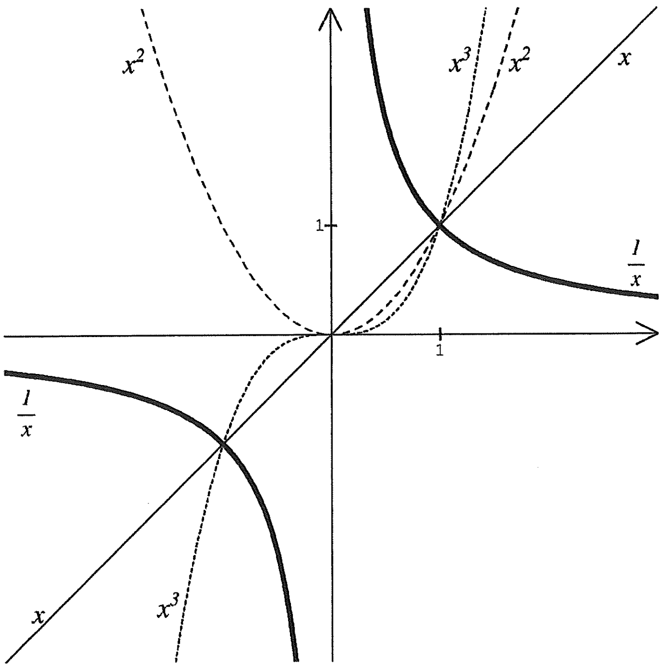
Etude du cas général $a \neq 0$

■ On procède comme ci-dessus : on a : $\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{-h}{a(a+h)}$; puisque $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a^2}$, on peut écrire $\dfrac{-1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a^2} + \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ est une quantité (qu'il est inutile d'expliciter) qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Ainsi on obtient : $\boxed{\dfrac{1}{a+h} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}h + h\,\varepsilon(h)}$, où $h\,\varepsilon(h)$ est négligeable devant h quand h est voisin de 0 (car $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,\varepsilon(h)}{h} = 0$) ; ceci montre que le taux d'accroissement, $\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}\right)$, de la fonction inverse entre a et $a+h$ est égal à $-\dfrac{1}{a^2} + \varepsilon(h)$; il tend donc vers $-\dfrac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.
Donc le nombre dérivé en a de la fonction inverse, f , est $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.■

On retiendra que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Remarque : La formule, nx^{n-1} , donnant, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de x^n s'applique donc aussi au cas $n = -1$; en effet la dérivée de $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ est $(-1)x^{-2}$ qui est bien égale à $(-1)x^{(-1-1)}$.

4 Tracé des courbes des premières fonctions puissances



5 Exercices

1. Déterminer des valeurs approchées de :
   a. $\dfrac{1}{1,0005}$; b. $\dfrac{1}{0,99998}$; c. $\dfrac{1}{2,0004}$.
   Comparer avec les résultats donnés par une calculatrice.

   Solution du b.
   On a : $\dfrac{1}{0,99998} = \dfrac{1}{1-0,00002} \approx 1 + 0,00002 = 1,00002.$
   La calculatrice donne : $\dfrac{1}{0,99998} \approx 1,00002$
   (en fait, on a : $\dfrac{1}{0,99998} \approx 1,0000200004000080001600...$).

2. Déterminer une approximation du premier ordre de $\dfrac{1}{2+h}$ quand h est voisin de 0 .

Solution 1 : Puisque $\dfrac{1}{1+h} \simeq 1-h$ en 0, on a, lorsque h est voisin de 0, $\dfrac{1}{2+h} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{2}} \simeq \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{h}{2}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{h}{4}$.

Solution 2 : Puisque le nombre dérivé en 2 de la fonction inverse est $-\dfrac{1}{4}$, on a $\dfrac{1}{2+h} \simeq \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}h$ quand h est voisin de 0 .

3. Déterminer de même une approximation du premier ordre de $\dfrac{3}{2-h}$ quand h est voisin de 0.
4. On reprend l'approximation du premier ordre en 0 $\dfrac{1}{1+h} \simeq 1-h$. Vérifier directement que l'écart $e(h) = \dfrac{1}{1+h}-(1-h)$ est négligeable devant h , c'est-à-dire que $\dfrac{e(h)}{h}$ tend vers 0 quand h tend vers 0.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C) de la fonction inverse, f , au point d'abscisse $-\dfrac{1}{3}$. Soit g la fonction affine représentée par cette droite. Comparer l'ordre de grandeur de h et de $f\left(-\dfrac{1}{3}+h\right)-g\left(-\dfrac{1}{3}+h\right)$ pour $h=10^{-3}$, $h=10^{-5}$, $h=10^{-10}$.
6. Déterminer le nombre dérivé de la fonction inverse, f , en $\dfrac{1}{2}$ et une équation de la tangente à (C) (courbe de la fonction inverse) au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. Vérifier que $f'(2).f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. Plus généralement, que vaut $f'(a).f'\left(\dfrac{1}{a}\right)$ pour $a \in \mathbb{R}^*$? Expliquer ce résultat en faisant intervenir la symétrie de (C) par rapport à la première bissectrice des axes. Faire un dessin en faisant apparaître (C) et ses tangentes aux points d'abscisse 2 et $\dfrac{1}{2}$ ainsi que la première bissectrice des axes.
7. *Construction points par points de la courbe de la fonction inverse.* Soit A et B les points de coordonnées respectives $(1;0)$ et $(0;1)$. A tout réel non nul x , on associe le point H de coordonnées $(x;0)$, l'intersection, K , de l'axe Oy avec la parallèle à la droite (HB) passant par A et le point M ayant même abscisse que H et même ordonnée que K . Montrer que, lorsque x décrit $\mathbb{R}^*$, le point M décrit la courbe (C) de la fonction inverse.
8. Soit f la fonction inverse. Le but de l'exercice est de chercher une fonction, g , polynôme de degré inférieur ou égal à 2 telle que $f(1+h)-g(1+h)$ soit négligeable devant h^2 quand h tend vers 0.
   a. Vérifier que $\dfrac{1}{1+h} = 1-h+h^2-\dfrac{h^3}{1+h}$.
   b. Montrer que si $g(x)$ un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 2, alors $g(1+h)$ est un polynôme en h de degré inférieur ou égal à 2.
   c. Montrer que g est solution du problème si et seulement si $g(1+h) = 1-h+h^2$. En déduire que le problème admet une unique solution, g , que l'on précisera. Tracer les courbes de f et de g au voisinage du point

d'abscisse 1 ainsi que leur tangente en ce point et préciser la position relative de ces courbes.

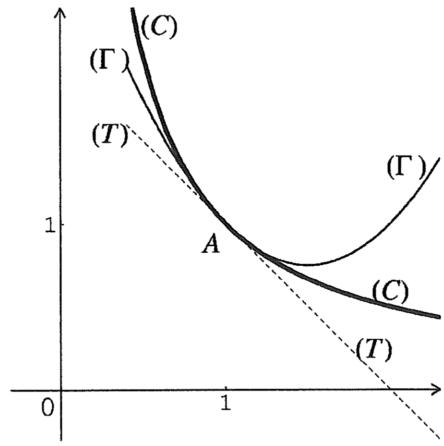
Solution

a. On a $1 - h + h^2 - \dfrac{h^3}{1+h} = \dfrac{1}{1+h} = f(1+h)$.

b. Si $g(x) = ax^2 + bx + c$, alors $g(1+h) = a(1+h)^2 + b(1+h) + c$ est de la forme $a'h^2 + b'h + c'$ avec $a' = a$, $b' = 2a + b$, $c' = a + b + c$.

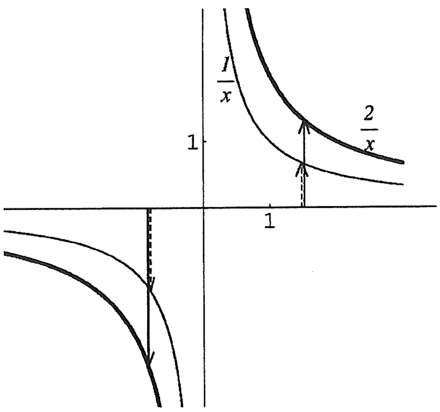
c. La quantité
$$\frac{f(1+h) - g(1+h)}{h^2} = \frac{1 - c' - (1+b')h + (1-a')h^2}{h^2} - \frac{h}{1+h}$$
admet une limite finie lorsque h tend vers 0, seulement si $c' = 1$ et $b' = -1$, cette limite finie étant alors $1 - a'$.
On en déduit le résultat demandé.
La substitution $h = x - 1$ donne alors
$g(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 = x^2 - 3x + 3$ comme unique solution du problème.

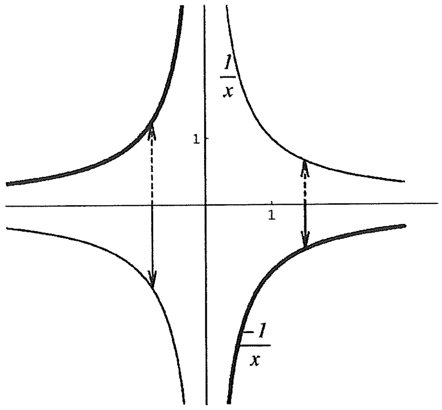
Ceci signifie que la fonction g trouvée est, parmi les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, l'approximation d'ordre 2 de la fonction inverse en 1. Notons que les courbes (C) et (Γ) de f et de g admettent en $A(1\,;1)$ la même tangente, (T), de coefficient directeur -1 (on a $f'(1) = g'(1) = -1$) et que (C) traverse (Γ) en A ; en effet, d'après (1) , si $h < 0$, on a $f(1+h) - g(1+h) > 0$ et (C) est au dessus de (Γ) , alors que pour $0 < h$, c'est le contraire.



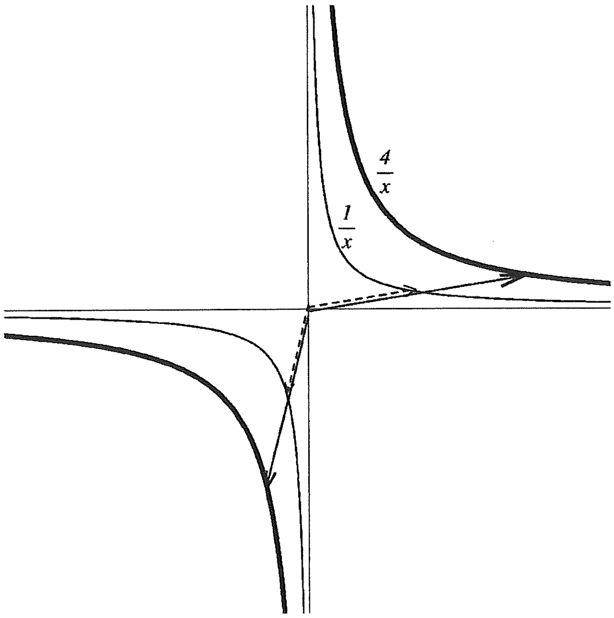
6 Etude des fonctions $x \longmapsto \dfrac{a}{x}$ où a est un réel non nul donné

Les propriétés et le tracé de la courbe d'une telle fonction s'obtiennent, à partir des propriétés et du tracé de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, en notant que pour tout réel non nul, x , on a $\dfrac{a}{x} = a\dfrac{1}{x}$; par exemple, on a représenté, ci-dessous l'obtention des courbes de $x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ et de $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ à partir de celle de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$:





Remarque : Nous observons une forte ressemblance entre les diverses courbes obtenues et celle de la fonction $\frac{1}{x}$. Cela est dû à ce qu'elles sont homothétiques à celle de la fonction $\frac{1}{x}$ (à une symétrie près si a est négatif) : pour $a > 0$, l'équivalence des relations $xy = 1$ et $(\sqrt{a}x)(\sqrt{a}y) = a$ montre que l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{a}$ transforme la courbe de la fonction $\frac{1}{x}$ en celle de la fonction $\frac{a}{x}$. Ces courbes sont appelées hyperboles .
Le dessin ci-contre illustre le cas $a = 4$.



7 Fonctions homographiques

7.1 Définition

Ce sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a , b , c , d sont quatre réels tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ (cette condition assurant que le numérateur et le dénominateur du rapport ne sont pas proportionnels c'est-à-dire que la fonction n'est pas constante).

7.2 Comment placer la courbe d'une fonction homographique

7.2.1 Etude d'un exemple

Montrons sur un exemple comment l'étude d'une fonction homographique se ramène au cas étudié dans le paragraphe précédent.
Soit à étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{4x+1}{2x-3}$.

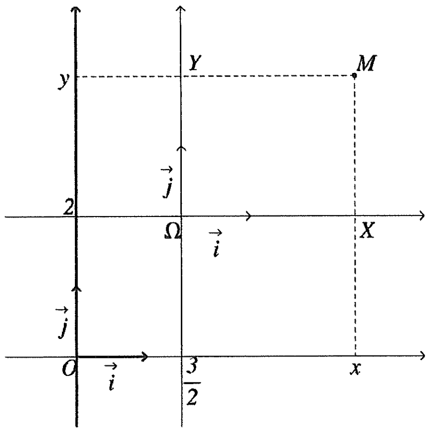
Elle est définie sur chacun des intervalles ouverts $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ et $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ mais pas en $\frac{3}{2}$, valeur qui annule le dénominateur $2x - 3$.
La méthode consiste à faire disparaître la variable, x , du numérateur par simplification, en déterminant α et β pour que $4x + 1 = \alpha(2x - 3) + \beta$. On trouve par identification $\alpha = 2$ et $\beta = 7$. Donc, pour tout réel x différent de $\frac{3}{2}$ on a : $4x + 1 = 2(2x - 3) + 7$ donc

$$\frac{4x+1}{2x-3} = 2 + \frac{7}{2x-3} = 2 + \frac{\frac{7}{2}}{x - \frac{3}{2}} \qquad (1) .$$

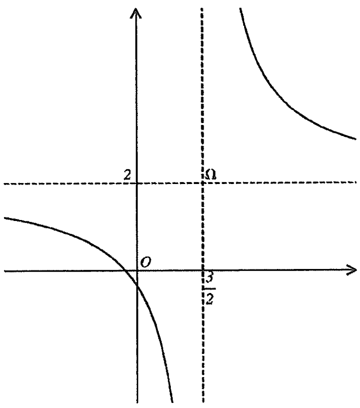
Remarque : Dans le cas général, c n'étant pas nul, on écrit $ax + b = \alpha(cx + d) + \beta$ et on choisit $\alpha = \frac{a}{c}$, β s'en déduit alors facilement.

La relation (1) montre que la fonction étudiée n'atteint jamais la valeur 2 mais mais s'en rapproche autant qu'on veut lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ (par valeurs supérieures à 2 quand $x \longrightarrow +\infty$ et par valeurs inférieures à 2 quand $x \longrightarrow -\infty$).
La fonction $\frac{4x+1}{2x-3}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $\frac{3}{2}$ par valeurs supérieures et tend vers $-\infty$ quand x tend vers $\frac{3}{2}$ par valeurs inférieures.
Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction étudiée dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. D'après (1) une équation de (Γ) dans ce repère est $y = 2 + \frac{\frac{7}{2}}{x - \frac{3}{2}}$.

Posons $X = x - \frac{3}{2}$ et $Y = y - 2$; soit Ω le point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.
Si un point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ce même point a pour coordonnées $\left(X = x - \frac{3}{2}, Y = y - 2\right)$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, car $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM}$.



Ainsi, (Γ) a pour équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $Y = \frac{\frac{7}{2}}{X}$. Nous savons (d'après le 6.) tracer cette courbe qui est une hyperbole .

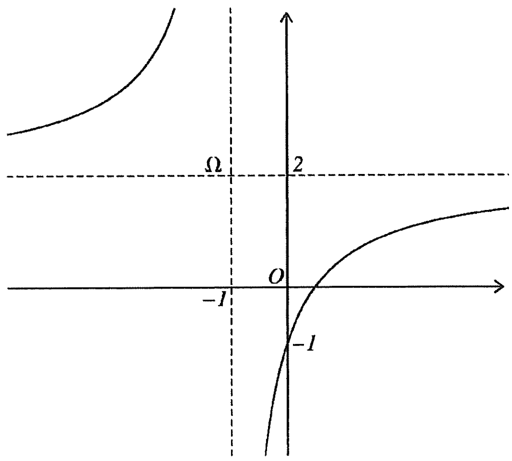


7.2.2 Méthode pour placer la courbe d'une fonction homographique

La méthode précédente, qui peut toujours s'appliquer, permet de voir que la courbe de toute fonction homographique a la forme des courbes étudiées au 6. c'est-à-dire est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes. Donc
il suffit, pour avoir l'allure d'une telle courbe, de déterminer ses asymptotes et un de ses points.

Exemple : Placer la courbe (Γ) , de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 2 . Donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à (Γ). La fonction g n'est pas définie pour $x = -1$, donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à (Γ) . On a $g(0) = -1$. On en déduit l'allure de (Γ) avec ses deux asymptotes se coupant en $\Omega(-1, 2)$.



8 Exercices

1. Placer la courbe de $x \longmapsto \dfrac{3x+2}{-2x+1}$.
2. Quelles sont les asymptotes de la courbe (C) de $x \longmapsto \dfrac{x-1}{0,001x+1}$?

   Placer la partie de (C) relative à $x \in [-2, 2]$.

   Comparer avec la représentation de $x \longmapsto x-1$. Expliquer.
3. a. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$.

   Déterminer $f'(0)$ et la fonction affine tangente à f en 0 (c'est-à-dire la fonction dont la représentation graphique est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0).

   b. Mêmes questions pour la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$.

Solution

a. On a $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{3x}{2}}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{3x}{2}+x\,v(x))=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}x\,v(x)$ où $v(x)$ est une fonction (qu'il est inutile d'expliciter) tendant vers 0 quand x tend vers 0. Donc $f(0)=\dfrac{1}{2}$ et $f'(0)=-\dfrac{3}{4}$, la fonction affine tangente à f en 0 étant $x\longmapsto\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}x$.

b. On a
$$\begin{aligned} g(x) &= (1+2x)f(x)=(1+2x)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}xv(x)\right)\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+x^2u(x)\end{aligned}$$
où $u(x)$ est une fonction qu'il est inutile d'expliciter admettant une limite finie en 0 ; donc $x^2u(x)$ est négligeable devant x quand x tend vers 0 et on a $g(0)=\dfrac{1}{2}$ et $g'(0)=\dfrac{1}{4}$ la fonction affine tangente à g en 0 étant $x\longmapsto\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x$.

Remarque : on peut traiter cet exercice avec les formules sur les dérivées : $g'(x)=\dfrac{2(3x+2)-(2x+1)\,3}{(3x+2)^2}=\dfrac{1}{(3x+2)^2}$; donc $g'(0)=\dfrac{1}{4}$ la fonction affine tangente à g en 0 étant $x\longmapsto\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x$.

4. Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1-x}{2x+3}$. Déterminer $f'(0)$ et une équation de la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse 0 . Déterminer sans nouveau calcul (par des considérations de symétrie) trois autres tangentes. Tracer (C) et ces tangentes.

5. Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{2x+1}{3x+2}$. Déterminer $g'(-1)$ de deux façons.

Solution

Avec les formules de dérivation on obtient
$$g'(x)=\frac{2(3x+2)-(2x+1)\,3}{(3x+2)^2}=\frac{1}{(3x+2)^2}\ ;\ \text{donc}\ g'(-1)=1\ .$$
Directement : On a
$$\begin{aligned} g(-1+h) &= \frac{-1+2h}{-1+3h}=(1-2h)\frac{1}{1-3h}\\ &=(1-2h)(1+3\,h+h\,u(h))\\ &=1+h+h\,v(h)\end{aligned}$$
où $u(h)$ et $v(h)$ sont des fonctions tendant vers 0 quand h tend vers 0 qu'il est inutile d'expliciter. On en déduit que $g'(1)=1$ et, avec $x=-1+h$ que la fonction affine tangente à g en -1 est $x\longmapsto x+2$.

6. Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1-x}{2x+3}$. Déterminer de deux façons $f'(1)$ et une équation de la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse 1 . Tracer (C) et cette tangente.

7. Déterminer le réel a pour que les courbes de $x\longmapsto 2x^2+x+1$ et de $x\longmapsto\dfrac{x+a}{2x+a}$ admettent au point d'abscisse 0 la même tangente. Placer alors ces courbes et cette tangente.

F

Fonctions circulaires

Fonctions circulaires

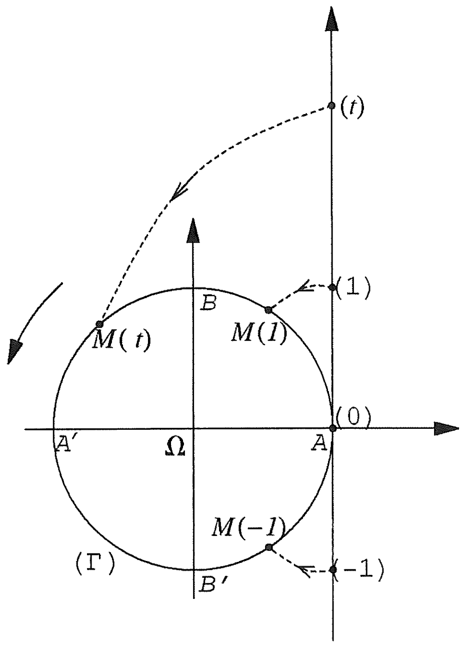
On présente ici les fonctions trigonométriques, appelées aussi fonctions circulaires.
Le point de vue adopté pour introduire les fonctions sinus et cosinus, par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, essaie de rendre compte, de manière imagée, d'un résultat dont la démonstration dépasse le cadre de ce document.
Les principales propriétés des fonctions trigonométriques sont ensuite exposées de la façon la plus élémentaire possible.

Table des matières

1 Définition

1.1 Image d'un nombre réel sur le cercle trigonométrique

Dans le plan rapporté à un système d'axes orthonormé d'origine Ω, on considère le cercle (Γ) de centre Ω et de rayon 1 que l'on oriente dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (le sens ainsi choisi est appelé sens positif) ; on note A le point de (Γ) de coordonnées $(1,0)$. Le cercle (Γ) est alors appelé cercle trigonométrique.
On considère par ailleurs un axe, l'unité de cet axe étant le rayon du cercle trigonométrique (sur la figure ci-contre l'axe est la tangente en A à Γ orientée vers le haut, l'origine de l'axe étant le point A) ; les points de cet axe sont identifiés à leur abscisse (notée entre parenthèses sur la figure). On se représente cet axe, comme un fil que l'on enroule sur (Γ) de façon que (0) reste sur A et que la partie positive (resp. négative) du fil s'enroule dans le sens positif (resp. négatif). Le nombre réel (t) du fil vient alors coïncider avec un point $M(t)$ de (Γ) . On dit que $M(t)$ est l'image du nombre réel t sur le cercle trigonométrique.



Remarque. On dit aussi qu'une mesure de l'angle au centre $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M(t)})$ est t radians (i.e. t fois le *rayon* de (Γ)) ; (2π) radians correspond ainsi à 360 degrés.

Dans la suite, on ne fera plus apparaître le fil que l'on pourra, en cas de besoin, se représenter mentalement ; on ne représentera que le point $M(t)$, image du nombre réel t sur le cercle trigonométrique.

Comme le périmètre de (Γ) est $2\pi.1 = 2\pi$, l'image sur (Γ) de 2π est A qui est aussi l'image de -2π et, plus généralement, de tout nombre réel de la forme $k2\pi$ où k est un entier relatif quelconque (et seulement des nombres de cette forme).
De même, si t_0 est un nombre réel quelconque, les nombres de la forme $t_0 + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ont tous la même image, $M_0(t_0)$, sur (Γ) et ils sont les seuls à avoir cette image sur (Γ) .

L'image sur (Γ) de $\frac{\pi}{2}$ est le point B de coordonnées $(0,1)$; celle de $-\frac{\pi}{2}$, le point B' de coordonnées $(0,-1)$, celle de π le point A' de coordonnées $(-1,0)$, etc..

1.2 Exercice

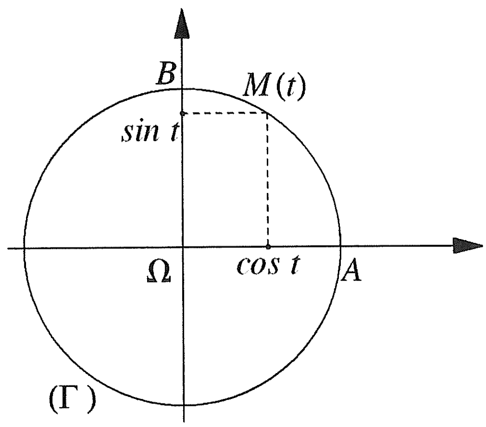
Placer les images sur (Γ) des nombres suivants :

a. $\dfrac{44\pi}{3}$; b. $-\dfrac{5\pi}{6}$; c. $\dfrac{3\pi}{4}$; d. $\dfrac{51\pi}{2}$; e. $-\dfrac{2001\pi}{6}$.

Solution du a. On a $\dfrac{44\pi}{3} = \dfrac{(6\times 7+2)\pi}{3} = 7\times 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$; l'image de $7\times 2\pi$ est le point A ; celle de $\dfrac{44\pi}{3}$ est donc le point J aux $\dfrac{2}{3}$ de l'arc d'origine A et d'extrémité A' : l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega J})$ vaut 120 degrés et le triangle $\Omega J A'$ est équilatéral (faire une figure).

1.3 Définition de $\cos t$, $\sin t$, $\tan t$

Soit t un nombre réel et $M(t)$ son image sur (Γ) . On appelle $\cos t$ (resp. $\sin t$) l'abscisse (resp. l'ordonnée) de $M(t)$ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.
La fonction qui associe à tout nombre réel, t, le nombre $\cos t$ est appelée fonction cosinus.
La fonction qui associe à tout nombre réel, t, le nombre $\sin t$ est appelée fonction sinus.
La fonction tangente est la fonction qui associe, quand c'est possible, au nombre réel t le nombre réel $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.



Pour tout t , on a $\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$

en effet, la distance du point M à l'origine est égale à 1.

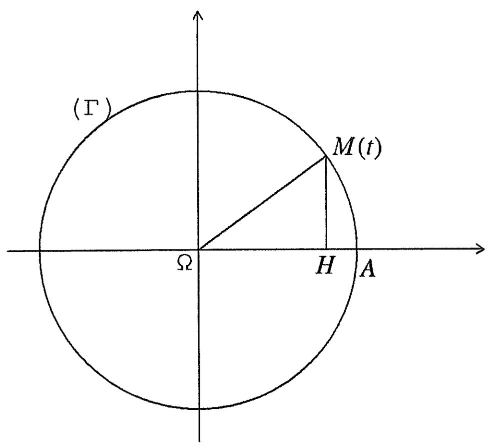
Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle

Soit $M(t)$ l'image sur (Γ) d'un nombre réel t de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et le triangle ΩHM où H est la projection orthogonale de M sur l'axe (Ω, A) . L'angle $\widehat{H\Omega M}$ correspond alors à t radians; avec les formules traditionnelles de la trigonométrie dans le triangle rectangle, on a :

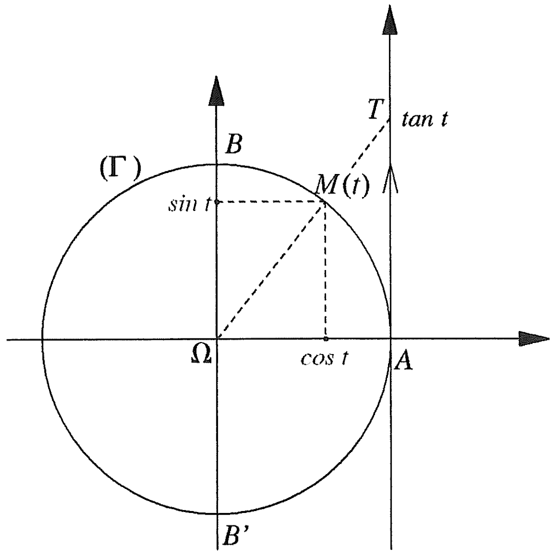
$\cos \widehat{H\Omega M} = \dfrac{\Omega H}{\Omega M} = \dfrac{\Omega H}{1} = \Omega H$

et nous avons défini $\cos t$ comme étant ΩH .
On constate de même que $\sin \widehat{H\Omega M} = \sin t$ et $\tan \widehat{H\Omega M} = \tan t$.

Le présent abord des fonctions trigonométriques est donc cohérent avec la trigonométrie dans le triangle rectangle et apparaît ainsi comme un prolongement de celle-ci.



Axe des tangentes



Soit T l'intersection de la droite $(\Omega M(t))$ avec la tangente en A à (Γ) . Le coefficient directeur de la droite $(\Omega M(t))$ est $\dfrac{\sin t}{\cos t} = \tan t$; donc l'ordonnée de T est $\tan t$: $\overrightarrow{AT} = (\tan t)\overrightarrow{\Omega B}$. On dit que l'axe de repère $(A, \overrightarrow{\Omega B})$ est l'axe des tangentes, car on y lit facilement les tangentes ; de même l'axe $(\Omega, \overrightarrow{\Omega A})$ est l'axe des cosinus et l'axe $(\Omega, \overrightarrow{\Omega B})$ celui des sinus.

$\tan t$ existe si et seulement si l'image, M , de t sur (Γ) est distincte des points $B(0,1)$ et $B'(0,-1)$ c'est-à-dire si et seulement si t n'est pas la somme de $\dfrac{\pi}{2}$ et d'un nombre entier de fois le demi-périmètre de (Γ) c'est-à-dire si et seulement si $t \in \mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque : ne pas confondre le fil et l'axe des tangentes.

Remarque : La fonction cotangente, notée cotan , est la fonction définie par $\text{cotan } t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$; quand $\tan t$ existe et n'est pas nul, on a $\text{cotan } t = \dfrac{1}{\tan t}$. Si T' est l'intersection de la droite (Ω, M) avec l'axe de repère $(B, \overrightarrow{\Omega A})$, alors $\overrightarrow{BT'} = (\text{cotan } t)\overrightarrow{\Omega A}$ (faire un dessin et le démontrer).

1.4 Valeurs remarquables

On notera $M(t)$ l'image du réel t sur (Γ) et on utilise les points Ω , A , A' , B définis ci-dessus.

On a $M(0) = A$, donc $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\tan 0 = 0$.

On a $M(\dfrac{\pi}{2}) = B$, donc $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\tan \dfrac{\pi}{2}$ n'existe pas.

Le point $M(\dfrac{\pi}{3})$ est au tiers de l'arc de (Γ) d'extrêmités A et A' contenant B . L'angle de sommet Ω du triangle $\Omega A M(\dfrac{\pi}{3})$ est donc 60° et ce triangle est donc équilatéral ; on en déduit

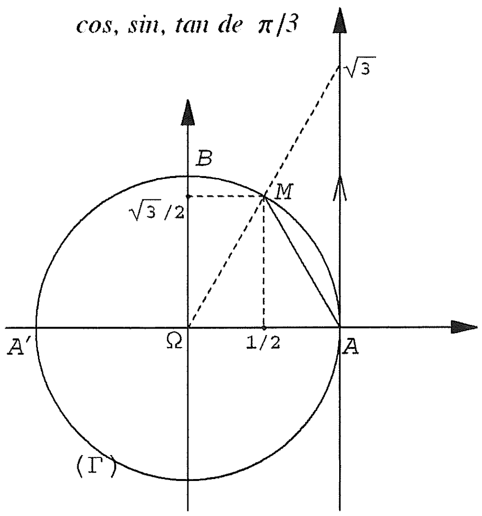
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \ .$$

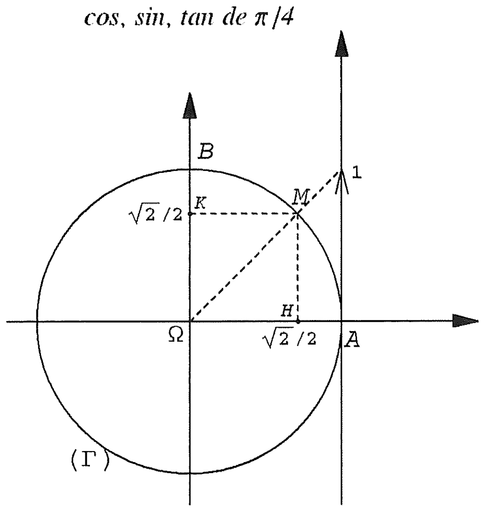
Le point $M(\dfrac{\pi}{4})$ (noté ici simplement M) est au milieu de l'arc de (Γ) d'extrêmités A et B. Donc la droite (ΩM) est la bissectrice des axes et, en notant H et K les projections de M sur l'axe des cosinus et des sinus (respectivement), ΩHMK est un carré dont la diagonale vaut 1 ; on en déduit

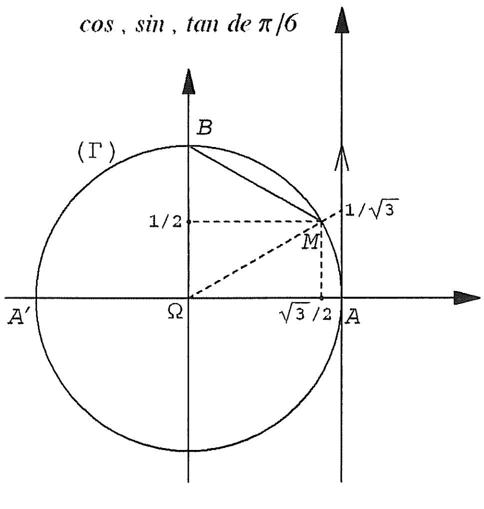
$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1 \ .$$

Le point $M(\dfrac{\pi}{6})$ est au sixième de l'arc de (Γ) d'extrêmités A et A' contenant B . L'angle de sommet Ω du triangle $\Omega B M(\dfrac{\pi}{6})$ est donc 60° et ce triangle est donc équilatéral ; on en déduit

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad \tan \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$





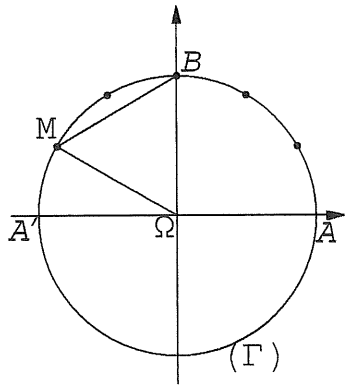


On obtient le tableau des valeurs remarquables (qu'il faut connaître parfaitement) :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$

Exercices.

1. Déterminer a. $\sin\dfrac{5\pi}{6}$; b. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$ c. $\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$.



Solution du a.

L'image, M , de $\dfrac{5\pi}{6}$ est aux $\dfrac{5}{6}$ ièmes de l'arc d'origine A et d'extrémité A' . Donc le triangle ΩBM est équilatéral car son angle en Ω vaut 60 degrés. On en déduit

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad ; \quad \cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \tan\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad .$$

2. Résoudre sur $[-2\pi, 2\pi]$:

a. $\sin x = 1$; b. $\sin x > 0$; c. $\tan x = -1$; d. $\tan x < -1$; e. $-\dfrac{1}{2} < \sin x < \dfrac{1}{2}$.

2 Propriétés

2.1 Arcs associés

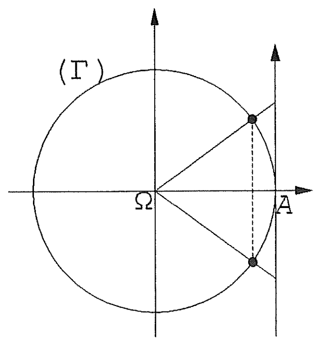
2.1.1 Périodes

Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π .
La fonction tan est périodique de période π .

Pour tout nombre réel x les images sur (Γ) de x et de $x+2\pi$ sont confondues ; on a donc
$\boxed{\cos(x+2\pi)=\cos x}$ et $\boxed{\sin(x+2\pi)=\sin x}$;
Pour tout x de $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \;/k\in\mathbb{Z}\right\}$, les images sur (Γ) de x et de $x+\pi$ sont symétriques par rapport à Ω . Donc $\boxed{\tan(x+\pi)=\tan x}$.

2.1.2 Parités

La fonction cos est paire.
Les fonctions sin et tan sont impaires.

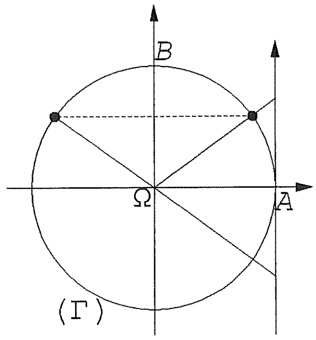


Pour tout x, les images sur (Γ) de x et de $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe $(\Omega, \overrightarrow{\Omega A})$; donc
$\boxed{\cos(-x)=\cos x}$, $\boxed{\sin(-x)=-\sin x}$
et, si $\tan x$ existe , $\boxed{\tan(-x)=-\tan x}$.

2.1.3 Arcs associés x et $\pi - x$

Pour tout x, les images sur (Γ) de x et de $\pi - x$ sont symétriques par rapport à l'axe $(\Omega, \overrightarrow{\Omega B})$; donc

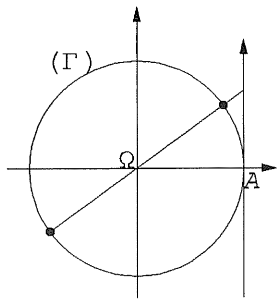
$\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$;
et si $\tan x$ existe , $\tan(\pi - x) = -\tan x$.



2.1.4 Arcs associés x et $\pi + x$

Pour tout x, les images sur (Γ) de x et de $\pi + x$ sont symétriques par rapport à Ω ; donc

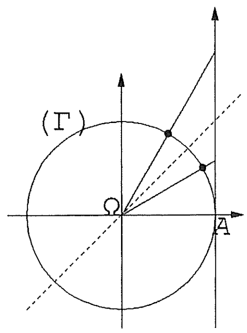
$\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$
et, si $\tan x$ existe , $\tan(\pi + x) = \tan x$.



2.1.5 Arcs associés x et $\frac{\pi}{2} - x$

Pour tout x, les images sur (Γ) de x et de $\frac{\pi}{2} - x$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes ; donc

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
et, si $\tan x$ existe , $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$.



2.1.6 Arcs associés x et $\frac{\pi}{2}+x$

On a d'après 2.1.3 et 2.1.5 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x$ et

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$.

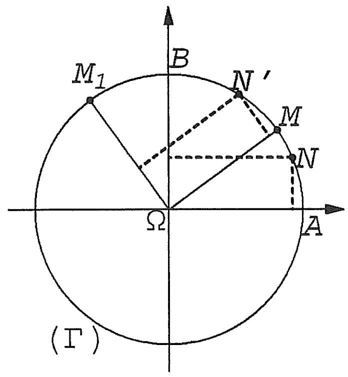
On en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

et, si $\tan x$ existe et est non nul, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\frac{1}{\tan x}$.

2.2 Formules d'addition.

Soit x et y deux nombres réels et M , N , N' , M_1 les images sur (Γ) de x , y , $x+y$, $\frac{\pi}{2}+x$ respectivement. Par la rotation de centre Ω et d'angle x , le repère (Ω, A, B) se change en (Ω, M, M_1) et le point N devient le point N' ; Les coordonnées $(\cos y, \sin y)$ de N dans le repère (Ω, A, B) sont donc aussi les coordonnées de N' dans le repère (Ω, M, M_1) ; on a donc



$\overrightarrow{\Omega N'} = \cos y\ \overrightarrow{\Omega M} + \sin y\ \overrightarrow{\Omega M_1}$ (1) ;

or, les coordonnées de N' , M et M_1 dans le repère (Ω, A, B) sont respectivement

$$\begin{pmatrix}\cos(x+y)\\ \sin(x+y)\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

On obtient alors, à partir de (1) , les formules :

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y\\ \sin(x+y) &= \cos x\ \sin y + \sin x\ \cos y\end{aligned} .$$

Remarque : Ces formules peuvent être mémorisées en les "recoupant" avec d'autres : par exemple, avec $y=-x$, on obtient $\cos 0 = 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, compte tenu que cos est paire et sin impaire.

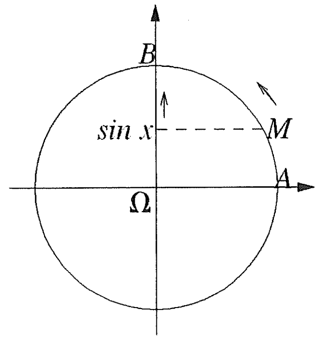
On a aussi :

$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\cos x\ \sin y + \sin x\ \cos y}{\cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y} = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$;

en divisant numérateur et dénominateur par $\cos x\ \cos y$.

3 Etude de la fonction sinus

3.1 Sens de variation de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



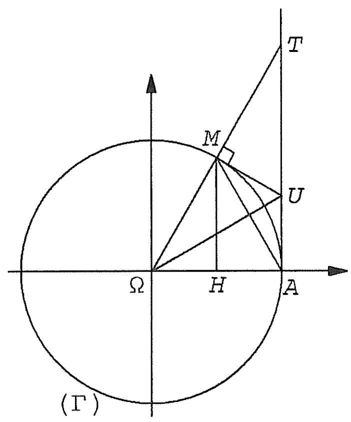
Quand le nombre réel x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ son image, M, sur le cercle trigonométrique (Γ) décrit l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de A vers B ; donc son ordonnée, $\sin x$, croît de 0 à 1 :

La fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On montre de même qu'elle croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$,...
On peut aussi montrer ces résultats avec le signe de la dérivée, voir 3.3.

3.2 Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0

La limite, quand x tend vers 0 par valeurs positives, de $\frac{\sin x}{x}$ est 1.



Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, M l'image de x sur (Γ) , H la projection orthogonale de M sur l'axe $(\Omega, \overrightarrow{\Omega A})$, T l'intersection de la droite (Ω, M) avec la tangente en A à (Γ) (c'est-à-dire le point de coordonnées $(1, \tan x)$) et U l'intersection des tangentes à (Γ) en A et M . La longueur, x , de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ de (Γ) est comprise entre la corde AM et $AU + UM$.
On en déduit
$\sin x = HM < AM < x < AU + UM \leq AU + UT$ car le triangle UMT est rectangle d'hypoténuse UT ; on obtient ainsi $\sin x < x < \tan x$, d'où $\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x}$
et, donc, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$; or quand x tend vers 0, M tend vers A et $\cos x$ tend vers 1. La limite, quand x tend vers 0 par valeurs positives, de $\frac{\sin x}{x}$ est donc 1.

Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, on écrit : $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$;
on en déduit que la limite, quand x tend vers 0 par valeurs négatives, de $\frac{\sin x}{x}$ est aussi 1.

On a ainsi obtenu le résultat : $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$.

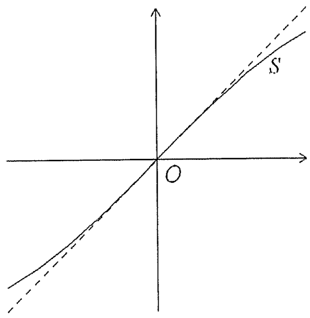
On retiendra l'approximation du premier ordre : $\sin x \simeq x$, quand x est voisin de 0.

3.3 Dérivée de la fonction sinus

3.3.1 Le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 est égal à 1

Cela résulte immédiatement de la limite précédente : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = 1$.

La représentation graphique, $\mathcal{S}$, de sinus admet donc à l'origine la première bissectrice des axes comme tangente ; comme $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \sin x < x$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\quad x < \sin x$, on a le dessin ci-contre (ce qui est cohérent avec le fait que sinus est impaire)



3.3.2 La fonction dérivée de la fonction sinus est la fonction cos

Soit a un nombre réel fixé et h un nombre réel non nul de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
On a, avec la formule d'addition du 2.2. relative au sinus :

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \sin a \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \frac{\sin h}{h} \ ;$$

On peut écrire : $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin h}{h} \frac{1}{1 + \cos h} \sin h$;

Or $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$; $\lim_{h\to 0} \sin h = 0$; $\lim_{h\to 0} (1 + \cos h) = 2$;

On en déduit : $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = (\sin a) \times 0 + (\cos a) \times 1 = \cos a$.

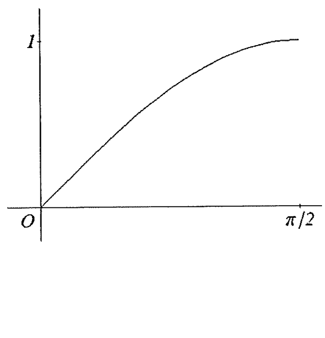
Ainsi pour tout réel a le nombre dérivé de sinus en a est $\cos a$:

la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de sinus est la fonction cosinus .

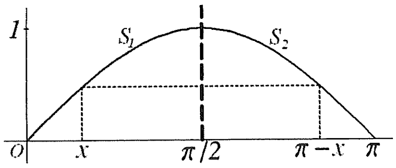
3.4 Courbe de la fonction sinus

Soit $\mathcal{S}$ la courbe (appelée sinusoïde) de la fonction sinus.

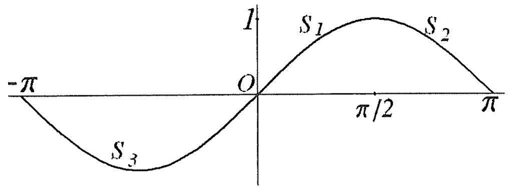
Des résultats du 3.1 et du 3.3, on déduit la partie, $\mathcal{S}_1$, de $\mathcal{S}$ relative à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec la première bissectrice des axes comme tangente en O et une tangente horizontale au point $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$:



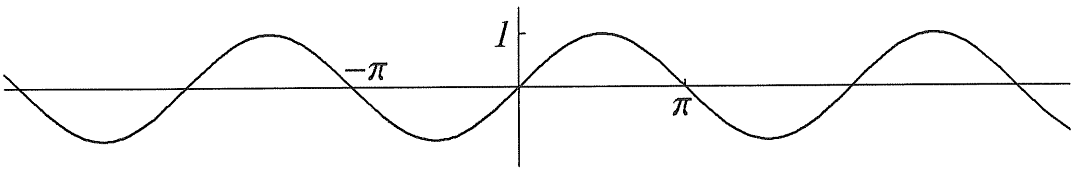
Comme on a, d'après le 2.1.3, pour tout x de $[0,\pi]$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, la partie $\mathcal{S}_2$ de $\mathcal{S}$ relative à $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ est symétrique de $\mathcal{S}_1$ par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$:



Comme, d'après le 2.1.2, la fonction sinus est impaire
(pour tout x de $[-\pi,\pi]$, $\sin(-x) = -\sin x$), la partie $\mathcal{S}_3$ de $\mathcal{S}$ relative à $[-\pi,0]$ est symétrique de $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ par rapport à l'origine :



Comme, d'après 2.1.1, la fonction sinus est (2π)-périodique, on obtient $\mathcal{S}$ toute entière, à partir de $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$, en effectuant des translations de vecteurs $k2\pi\vec{i}$ où k décrit $\mathbb{Z}$:



3.5 La fonction sinus est concave sur $[0,\pi]$

Soit a et b deux nombres réels tels que $0 \leq a < b \leq \pi$ et A et B les points de $\mathcal{S}$ de coordonnées respectives $(a, \sin a)$ et $(b, \sin b)$. Le problème revient à montrer que l'arc de $\mathcal{S}$ d'extrémités A et B est au dessus du segment $[A,B]$, c'est-à-dire que la fonction φ définie par $\varphi(x) = \sin x - \left(\sin a + \frac{\sin b - \sin a}{b-a}(x-a)\right)$ est positive sur $[a,b]$.

On a : $\varphi'(x) = \cos x - \frac{\sin b - \sin a}{b-a}$ et, d'après le 4.1, $\varphi''(x) = -\sin x$.

La fonction φ' est donc strictement décroissante sur $[a,b]$ et on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. En considérant les variations de φ en envisageant les situations possibles pour le signe de φ' , on en déduit que φ est positive sur $[a,b]$, ce qui permet de conclure.

4 Etude de la fonction cosinus

4.1 Dérivée de la fonction cosinus

La dérivée de la fonction cosinus est l'opposé de la fonction sinus : $\cos' = -\sin$

On sait que, si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction g définie par $g(x) = f(ax+b)$ (où a et b sont deux nombres réels quelconques) est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = af'(ax+b)$.

On a vu au 2.1.6 que, pour tout nombre réel x , on a $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

La fonction cosinus est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$\cos' x = 1.\sin'\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, toujours d'après 2.1.6.

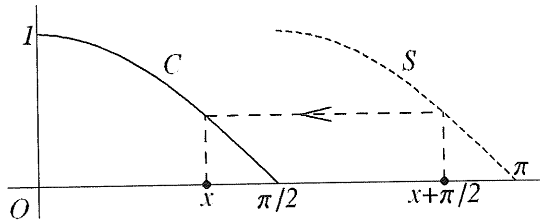
4.2 Courbe de la fonction cosinus

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction cosinus.

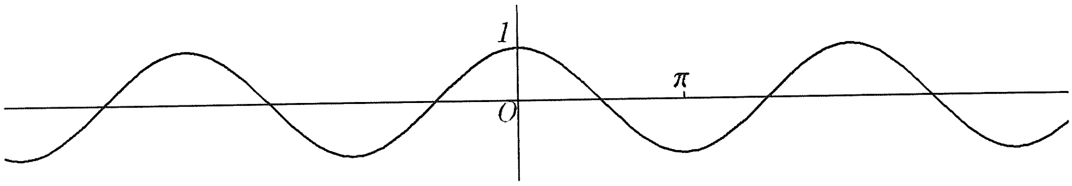
Comme pour tout nombre réel x, on a (2.1.6),

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

la partie de $\mathcal{C}$ relative à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, s'obtient à partir de la partie de la courbe $\mathcal{S}$ de la fonction sinus relative à $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ par la translation de vecteur $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$:



Plus généralement, la courbe $\mathcal{C}$ est l'image de $\mathcal{S}$ par la translation de vecteur $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$; on obtient donc comme courbe de cosinus :



5 Étude de la fonction tangente

5.1 Dérivée et sens de variation de la fonction tangente

Notons $\mathcal{D}_{\tan}$, l'ensemble de définition de la fonction $\tan$.

La fonction $\tan$ est dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan}$, et on a, pour tout $t \in \mathcal{D}_{\tan}$: $\tan' t = 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

En effet, $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, donne $\tan' t = \dfrac{\cos^2 t - \sin t(-\sin t)}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

Ainsi, sur chacun des intervalles où elle est définie, la fonction $\tan$ est strictement croissante (sa dérivée étant strictement positive).

Elle est notamment strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque : On peut "voir" ce résultat avec les notations et la figure de la fin du paragraphe 1.3, page 4 : lorsque t décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en croissant, M décrit l'arc $\overset{\frown}{B'B}$ de B' (exclu) vers B (exclu) et T décrit l'axe des tangentes de $-\infty$ à $+\infty$, donc $\tan t$ décrit $\mathbb{R}$ en croissant.

5.2 Approximation de la fonction tangente en 0

Le résultat du paragraphe précédent montre que $\tan' 0 = 1$, donc que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

(ce que l'on peut aussi voir avec $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{\cos x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$).

On retiendra l'approximation du premier ordre : $\tan x \simeq x$ quand x est voisin de 0 .

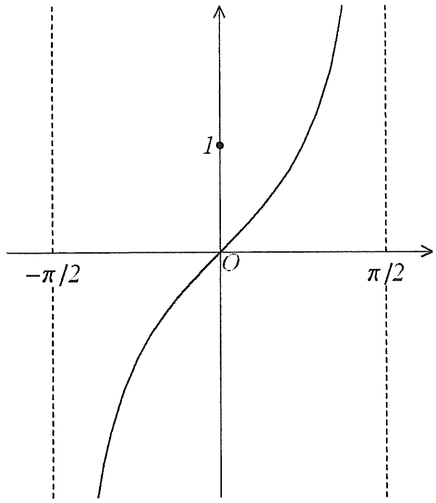
On en déduit aussi que la droite tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\tan}$ de la fonction tangente à l'origine est la première bissectrice des axes.

5.3 Courbe de la fonction tangente

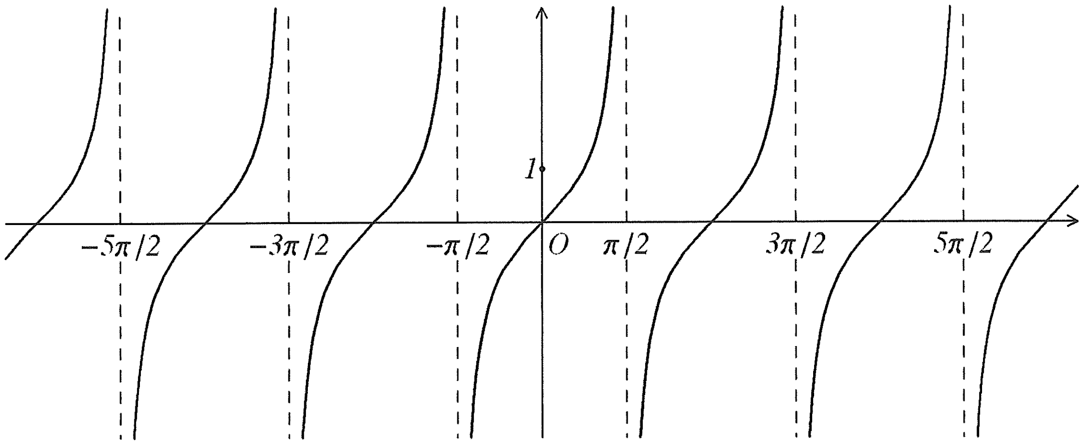
Lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures ($x < \frac{\pi}{2}$), la limite de $\sin x$ est 1 et $\cos x$ tend vers 0 en étant positif; donc la limite de $\tan x$ est $+\infty$ et la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_{\tan}$ de de la fonction tangente.

On montre de même que la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_{\tan}$ de la fonction tangente lorsque x tend $-\frac{\pi}{2}$.

On déduit de ces résultats et de ceux des deux paragraphes précédents l'allure de $\mathcal{C}_{\tan}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:



puis, en utilisant le fait que tan est π-périodique, sur $\mathcal{D}_{\tan}$:



6 Calcul à l'aide des fonctions élémentaires des valeurs approchées avec une précision imposée de $\cos x$ et de $\sin x$

6.1 Principe

Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$v_1(x) = \cos x - 1 \qquad v_2(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} \qquad v_3(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$$

$$u_1(x) = \sin x - x \qquad u_2(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}$$

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n!$ désigne le produit de tous les entiers compris entre 1 et n : par exemple $3! = 1.2.3 = 6$, $4! = 1.2.3.4 = 24$ et que, dire qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ est positive (resp. négative) signifie que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a $f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) \leq 0$) .

On a $\quad u_1'(x) \underset{(1)}{=} v_1(x) \quad ; \quad v_2'(x) \underset{(2)}{=} -u_1(x) \quad ; \quad u_2'(x) \underset{(3)}{=} v_2(x) \quad ; \quad v_3'(x) \underset{(4)}{=} -u_2(x)$.

v_1 étant négative, (1) montre que u_1 est décroissante; or $u_1(0) = 0$; donc u_1 est négative.
u_1 étant négative, (2) montre que v_2 est croissante; or $v_2(0) = 0$; donc v_2 est positive.
v_2 étant positive, (3) montre que u_2 est croissante; or $u_2(0) = 0$; donc u_2 est positive.
u_2 étant positive, (4) montre que v_3 est décroissante; or $v_3(0) = 0$; donc v_3 est négative.

On en déduit que, sur $\mathbb{R}^+$, on a :
$$\left\{\begin{array}{ll} x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x & (u_2 \geq 0 \quad ; \quad u_1 \leq 0) \\ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} & (v_2 \geq 0 \quad ; \quad v_3 \leq 0) \end{array}\right.$$

En raisonnant de même avec les fonctions :

$$v_3(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \qquad v_4(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \qquad v_5(x) = v_4(x) - \frac{x^8}{8!}$$

$$u_3(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \qquad u_4(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}$$

on obtient, puisque $v_3 \leq 0$, $u_3' = v_3$, $v_4' = -u_3$, $u_4' = v_4$, $v_5' = -u_4$ et que u_3 , v_4 , u_4 et v_5 s'annulent pour 0 :
$$\left\{\begin{array}{l} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \\ 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} \end{array}\right.$$

En continuant cette méthode, on obtient (on peut effectuer une démonstration par récurrence) que pour tout entier $m \geq 1$ et pour tout nombre réel positif x , on a :
$$\left\{\begin{array}{l} x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots - \dfrac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots - \dfrac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} + \dfrac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \\ 1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots - \dfrac{x^{4m-2}}{(4m-2)!} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots - \dfrac{x^{4m-2}}{(4m-2)!} + \dfrac{x^{4m}}{(4m)!} \end{array}\right.$$

On obtient ainsi des valeurs approchées de $\sin x$ (resp. $\cos x$) à $\dfrac{x^{4m+1}}{(4m+1)!}$ (resp. $\dfrac{x^{4m}}{(4m)!}$) près.

6.2 Exemples

1. Calculer $\sin 1$ à 10^{-6} près.

On a : $\dfrac{1^{4m+1}}{(4m+1)!} < 10^{-6}$ pour $m = 3$. Donc

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} \leq \sin 1 \leq 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \frac{1}{13!}$$

avec $\dfrac{1}{13!} < 10^{-6}$; d'où $\qquad 0,811470 \leq \sin 1 \leq 0,811471$.

2. Calculer $\cos 1,5$ à 10^{-7} près.

On a : $\dfrac{1,5^{4m}}{(4m)!} < 10^{-7}$ pour $m = 4$. Donc

$$1 - \frac{1,5^2}{2!} + \frac{1,5^4}{4!} - \cdots - \frac{1,5^{14}}{14!} \leq \cos 1,5 \leq 1 - \frac{1,5^2}{2!} + \frac{1,5^4}{4!} - \cdots - \frac{1,5^{14}}{14!} + \frac{1,5^{16}}{16!}$$

avec $\dfrac{1,5^{16}}{16!} < 10^{-7}$; d'où $\quad 0,0707372 \leq \cos 1,5 \leq 0,0707373$.

G

Fonctions logarithme et exponentielle

Fonctions logarithme et exponentielle

De même que les fonctions trigonométriques, les fonctions logarithme et exponentielle ne peuvent être définies à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques. Ici nous introduisons le logarithme en nous appuyant sur une notion commune d'aire (que nous ne cherchons pas à approfondir) et nous étudions ces deux fonctions sans faire appel explicitement aux primitives, ni aux équations différentielles.

À part quelques connaissances élémentaires d'analyse, les seuls résultats importants nécessaires sont :

- *le théorème reliant signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction*
- *la convergence des suites adjacentes (dans une annexe qui peut être laissée de côté en première lecture).*

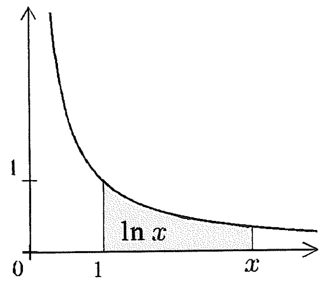
Table des matières

1 Définition et propriétés globales de la fonction logarithme

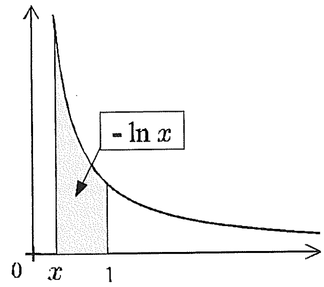
1.1 Définition

Définition : La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ est définie sur $]0,+\infty[$ de la façon suivante :

Si $x \geq 1$, $\ln x$ est l'aire de la région sous la courbe de la fonction inverse entre 1 et x :



Si $0 < x < 1$, $\ln x$ est l'opposé de l'aire de la région sous la courbe de la fonction inverse entre x et 1 :



L'unité d'aire est l'aire du domaine construit par les unités sur les axes. Avec ce choix, l'aire ne dépend pas du système d'axes choisi.

Remarque : $\ln x$ est donc strictement positif si $x > 1$, strictement négatif si $x < 1$, nul pour $x = 1$.

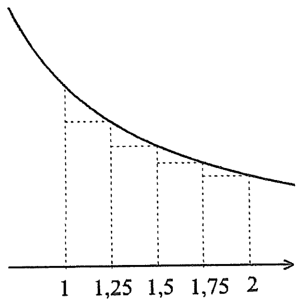
Remarque : L'expression "logarithme népérien " vient de Neper, nom d'un des mathématiciens du 17° siècle dont les travaux sont à l'origine de cette fonction. Il existe d'autres fonctions "logarithme" qui peuvent s'obtenir à partir de $\ln$; elles ne sont pas étudiées ici. Dans la suite, on dira simplement logarithme pour désigner la fonction $\ln$.

1.2 Technique de calcul et allure de la courbe

On peut montrer que $\ln x$ n'est pas calculable exactement à l'aide d'un nombre fini d'additions, multiplications ou divisions, mais on peut obtenir des valeurs approchées, par exemple en calculant approximativement cette aire.

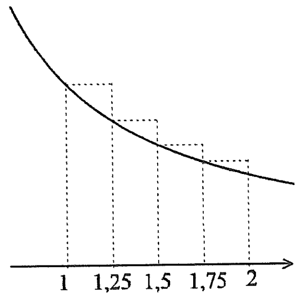
Exemple pour ln 2 : On subdivise l'intervalle $[1 ; 2]$ en 4 intervalles :

$\ln 2$ est supérieur à la somme des aires des 4 rectangles ci-dessous :



$$0,25\frac{1}{1,25}+0,25\frac{1}{1,5}+0,25\frac{1}{1,75}+0,25\frac{1}{2}<\ln 2$$

$\ln 2$ est inférieur à la somme des aires des 4 rectangles ci-dessous :



$$\ln 2<0,25\frac{1}{1}+0,25\frac{1}{1,25}+0,25\frac{1}{1,5}+0,25\frac{1}{1,75}$$

On obtient : $0,63<\ln 2<0,76$. Avec la demi-somme, on a $\ln 2\approx 0,69$ à 0,07 près.

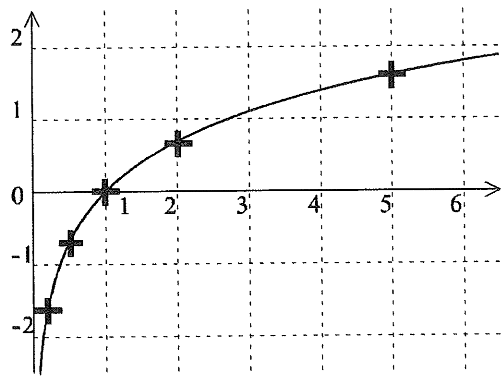
Il est possible d'améliorer la précision en augmentant le nombre d'intervalles, et on peut programmer les calculs sur ordinateur.

Des algorithmes de calcul approché plus performants (plus rapides) sont programmés dans les calculatrices. Autrefois, on utilisait des tableaux imprimés parfois sur des centaines de pages d'un livre, sur lesquelles on avait noté, une bonne fois pour toutes, des valeurs approchées ; c'est ce qu'on appelait les "tables de logarithme".

On obtient par exemple :

x	0,2	0,5	1	2	5
$\ln x$	≈ -1,6	≈ - 0,7	0	≈ 0,7	≈ 1,6

En mettant beaucoup de points, on obtient l'allure de courbe ci-contre.



(On peut remarquer que $\ln 0,5\approx -\ln 2$; ceci s'expliquera par la suite, on verra qu'il y a égalité).

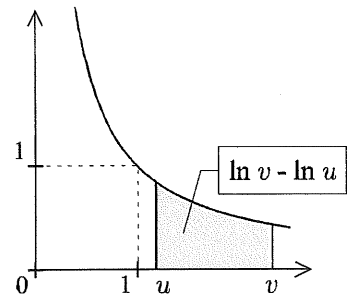
1.3 Étude des variations

Interprétation géométrique de la variation de $\ln$ entre deux nombres

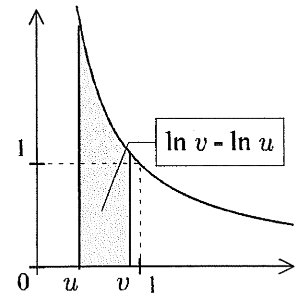
Lorsque $0<u<v$, $\ln v-\ln u$ est l'aire sous la courbe de la fonction inverse quand l'abscisse est comprise entre u et v .

Notons $\text{aire}(u,v)$ cette aire.

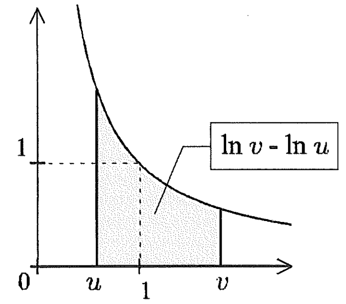
Si $1 \leq u < v$,
$\ln v - \ln u = \text{aire}(1,v) - \text{aire}(1,u) = \text{aire}(u,v)$.



Si $0 < u < v \leq 1$,
$\ln v - \ln u = -\text{aire}(v,1) + \text{aire}(u,1) = \text{aire}(u,v)$.



Si $0 < u \leq 1 \leq v$,
$\ln v - \ln u = \text{aire}(1,v) + \text{aire}(u,1) = \text{aire}(u,v)$.



Sens de variation

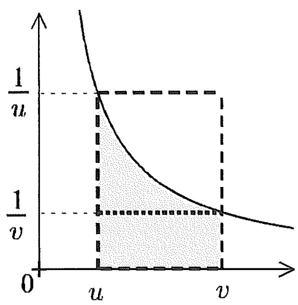
La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

L'aire étant toujours strictement positive, on a $\ln u < \ln v$ dès que $u < v$.

Encadrement des variations

Pour tous nombres réels strictement positifs u et v, on a : $\frac{1}{v}(v-u) \leq \ln v - \ln u \leq \frac{1}{u}(v-u)$.

Dans le cas $u < v$, on encadre $\text{aire}(u,v)$ par les aires de 2 rectangles de base $[u\,,\,v]$, l'un de hauteur $\frac{1}{v}$ et l'autre de hauteur $\frac{1}{u}$, d'où
$\frac{1}{v}(v-u) \leq \text{aire}(u,v) \leq \frac{1}{u}(v-u)$.

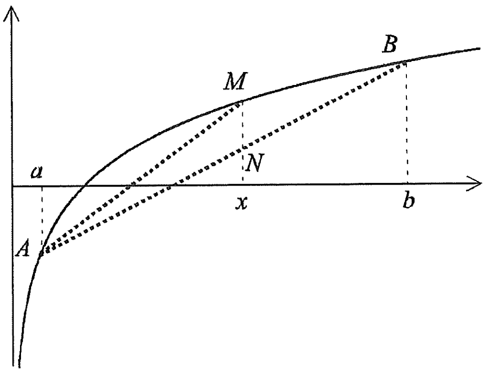


Dans le cas $u > v$, on utilise ce qui précède en échangeant u et v, ce qui conduit au même encadrement.

1.4 Concavité

La fonction $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$.

Soit a, b, x trois nombres de $]0,+\infty[$ tels que $a < x < b$ et considérons les trois points de la courbe $A(a,\ln a)$, $M(x,\ln x)$ et $B(b,\ln b)$. Montrons que le point N d'abscisse x du segment AB est en dessous de M en comparant les coefficients directeurs des droites AB et AM.



Le coefficient directeur de la droite AM, que l'on notera $cd(AM)$ est le taux de variation de ln entre a et x, soit $cd(AM)=\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$. L'encadrement des variations établi plus haut permet d'obtenir $\dfrac{1}{x}\le cd(AM)\le\dfrac{1}{a}$.

On a de même pour celui de la droite MB : $\dfrac{1}{b}\le cd(MB)\le\dfrac{1}{x}$. On en déduit $cd(MB)\le cd(AM)$.

On montre ensuite que $cd(AB)\le cd(AM)$ ainsi :

On écrit d'abord $\ln b-\ln a = (\ln b-\ln x)+(\ln x-\ln a)=cd(MB)(b-x)+cd(AM)(x-a)$.

$(b-x)$ étant positif, on a $cd(MB)(b-x)\le cd(AM)(b-x)$,

d'où $\ln b-\ln a \le cd(AM)(b-x)+cd(AM)(x-a)$,

puis $\ln b-\ln a \le cd(AM)(b-a)$, ce qui entraine $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}\le cd(AM)$.

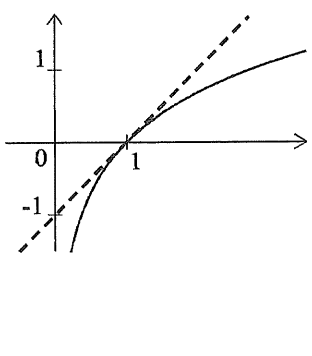
On obtient alors $cd(AB)\le cd(AM)$, ce qui permet de prouver que le point M est au-dessus du point N d'abscisse x de la droite AB (petit exercice sur les fonctions affines).

1.5 Une majoration importante

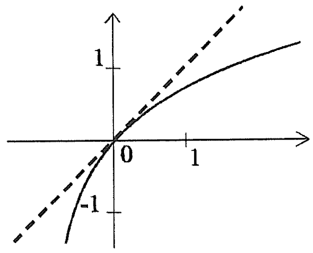
Pour tout nombre x de $]0,+\infty[$, on a : $\ln x\le x-1$.

L'encadrement des variations établi plus haut donne $\dfrac{1}{x}(x-1)\le\ln x-\ln 1\le\dfrac{1}{1}(x-1)$.

Remarque : ceci prouve que la courbe de $\ln$ est toujours en-dessous de la droite d'équation $y=x-1$.



Conséquence : on en déduit que pour tout nombre x de $]-1,+\infty[$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.



2 Définition et propriétés globales de la fonction exponentielle

2.1 Définition

Introduction : la fonction $\ln$ est définie sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $]-\infty,+\infty[$ et on peut montrer qu'elle prend une fois et une seule toutes les valeurs réelles (voir annexe 1). On peut alors considérer la fonction réciproque de $\ln$, de $]-\infty,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$.

Dit de de façon imagée, on utilise "à l'envers" le tableau de valeurs de la fonction $\ln$ pour créer une nouvelle fonction, notée $\exp$, qui est alors la fonction réciproque de $\ln$:

x	0,2	0,5	1	2	5
$\ln x$	≈-1,6	≈- 0,7	0	≈0,7	≈1,6

x	≈-1,6	≈- 0,7	0	≈0,7	≈1,6
$\exp x$	0,2	0,5	1	2	5

Définition : $\exp$ est la fonction réciproque de $\ln$.

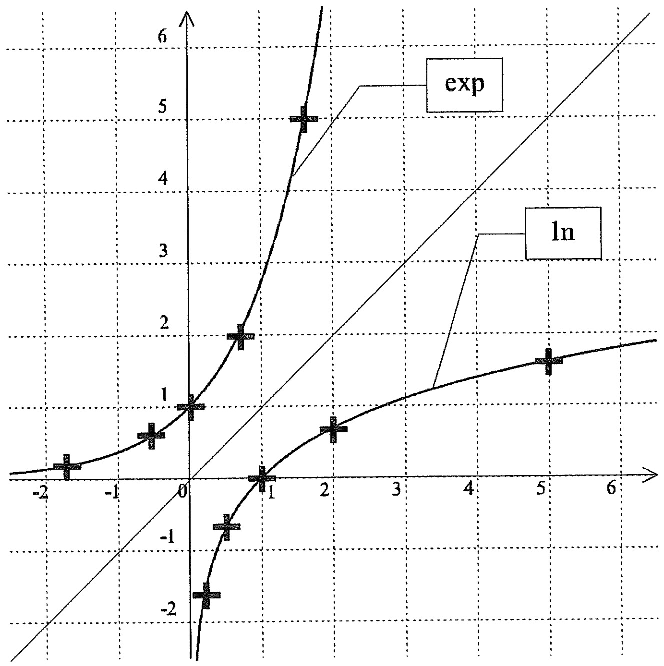
C'est une fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$

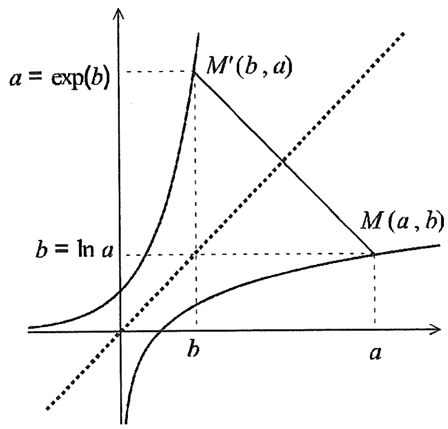
Autrement dit :

$$\text{Si } \ln a = b \text{ (avec } a > 0 \text{), alors } \exp(b) = a.$$

Cas particulier remarquable : on a $\ln 1 = 0$ et donc $\exp(0) = 1$.

Graphiquement, cela revient à placer de nouveaux points à partir de ceux faits pour $\ln$ en échangeant abscisse et ordonnée ; la courbe de $\exp$ est donc la symétrique de celle de $\ln$ par rapport à la droite d'équation $y = x$, parallèlement à celle d'équation $y = -x$ (ces deux droites sont perpendiculaires lorsque le repère est orthonormé).





Les points $M(a, b)$ et $M'(b, a)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Conséquences :

pour tout nombre a de $]0, +\infty[$, on a : $\exp(\ln a) = a$.

pour tout nombre réel b on a : $\ln(\exp(b)) = b$.

2.2 Technique de calcul

Comme pour la fonction $\ln$, on ne peut calculer exactement $\exp(x)$ avec quelques opérations, mais on connait des algorithmes donnant des valeurs approchées ; ils sont programmés dans les calculatrices. L'étude des valeurs prises par $\ln$ (voir en annexe) fournit d'ailleurs un tel algorithme (approximation par deux suites adjacentes obtenues par dichotomie).

Avant l'arrivée des calculatrices, on lisait "à l'envers" les tables de logarithme pour avoir des valeurs approchées de $\exp$.

2.3 Étude des variations

Sens de variation

La fonction $\exp$ est strictement croissante sur R.

Soient x et x' deux nombres réels tels que $x < x'$. On veut comparer $\exp(x)$ et $\exp(x')$. On raisonne par l'absurde :

Si on avait $\exp(x) \geq \exp(x')$, on aurait $\ln(\exp(x)) \geq \ln(\exp(x'))$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante ; on aurait donc $x \geq x'$ ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse $x < x'$.

C'est donc que $\exp(x) < \exp(x')$.

Encadrement des variations

Pour tous nombres réels a et b, on a : $\exp(a)(b-a) \leq \exp(b) - \exp(a) \leq \exp(b)(b-a)$.

On utilise l'encadrement établi pour $\ln$: $\frac{1}{v}(v-u) \leq \ln v - \ln u \leq \frac{1}{u}(v-u)$, en posant $\ln u = a$ et $\ln v = b$. On obtient :

$\frac{1}{\exp(b)}(\exp(b) - \exp(a)) \leq b - a \leq \frac{1}{\exp(a)}(\exp(b) - \exp(a))$. Comme $\exp$ est une fonction positive, on en déduit :

$\exp(a)(b-a) \leq \exp(b) - \exp(a) \leq \exp(b)(b-a)$.

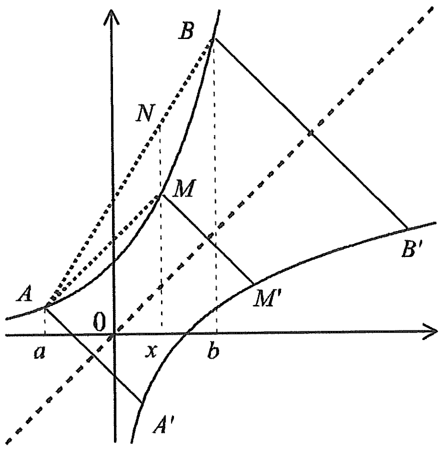
2.4 Convexité

La fonction $\exp$ est convexe sur R.

La courbe de $\exp$ étant symétrique de celle de $\ln$ et la fonction $\ln$ étant concave, on peut penser que la fonction $\exp$ est convexe ; démontrons le :

Soit a, b, x trois nombres réels tels que $a < x < b$ et considérons les trois points $A(a, \exp(a))$, $M(x, \exp(x))$ et $B(b, \exp(b))$ de la courbe de $\exp$. Nous voulons montrer que le point N d'abscisse x du segment AB est au dessus de M en comparant les coefficients directeurs des droites AB et AM , que l'on notera $cd(AB)$ et $cd(AM)$.

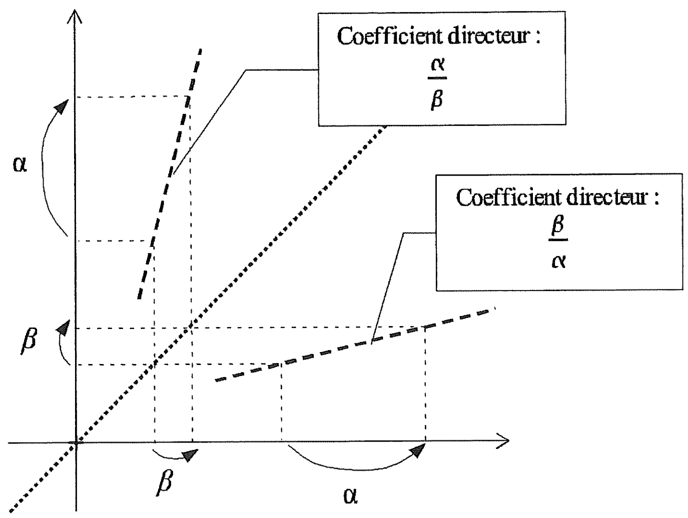
Considérons A' , B' , M' , les symétriques respectifs des points A , B , M . Ils sont sur la courbe de la fonction $\ln$ dont on a étudié la concavité plus haut. Cette étude permet d'écrire que $cd(A'B') \leq cd(A'M')$.



Or, si deux droites sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, elles ont des coefficients directeurs inverses l'un de l'autre (voir schéma ci-dessous).

D'où $\frac{1}{cd(AB)} \leq \frac{1}{cd(AM)}$, ce qui donne $cd(AB) \geq cd(AM)$.

En utilisant la même démarche que pour la fonction $\ln$, on montre que le point N d'abscisse x du segment AB est au dessus de M .

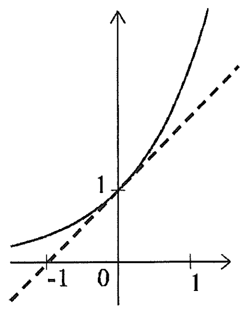


2.5 Une minoration importante

Pour tout nombre réel x, on a : $\exp(x) \geq x + 1$.

On utilise l'inégalité de gauche de l'encadrement des variations de $\exp$ établi plus haut, avec $b = x$ et $a = 0$.

Remarque : ceci prouve que la courbe de $\exp$ est toujours au dessus de la droite d'équation $y = x + 1$.



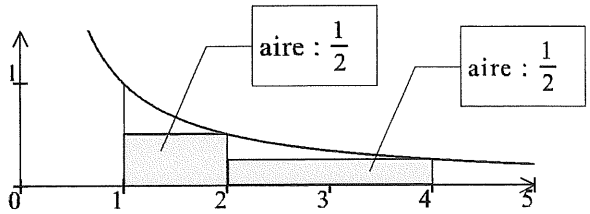
3 Propriétés locales de la fonction $\ln$

3.1 Limites en $+\infty$ et en 0

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Pour tout entier naturel non nul n, nous avons $\ln 2^n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \left(\ln 2^k - \ln 2^{k-1}\right)$.

Par exemple pour $n = 2$,
$\ln 2^2 = \left(\ln 2^2 - \ln 2^1\right) + \left(\ln 2^1 - \ln 2^0\right)$.



En utilisant l'encadrement des variations de $\ln$ étudié plus haut, nous avons :

$$\left(\ln 2^k - \ln 2^{k-1}\right) \geq \frac{1}{2^k}\left(2^k - 2^{k-1}\right),$$

et on obtient pour tout k : $\left(\ln 2^k - \ln 2^{k-1}\right) \geq \frac{1}{2}$, ce qui donne par sommation $\ln 2^n \geq \frac{n}{2}$.

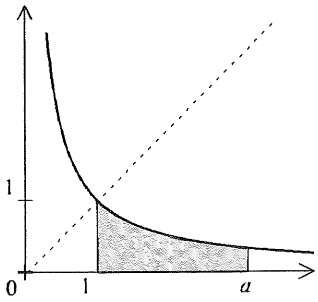
Considérons alors un nombre réel A (aussi grand que l'on veut) et n un entier tel que $n > 2A$.

Si x est un nombre réel tel que $x > 2^n$, alors $\ln x > \ln 2^n > \frac{n}{2} > A$, ce qui prouve que la limite de la fonction $\ln$ en $+\infty$ est $+\infty$.

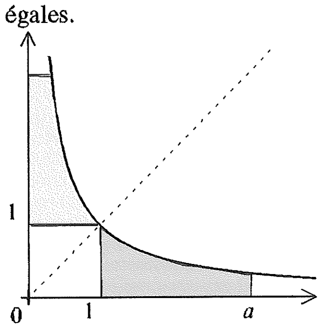
$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

Nous démontrons d'abord que pour tout nombre réel strictement positif a, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

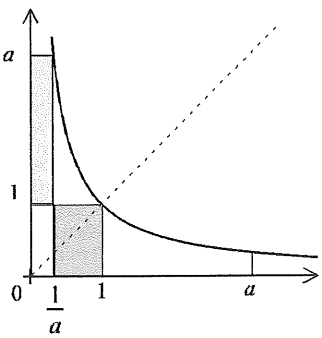
1) Ci-dessous, l'aire de la zone grise vaut $\ln a$ lorsque $1 < a$.



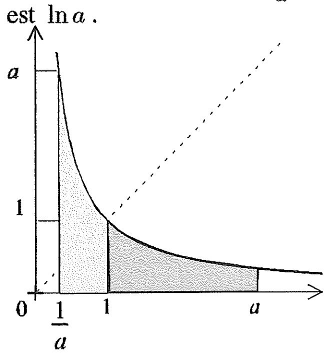
2) Par symétrie, les aires des deux zones grises sont égales.



3) Les deux rectangles ci-dessous ont la même aire. On peut les échanger sur le dessin précédent.



4) Ces deux zones grises ont donc la même aire ; l'aire de la zone claire est $-\ln \frac{1}{a}$, celle de la zone foncée est $\ln a$.



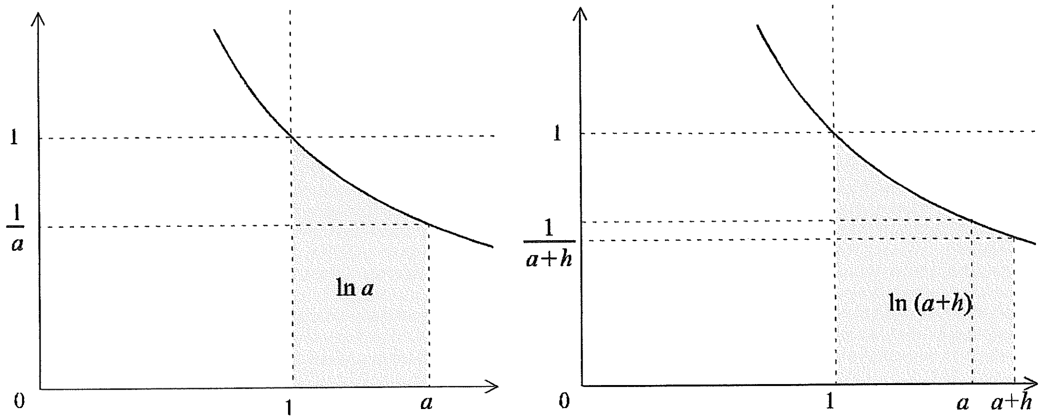
On obtient donc : $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

On étudie alors $\lim\limits_{x \to 0} \ln x$ en posant $x = \frac{1}{t}$. On a alors $\ln x = -\ln t$. Or t tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 et on utilise la limite précédente.

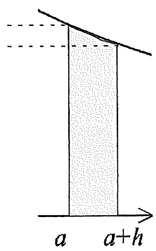
3.2 Continuité et dérivabilité

Lorsque h tend vers 0, $\ln(a+h)$ tend vers $\ln a$: la fonction $\ln$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On étudie $\ln(a+h) - \ln(a)$. Les graphiques illustrent le cas où $a > 1$ et $h > 0$.



La différence $\ln(a+h)-\ln(a)$ correspond à l'aire sous la courbe de la fonction inverse (voir en 1.3) :



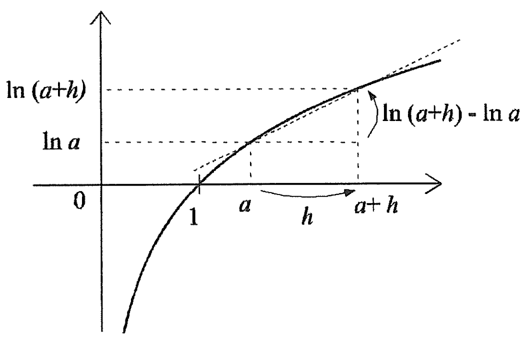
Nous pouvons utiliser l'encadrement des variations établi en 1.3 (valable que h soit positif ou négatif).

On obtient alors $\frac{h}{a+h} \leq \ln(a+h)-\ln(a) \leq \frac{h}{a}$, ce qui prouve que $\ln(a+h)$ tend vers $\ln(a)$ lorsque h tend vers 0, d'où la continuité de la fonction $\ln$.

La fonction $\ln$ est dérivable et sa dérivée est la fonction inverse : $\ln' x = \frac{1}{x}$.

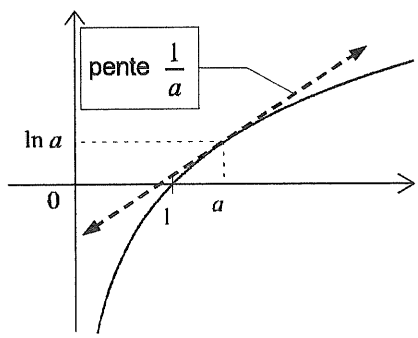
On cherche la limite lorsque h tend vers 0 du taux de variation de $\ln$ entre a et $a+h$, c'est-à-dire de $\frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h}$ (pente de la sécante à la courbe).

Si $h>0$, on en déduit de l'encadrement précédent $\frac{1}{a+h} \leq \frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h} \leq \frac{1}{a}$, donc, lorsque h tend vers 0, $\frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h}$ tend vers $\frac{1}{a}$.



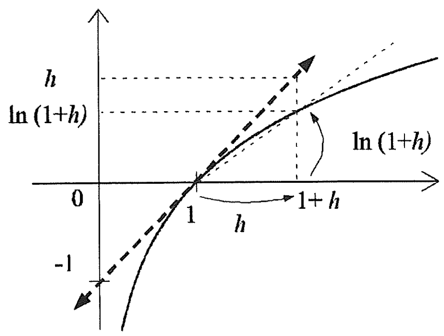
On le montre de même pour $h<0$ car on obtient alors $\frac{1}{a} \leq \frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h} \leq \frac{1}{a+h}$.

$\frac{1}{a}$ est donc le nombre dérivé de la fonction $\ln$ en a (pente de la tangente).



3.3 Approximation locale de $\ln$ au voisinage de 1

Le nombre dérivé de $\ln$ en 1 vaut 1. Graphiquement c'est la pente de la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 1.



C'est la limite lorsque h tend vers 0 du taux de variation de $\ln$ entre 1 et $1+h$ (ou pente de la sécante à la courbe de $\ln$).

On retiendra donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

(Ce résultat permet de "lever" certaines indéterminations du type "$\dfrac{0}{0}$").

Cette limite permet de plus d'établir l'approximation du premier ordre :

$$\ln(1+h) \simeq h \text{ lorsque } h \text{ est voisin de } 0.$$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$, on peut écrire $\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1 + \varepsilon(h)$, avec $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

On en déduit $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$ où $h\varepsilon(h)$ est négligeable devant h.

On en conclut que $\ln(1+h) \simeq h$ lorsque h est voisin de 0.

3.4 Comparaison de $\ln x$ avec x en $+\infty$

On a vu que $\ln x$ tendait vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, mais on remarque sur un exemple numérique que $\ln x$ est "petit" par rapport à x : ln 10000 est inférieur à 10.

Plus précisément, on peut montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, c'est-à-dire que $\ln x$ est négligeable devant x en $+\infty$, et cette limite permet de "lever" des indéterminations du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$" .

Soit $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$. L'étude du sens de variation de cette fonction (par calcul de sa dérivée) montre qu'elle est croissante sur $[4;+\infty[$. Or $f(4) = 2 - \ln 4$ qui est positif, donc, sur $[4;+\infty[$, on a $f(x) \geq 0$, d'où on déduit $\ln x \leq \sqrt{x}$ puis $\dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Comme de plus $0 \leq \dfrac{\ln x}{x}$ sur $[1;+\infty[$, on en déduit que $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 lorsque tend vers $+\infty$.

4 Propriétés algébriques et nombre e

4.1 Fonction ln

Dans tout ce paragraphe, a et b sont des nombres réels strictement positifs.

$\ln ab = \ln a + \ln b$.

On peut dire que : "la fonction ln transforme les produits en sommes", ou que "l'image d'un produit est égale à la somme des images".

On considère la fonction $g(x) = \ln(ax) - \ln a - \ln x$ pour tout $x > 0$, et on démontre qu'elle est nulle.

Sa dérivée est : $g'(x) = \dfrac{a}{ax} - \dfrac{1}{x} = 0$; g est donc constante, de plus on a $g(1) = 0$ car $\ln(1) = 0$.

Donc $g(x) = 0$ pour tout $x > 0$, et, en posant $x = b$, on obtient $\ln(ab) - \ln a - \ln b = 0$.

Remarque : une autre démonstration par les aires est présentée en annexe 2.

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

On calcule $\ln \dfrac{a}{b} + \ln b$ avec la formule précédente et on obtient $\ln a$.

$\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.

On applique la formule précédente sachant que $\ln 1 = 0$ (une autre démonstration par les aires a été donnée plus haut).

$\ln a^n = n \ln a$ (n étant un entier relatif).

La première formule donne $\ln(aa) = \ln a + \ln a$, soit $\ln a^2 = 2 \ln a$ et une récurrence immédiate donne pour un entier naturel n : $\ln a^n = n \ln a$.

Dans le cas où n est négatif, notons $n = -m$; m est entier naturel. On a successivement :

$$\ln a^n = \ln a^{-m} = \ln \frac{1}{a^m} = -\ln a^m = -m \ln a = n \ln a .$$

$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2} \ln a$

D'après la formule précédente, on a $\ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2 \ln\left(\sqrt{a}\right)$, or $\ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = \ln a$.

4.2 Fonction exp

Dans tout ce paragraphe, a et b sont deux nombres réels quelconques.

$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

On peut dire que : "la fonction exp transforme les sommes en produits", ou que "l'image d'une somme est égale au produit des images".

On a $\ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a + b$ en utilisant une propriété algébrique de ln .

De $a + b = \ln(\exp(a)\exp(b))$, on déduit en prenant l'image de chaque membre par la fonction exp :

$\exp(a+b) = \exp\left(\ln(\exp(a)\exp(b)\right) = \exp(a)\exp(b)$.

$\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

On calcule en utilisant la formule précédente :

$\exp(a-b) \times \exp(b) = \exp(a-b+b) = \exp(a)$ d'où $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

$\dfrac{1}{\exp(a)} = \exp(-a)$.

Avec la formule précédente, on a : $\dfrac{1}{\exp(a)} = \dfrac{\exp(0)}{\exp(a)} = \exp(0-a)$.

$\exp(na) = (\exp(a))^n$ (n étant un entier relatif).

On a : $\ln\left((\exp(a))^n\right) = n\ln\left(\exp(a)\right) = na$ avec la formule établie pour $\ln$.

Comme $na = \ln\left((\exp(a))^n\right)$, on déduit : $\exp(na) = (\exp(a))^n$ en prenant l'image de chaque membre par $\exp$.

4.3 Le nombre e et la notation en exposant e^x

La dernière formule établie nous donne avec n un entier relatif, $\exp(n) = (\exp(1))^n$.

Notons alors e le nombre réel $\exp(1)$ (il vaut environ 2,718). On obtient : $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.

Ainsi la fonction $\exp$ est un prolongement à l'ensemble des réels de l'application qui a tout entier relatif n associe e^n .

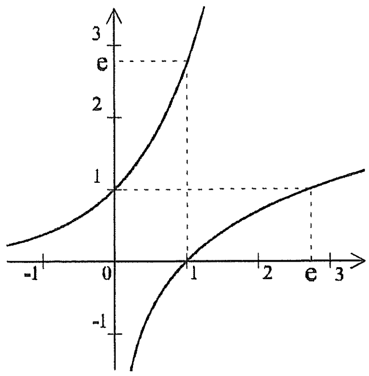
Ceci suggère d'étendre la notation "en exposant" en écrivant $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ pour un nombre réel x quelconque.

La première propriété algébrique s'écrit alors : $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$: on retrouve l'écriture habituelle d'une règle de calcul sur les puissances, et il en est de même avec les autres propriétés.

Remarque : nous donnons ainsi un sens à l'écriture $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ (pour un entier naturel n) qui représente le nombre $\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Or, classiquement, cette écriture désigne la solution positive de l'équation $x^n = \mathrm{e}$. Il n'y a pas d'incohérence car nous pouvons montrer avec la dernière propriété algébrique que $\left(\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n = \mathrm{e}$.

On a : $\exp(1) = \mathrm{e}$ d'où $\ln \mathrm{e} = 1$: c'est une valeur remarquable de la fonction $\ln$.



Remarques : Cette lettre e a été introduite par Euler au 18° siècle. Il a été démontré que c'est un nombre irrationnel (par Euler), et même transcendant (par Charles Hermite au 19° siècle) ; comme le nombre π , il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers.

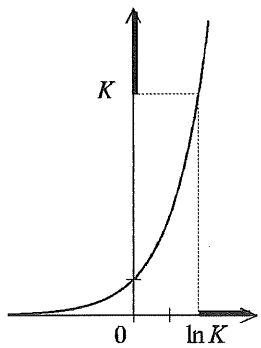
5 Propriétés locales de la fonction exp

5.1 Limites en +∞ et en -∞

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Soit K un nombre réel positif (aussi grand que l'on veut).

Si $x \geq \ln K$, alors $\mathrm{e}^x \geq K$ d'où la limite annoncée.



$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

On a : $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$, et $-x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

5.2 Continuité et dérivabilité

la fonction exp est continue sur R.

Nous démontrons la continuité en un nombre réel b en prouvant que $\exp(b+k)$ tend vers $\exp(b)$ lorsque k tend vers 0.

Considérons un nombre réel k compris entre -1 et 1. L'encadrement des variations de exp établi plus haut donne :

$$k \exp(b) \leq \exp(b+k) - \exp(b) \leq k \exp(b+k) .$$

Si $0 \leq k < 1$, on peut majorer $k\exp(b+k)$ par $k\exp(b+1)$, et si $-1 < k \leq 0$, on peut majorer $k\exp(b+k)$ par $k\exp(b-1)$.

Les encadrements obtenus montrent que $\exp(b+k)$ tend vers $\exp(b)$ lorsque k tend vers 0.

La courbe de $\exp$ étant symétrique de celle de $\ln$, on peut penser que les tangentes en des points symétriques sont symétriques et donc qu'elles ont des coefficients directeurs inverses l'un de l'autre. Nous allons le prouver en étudiant la dérivabilité de la fonction $\exp$.

La fonction $\exp$ est dérivable et confondue avec sa dérivée : $\exp' = \exp$.

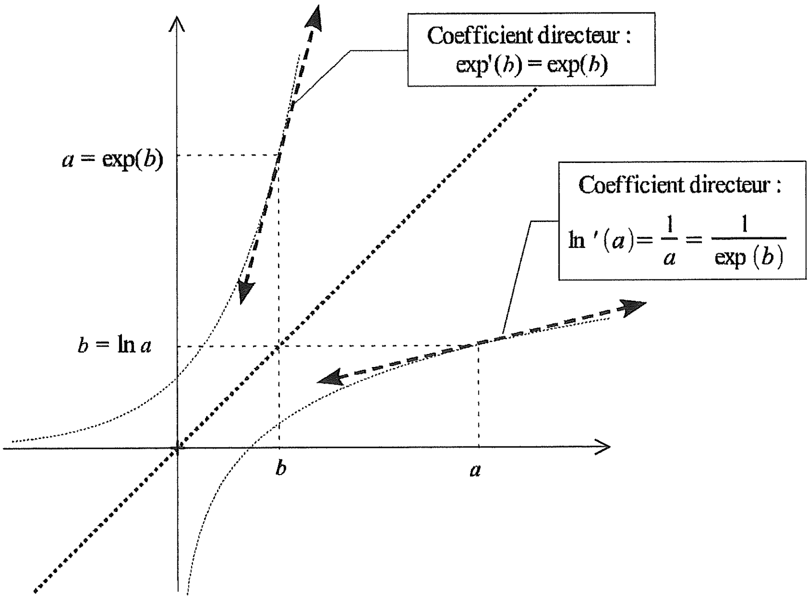
On étudie la limite de $\dfrac{\exp(b+k)-\exp(b)}{k}$ lorsque k tend vers 0 (k différent de 0).

L'encadrement utilisé lors de l'étude de la continuité donne lorsque $0 < k$:

$$\exp(b) \leq \frac{\exp(b+k)-\exp(b)}{k} \leq \exp(b+k).$$

Lorsque $k < 0$, on a : $\exp(b+k) \leq \dfrac{\exp(b+k)-\exp(b)}{k} \leq \exp(b)$.

De ces deux encadrements, on déduit que $\dfrac{\exp(b+k)-\exp(b)}{k}$ tend vers $\exp(b)$ lorsque k tend vers 0.



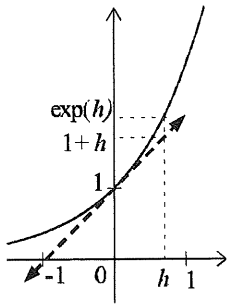
Remarque : le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $\ln$ en a est $\ln' a = \dfrac{1}{a}$.

Celui de la tangente à la courbe de $\exp$ en $b = \ln a$ est $\exp'(b) = \exp(b) = a$.

On a $\exp'(b) = \dfrac{1}{\ln' a}$. Ces tangentes ont donc des coefficients directeurs inverses l'un de l'autre.

5.3 Approximation locale de $\exp$ au voisinage de 0

La tangente à la courbe de $\exp$ au point d'abscisse 0 a une pente de 1.



C'est le nombre dérivé de $\exp$ en 0 qui correspond à la limite du taux de variation de $\exp$ entre 0 et h lorsque h tend vers 0. On en déduit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\,.$$

(Ce résultat permet aussi de "lever" des indéterminations du type $"\frac{0}{0}"$).

Cette limite permet de plus d'établir l'approximation du premier ordre :

$e^h \simeq 1 + h$ lorsque h est voisin de 0.

On utilise la même méthode que pour l'approximation de $\ln$ au voisinage de 1.

5.4 Comparaison de e^x avec x^n en $+\infty$

Autant $\ln x$ va "lentement" vers $+\infty$, autant e^x tend "très vite" vers $+\infty$: e^{10} est supérieur à 20 000. Le nombre e^x devient très supérieur à x lorsque x prend de grandes valeurs.

Plus généralement, on peut montrer qu'avec un entier n supérieur à 1, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, ce qui est équivalent à $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ c'est-à-dire que x^n est négligeable devant e^x en $+\infty$, ce qui permet de "lever" des indéterminations du type $"\frac{\infty}{\infty}"$.

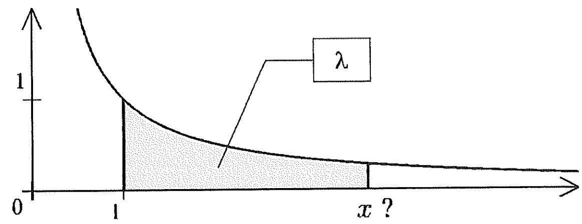
On a successivement : $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{\ln x^n}} = \frac{e^x}{e^{n \ln x}} = e^{x - n\ln x}$.

Or $x - n\ln x = x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)$ et $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, d'où $x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)$ tend vers $+\infty$. On en déduit que $e^{x-n\ln x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6 Annexe 1 : étude des valeurs prises par $\ln$

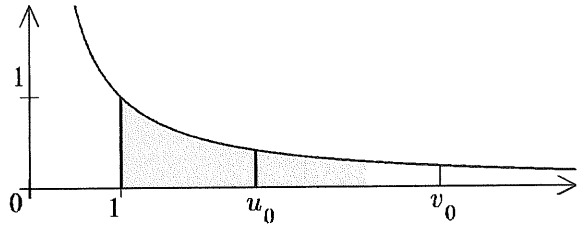
Considérons un nombre réel λ . On cherche un nombre réel x tel que $\ln x = \lambda$.

Dans le cas où $\lambda > 0$, le nombre x, s'il existe, est supérieur à 1 et $\ln x$ est l'aire sous la courbe de la fonction inverse, de 1 à x en abscisse.

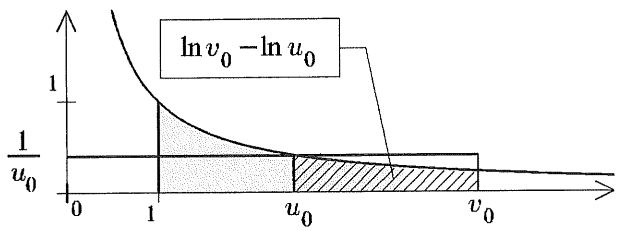


L'étude de la limite de $\ln$ en $+\infty$ montre qu'on peut trouver un nombre v_0 tel que $\lambda < \ln v_0$. D'autre part, on peut trouver un nombre u_0 tel que $\ln u_0 < \lambda$ (par exemple $u_0 = 1$).

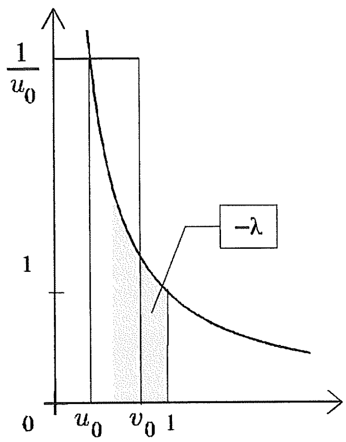
Nous avons donc $u_0 < v_0$ tels que $\ln u_0 \leq \lambda \leq \ln v_0$.



La différence $(\ln v_0 - \ln u_0)$ représente l'aire sous la courbe de la fonction inverse et on a vu en 1.3 qu'elle est majorée par $\dfrac{1}{u_0}(v_0 - u_0)$ (l'aire du rectangle de base $[u_0\,,\, v_0]$ et de hauteur $\dfrac{1}{u_0}$).



Dans le cas où $\lambda < 0$, le nombre x, s'il existe, est inférieur à 1. La limite en 0 montre qu'on peut trouver un nombre u_0 tel que $\ln u_0 < \lambda$ et d'autre part, on peut trouver un nombre v_0 tel que $\lambda < \ln v_0$ (par exemple 1). La différence $(\ln v_0 - \ln u_0)$ représente encore l'aire sous la courbe de la fonction inverse et elle est encore majorée par $\dfrac{1}{u_0}(v_0 - u_0)$ (voir 1.3).



Ce qui suit est valable que l'on ait $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$.

Nous cherchons alors un encadrement meilleur (plus "serré") de λ avec 2 nombres $\ln u_1$ et $\ln v_1$.

Par exemple avec la méthode de dichotomie, considérons $w = \dfrac{u_0 + v_0}{2}$.

Si on a $\ln u_0 \leq \lambda < \ln w$, on prend $u_1 = u_0$ et $v_1 = w$.
Sinon, on a $\ln w \leq \lambda \leq \ln v_0$, et on prend $u_1 = w$ et $v_1 = v_0$.

Dans les deux cas, on a : $v_1 - u_1 = \dfrac{1}{2}(v_0 - u_0)$ (l'intervalle $[u_0\,,\, v_0]$ a été coupé en deux).

Nous avons alors trouvé 2 nombres u_1 et v_1 tels que :

$$u_0 \le u_1 < v_1 \le v_0 \text{ avec } \ln u_0 \le \ln u_1 \le \lambda \le \ln v_1 \le \ln v_0 .$$

Ce nouvel encadrement de λ est meilleur car la différence $(\ln v_1 - \ln u_1)$ est inférieure à $\frac{1}{u_1}(v_1 - u_1)$ donc à $\frac{1}{u_0}(v_1 - u_1)$ qui est égal à la moitié de $\frac{1}{u_0}(v_0 - u_0)$.

On a donc $\ln v_1 - \ln u_1 \le \frac{1}{2}\frac{1}{u_0}(v_0 - u_0)$

On peut ensuite recommencer et obtenir u_2 et v_2 , . . .

On peut définir de cette façon deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $\ln u_n \le \lambda \le \ln v_n$ et telles que :

(u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, $u_n < v_n$

et $(v_n - u_n)$ converge vers 0 (car $v_n - u_n = \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$).

Ces suites sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune qu'on notera x telle que : $u_n \le x \le v_n$.

On vérifie maintenant que $\ln x$ est égal à λ .

On déduit de l'encadrement précédent que $\ln u_n \le \ln x \le \ln v_n$ car $\ln$ est croissante.

De plus $\ln v_n - \ln u_n \le \frac{1}{2^n}\frac{1}{u_0}(v_0 - u_0)$: les suites $(\ln u_n)$ et $(\ln v_n)$ sont donc convergentes vers $\ln x$. Comme on a aussi $\ln u_n \le \lambda \le \ln v_n$ elles convergent aussi vers λ ce qui prouve que $\ln x = \lambda$ (unicité de la limite).

Conclusion : on a prouvé l'existence d'un réel x tel que $\ln x = \lambda$.

Ce réel x est unique. S'il y en avait un autre x' , par exemple avec $x < x'$, la fonction $\ln$ étant strictement croissante, on aurait $\ln x < \ln x'$ et donc on aurait $\lambda < \ln x'$.

De plus, on dispose de deux suites adjacentes convergentes vers x , ce qui permet d'obtenir des valeurs approchées avec une erreur majorée par $(v_n - u_n)$. Les calculs peuvent être programmés sur un ordinateur.

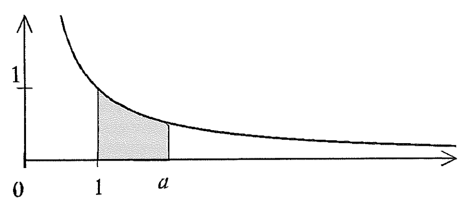
7 Annexe 2 : autres démonstrations

7.1 Démonstration par les aires de $\ln ab = \ln a + \ln b$

Dans tout ce paragraphe, a et b sont des nombres réels strictement positifs.

Supposons d'abord que $a > 1$.

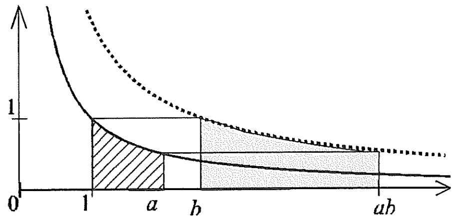
On a représenté la fonction inverse. L'aire de la zone grisée représente $\ln a$.



On la transforme ainsi : à ordonnée constante, on multiplie les abscisses par b ($b > 0$). Un point $M\,(x,y)$ devient $M'\,(x',y')$ avec $x' = bx$ et $y' = y$.

Si $M\,(x,y)$ est sur la courbe de la fonction inverse, on a $y = \frac{1}{x}$, d'où $y' = \frac{b}{bx} = \frac{b}{x'}$: $M'\,(x',y')$ est alors sur la courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{b}{x}$.

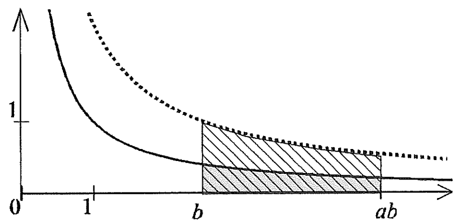
On obtient alors la zone du plan entre b et ab sous la courbe de $x \longmapsto \frac{b}{x}$ car 1 devient b et a devient ab (qui est supérieur à b car $a > 1$).



D'autre part cette transformation multiplie les aires par b, car un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes voit l'un de ses côtés multiplié par b.

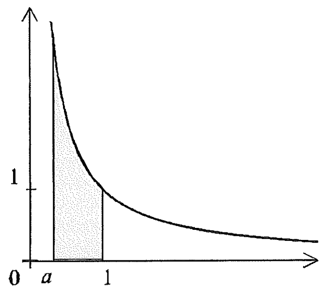
Maintenant, à abscisse constante, on divise les ordonnées par b. On obtient alors la courbe de la fonction inverse, et les aires sont divisées par b.

L'aire de la zone grise de la première figure est donc égale à celle de la zone grise ci-contre. Or celle-ci représente $\ln ab - \ln b$.



On en déduit que $\ln ab - \ln b = \ln a$, d'où $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Dans le cas où $a < 1$, l'aire de la zone grisée représente $-\ln a$ et on montre par la même démarche qu'elle est égale à $\ln b - \ln ab$.



7.2 Autre démonstration pour la comparaison de $\ln x$ avec x

Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Cette nouvelle démonstration utilise les propriétés algébriques de la fonction ln.

On peut écrire $\ln x$ ainsi : $\ln x = \ln\left(\sqrt{x}\right)^2 = 2\ln\left(\sqrt{x}\right)$ d'après une propriété algébrique.

On a alors $\frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$. La majoration $\ln x \leq x - 1$ établie plus haut et appliquée à $\sqrt{x}$ donne $\ln\left(\sqrt{x}\right) \leq \sqrt{x} - 1 \leq \sqrt{x}$, d'où $\ln\left(\sqrt{x}\right) \leq \sqrt{x}$. On en déduit $\frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

En supposant de plus que $x > 1$, on obtient $0 < \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, ce qui prouve que $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

8 Annexe 3 : compléments

8.1 Une suite convergente vers e^x

Montrons que $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ tend vers e^x lorsque n tend vers l'infini.

On étudie $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ avec les propriétés algébriques de $\ln$ et en supposant $x \neq 0$ (remarquons que $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ tendant vers 1, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ devient positif à partir d'un certain rang ; on peut donc prendre l'image de $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ par $\ln$).

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\\ &= x\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\dfrac{x}{n}$ tend vers 0, et $\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}$ tend vers le nombre dérivé de $\ln$ en 1, qui vaut 1. D'où $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ tend vers x.

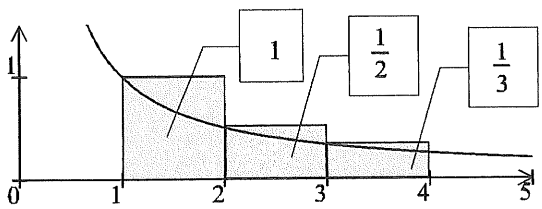
La fonction $\exp$ étant continue, on en déduit que $\exp\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)$, c'est-à-dire que $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ tend vers e^x lorsque n tend vers l'infini.

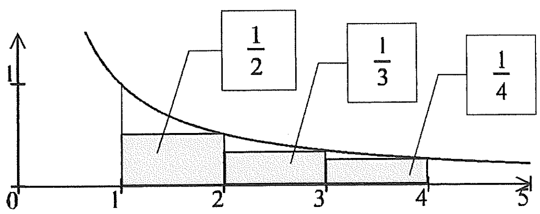
8.2 Étude de la somme $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

L'étude des variations de $\ln$ montre que pour tout entier naturel non nul k, on a $\ln(k+1)-\ln k \leq \dfrac{1}{k}$, d'où la somme $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ est minorée par $(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+(\ln(n+1)-\ln n)$, c'est-à-dire par $\ln(n+1)$.

On a aussi $\ln k-\ln(k-1) \geq \dfrac{1}{k}$, d'où la somme $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ est majorée par le nombre $1+(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+(\ln(n)-\ln(n-1))$, c'est-à-dire par $1+\ln(n)$.

Les schéma ci-dessous illustrent avec les aires.





On en déduit l'encadrement $\ln(n+1) \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leq 1+\ln(n)$.

Ceci prouve que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ et que de plus $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ est équivalent à $\ln n$ en $+\infty$.

TITRE :

Fonctions usuelles

AUTEURS :

Nicole Bardy-Panse
Michel Brissaud
Jacques Choné
Jean Marie Didry
Pierre Marchal

PUBLIC VISE :

Elèves de lycée
Etudiants en début d'études scientifiques.

RESUME :

Le document présente une trame possible pour l'étude des fonctions usuelles dans l'enseignement secondaire. Il dégage l'ensemble des résultats dont la maîtrise est souhaitée pour un étudiant s'engageant dans des études scientifiques et met en lumière toute la richesse de ce thème très structurant qui fait intervenir conjointement analyse, algèbre et géométrie.
De nombreux exercices renforcent cette interaction.

MOTS CLES :

Fonctions usuelles, fonctions affines, fonction carré, fonctions trinômes, fonction cube, fonctions polynômes de degré trois, fonction racine carré, fonction inverse, fonctions homographiques, fonctions circulaires, fonction logarithme népérien, fonction exponentielle.