

Mastaire de mathématiques
1^{ère} année, 1^{er} semestre
Module MM 1.12 : analyse

Quelques thèmes d'exercices
en Analyse

suivis d'un

Petit cours sauvage
d'Analyse mathématique

par

Jean-Pierre Ferrier

Années 2005-2006 et 2006-2007

Edité et imprimé par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (Université Henri Poincaré – Nancy 1 – Faculté des Sciences) – B.P. 239 – VANDOEUVRE-les-NANCY Cedex,
Dépôt légal : 2^{ème} trimestre 2007.
n° de la publication : 2 – 85406 – 186 – 1
Responsable de la publication : le directeur de l'IREM, Philippe Lombard.

Quelques exercices d'analyse

Ce qui suit a été tiré de l'enseignement du module optionnel d'Analyse 2 de la première année de la maîtrise de mathématiques 2005-2006.

Il s'agit d'un enseignement des fondements, consacré presque exclusivement à cinq sujets, qui sont

- les **espaces fonctionnels**, espaces vectoriels normés ou topologiques localement convexes métrisables, et les constructions générales, sous-espaces, produits et quotients notamment, qui leur correspondent,

- la **compacité faible**, en privilégiant le cas métrisable, celle de la boule unité d'un espace hilbertien séparable en particulier,

- la **compacité forte**, avec le théorème d'Ascoli, et ses applications que sont le théorème de Montel et celui de Cauchy-Arzelà,

- la **complétude**, avec la complétion d'un espace normé, l'exemple des espaces L^p , et la théorie de Baire et ses conséquences, théorèmes de Banach, du graphe fermé, de Banach-Steinhaus,

- la **dualité**, avec le théorème de Hahn-Banach, la dualité faible, la dualité forte entre L^p et L^q , et le théorème de Mackey-Bourbaki.

Une partie du contenu se trouve déjà dans l'enseignement de la licence. Cependant il apparaît que les concepts correspondants ont été très peu assimilés et que revenir dessus n'est pas superflu, au contraire.

L'originalité est d'avoir choisi d'exposer la plus grande partie de ce contenu sous la forme d'exercices ou de problèmes. C'est une partie de ces derniers qu'on trouvera dans ce qui suit.

Pour ces derniers, on ne s'est pas contenté de donner des solutions type comme on en trouve en général dans les ouvrages. On a essayé de retranscrire une partie des tentatives faites par les étudiants pour atteindre la solution. Pour cette raison il peut arriver que l'on explore rapidement une voie sans issue ou que ne prenne pas la voie la plus directe.

Par ailleurs on a ajouté quelques conseils ici ou là qui pourront paraître dérisoires à quiconque a déjà une petite expérience des mathématiques. Il faut bien comprendre que l'enseignement secondaire ne fournit pratiquement plus aux élèves l'occasion de s'attaquer à une démonstration. On a exagéré grossièrement la phase, faite d'expérience passive, conduisant à l'énonciation d'une propriété dont on ne soucie pas de la pertinence. Ensuite on fait croire que la démonstration va de soi. A l'université on ne demande pas aux étudiants de produire par eux-mêmes des démonstrations analogues à celles qui leur sont faites en cours, lorsque c'est le cas. Le résultat est que personne ou presque ne sait plus attaquer un petit exercice nouveau.

Nous espérons contribuer un peu à la correction de ces déficiences.

Jean-Pierre Ferrier, décembre 2005

Quelques exercices sur les espaces normés et métriques

Exercice sur la dualité dans les espaces l^p

On considère un exposant p tel que $1 \leq p < +\infty$ et l'exposant conjugué q , qui vérifie $1/p + 1/q = 1$ et $1 < q \leq +\infty$.

a) Soit (α_n) une suite de l^q fixée. Montrer que l'application qui à une suite (a_n) de l^p associe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n$$

définit une forme linéaire T sur l^p de norme au plus égale à celle de (α_n) .

b) Soit T une forme linéaire continue sur l^p . On pose $T(\epsilon_n) = \alpha_n$, où ϵ_n est la suite qui vaut 1 à l'indice n et 0 ailleurs. Montrer que (α_n) est dans l^q et que sa norme est au plus égale à celle de T .

c) Montrer que le dual de l^p s'identifie à l^q .

Solution.

a) Le premier point consiste à vérifier que la somme infinie qui doit définir T a bien un sens, i.e. de vérifier la convergence d'une série.

Ici la série de terme général $\alpha_n a_n$ est absolument convergente puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n a_n| \leq \|(\alpha_n)\|_q \| (a_n) \|_p$$

par Hölder.

N.B. On prendra l'habitude de ne pas travailler sur une limite ou une somme infinie avant d'en avoir établi l'existence.

L'application T est évidemment linéaire. De plus on peut maintenant écrire

$$|T((a_n))| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n a_n| \leq \|(\alpha_n)\|_q \| (a_n) \|_p$$

de sorte que l'application T est continue et que sa norme est majorée par $\|(\alpha_n)\|_q$.

b) Si l'on applique l'hypothèse de continuité de T aux seules suites ϵ_n , il vient

$$|\alpha_n| = |T(\epsilon_n)| \leq \|T\| \|\epsilon_n\|_p = \|T\|$$

ce qui montre que la suite (α_n) est bornée et que sa norme est majorée par celle de T dans l^∞ . Cela suffit pour traiter le cas $p = 1$, auquel cas $q = +\infty$. Cependant on n'en tire rien de plus.

Traisons le cas $p > 1$. Pour avancer il nous faut aussi pouvoir exploiter la linéarité de T et donc utiliser des combinaisons linéaires des suites ϵ_n .

Ecrivons l'hypothèse dans sa généralité. En plus de la linéarité de T , elle nous dit que

$$|T((a_n))| \leq \|T\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

pour une suite (a_n) de l^p . Pour éviter les questions de convergence, nous allons nous limiter à une suite (a_n) nulle au delà du rang N . Nous pouvons alors écrire

$$(a_n) = \sum_{n=0}^N a_n \epsilon_n$$

ce qui revient à décomposer dans la base $\epsilon_0, \dots, \epsilon_N$. Alors

$$T((a_n)) = \sum_{n=0}^N a_n T(\epsilon_n) = \sum_{n=0}^N a_n \alpha_n$$

par linéarité de T . L'hypothèse se transforme ainsi en

$$(1) \quad \left| \sum_{n=0}^N a_n \alpha_n \right| \leq \|T\| \left(\sum_{n=0}^N |a_n|^p \right)^{1/p} .$$

N.B. *Ce travail préparatoire est très important et emblématique de ce qu'il faut faire devant une question d'écrit. On doit transformer l'hypothèse et/ou la conclusion en des termes aussi explicites et opérationnels que possible.*

Travaillons maintenant sur la conclusion. Il s'agit de montrer que la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^q$$

est finie et de la majorer. Pour ce faire on va d'abord majorer les sommes partielles du type

$$(2) \quad \sum_{n=0}^N |\alpha_n|^q .$$

La suite (α_n) est donnée avec T . Nous avons toute liberté pour choisir (a_n) , sachant que, nulle à partir d'un certain rang, elle sera nécessairement dans l^p . Quel choix judicieux permet d'utiliser (1) pour majorer (2)? On remarque que la valeur absolue entoure la somme de (1) alors qu'elle est à l'intérieur dans (2). Il faudra donc avoir $a_n \alpha_n \geq 0$. En même temps cela sera réalisé si

$$a_n \alpha_n = |\alpha_n|^q .$$

Si $\alpha_n = 0$, on peut prendre $a_n = 0$. Sinon on choisira

$$a_n = \text{sign}(\alpha_n) |\alpha_n|^{q-1}$$

dans le cas réel et $\bar{\alpha}_n |\alpha_n|^{q-2}$ dans le cas complexe. Dans tous les cas

$$|a_n|^p = |\alpha_n|^{(q-1)p} = |\alpha_n|^q .$$

En reportant dans (1), il vient

$$\sum_{n=0}^N |\alpha_n|^q \leq \|T\| \left(\sum_{n=0}^N |\alpha_n|^q \right)^{1/p}$$

d'où

$$\left(\sum_{n=0}^N |\alpha_n|^q \right)^{1/q} \leq \|T\|$$

en ramenant dans le premier membre.

Il ne reste plus qu'à passer à la limite croissante pour $N \rightarrow \infty$. Il vient

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^q \right)^{1/q} \leq \|T\|$$

ce qu'il fallait justement démontrer.

c) On a mis en évidence une application Φ qui va de l^q dans le dual de l^p et une application Ψ qui va du dual de l^p dans l^q . Ces deux applications sont linéaires et de norme ≤ 1 , en particulier continues.

Quand on part de (α_n) dans l^q , appliquant Φ on obtient une forme linéaire continue T sur l^p , puis appliquant Ψ on obtient la suite de l^q de terme général

$$T(\epsilon_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon_p \alpha_p = \alpha_n$$

de sorte que $\Psi \circ \Phi$ est l'application identique de l^q .

A l'inverse, quand on part de T dans le dual de l^p , appliquant Ψ on obtient la suite de l^q de terme général $\alpha_n = T(\epsilon_n)$, puis appliquant Φ on obtient la forme linéaire continue U sur l^p qui à (a_n) associe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} T(a_n \epsilon_n) .$$

Si la suite (a_n) est nulle au delà d'un rang N , c'est encore

$$T\left(\sum_{n=0}^N a_n \epsilon_n\right)$$

i.e. la valeur prise par T sur la suite (a_n) . Dans le cas général on passe à la limite pour $N \rightarrow \infty$ grâce à la continuité de T et de U pour voir que $U = T$. Ainsi $\Phi \circ \Psi$ est l'application identique du dual de l^p .

Finalement on a construit deux applications linéaires de norme ≤ 1 inverses l'une de l'autre. Ce sont des isométries qui permettent d'identifier à l^q le dual de l^p .

Exercice sur l'équivalence des normes

Il s'agit de montrer que toutes les normes sur \mathbf{R}^n sont équivalentes sans utiliser d'argument de compacité. Pour cela on procède par récurrence sur la dimension.

L'espace vectoriel \mathbf{R}^n est muni de sa base canonique e_1, \dots, e_n , laquelle est définie par $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ etc.

a) Montrer la propriété en dimension 0 et en dimension 1.

A partir de maintenant, on considère $n \geq 2$ et on se donne une norme $\| \cdot \|$ sur \mathbf{R}^n .

b) Comparer, dans un sens, la norme donnée à la norme

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) .$$

On suppose maintenant la propriété d'équivalence établie jusqu'en dimension $n-1$.

c) Montrer qu'est fermé pour cette norme le sous-espace vectoriel F de \mathbf{R}^n engendré par e_2, \dots, e_n , i.e. formé des vecteurs $(0, x_2, \dots, x_n)$.

d) En déduire l'équivalence en dimension n .

Indication: considérer $\|e_1 + z\|$ pour z dans F .

Rappelons que deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sont dites équivalentes s'il existe des constantes $0 < c \leq C$ telles que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

pour tout x . C'est une relation d'équivalence.

Solution.

a) En dimension 0, il n'y a qu'une norme, celle qui à 0 associe 0. En dimension 1, sur \mathbf{R} , une norme $\| \cdot \|$ vérifie

$$\|x\| = \|x \cdot 1\| = |x| \|1\|$$

où $\|1\|$ est une constante non nulle. Toutes les normes sont proportionnelles à la valeur absolue, donc équivalentes.

b) On a

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\|$$

d'où

$$\|x\| \leq \max(|x_1|, \dots, |x_n|) (\|e_1\| + \dots + \|e_n\|)$$

soit une majoration

$$\|x\| \leq C \|x\|_\infty .$$

c) Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n considéré.

Réfléchissons. Dire qu'il est fermé signifie que si une suite (x_n) de F converge vers x dans \mathbf{R}^n , alors nécessairement x appartient à F .

La situation est ainsi

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme donnée (dont on ne connaît rien), où chaque x_n est dans F et où x est dans E ; il faut montrer que x est dans F . Précisément, étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver un rang N tel que

$$\|x_n - x\| \leq \epsilon$$

pour $n \geq N$.

Malheureusement $x_n - x$ n'est pas dans F a priori, puisqu'il s'agit de le montrer, mais dans \mathbf{R}^n , et l'hypothèse de récurrence ne nous dit rien sur la norme en dimension n , donc dans \mathbf{R}^n .

Il nous faut donc nous concentrer sur une propriété de la suite (x_n) qui ne fasse pas appel à ce qui se passe en dehors de F . Comment traduire la convergence sans parler de la limite? Il y a une propriété pour cela : c'est le critère de Cauchy.

N.B. *Il est important de faire la distinction suivante. Il y a les propriétés relatives : telle partie est ouverte ou fermée dans tel espace. Et il y a les propriétés intrinsèques : tel espace est complet, compact ou connexe. Ces dernières ne font pas référence à un espace plus grand dans lequel l'espace se trouverait. Beaucoup trop de présentations ne font pas, ou pas clairement, cette distinction.*

La suite (x_n) est évidemment une suite de Cauchy dans F . En effet

$$\|x_n - x_m\| \leq 2\epsilon$$

pour $n \geq N, m \geq N$.

Si nous montrons que F est complet ce sera fini. La suite (x_n) aura une limite y dans F , et alors $x = y$ par l'unicité de la limite. En fait on aurait pu aller plus vite : on sait qu'un sous-espace complet est fermé. C'est exactement ce que nous venons de retrouver.

Reprenons. Pour voir que F est un sous-espace vectoriel fermé, il suffit de voir qu'il est complet. Maintenant il est identifié à \mathbf{R}^{n-1} par l'application linéaire bijective qui à (x_2, \dots, x_n) associe $(0, x_2, \dots, x_n)$. La restriction à F de la norme donnée se transporte à \mathbf{R}^{n-1} pour donner une norme

$$\|(x_2, \dots, x_n)\| = \|(0, x_2, \dots, x_n)\|$$

qui, par l'hypothèse de récurrence, est équivalente à la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur \mathbf{R}^{n-1} .

Or la norme $\| \cdot \|_\infty$, qui est appelée à juste titre *norme produit*, a pour propriété qu'une suite est convergente, ou de Cauchy, si chacune de ses composantes l'est. Il en résulte que pour cette norme l'espace \mathbf{R}^{n-1} est complet. Il l'est aussi pour la norme équivalente obtenue en transportant celle sur F . Par suite l'espace F lui-même est complet puisque les suites convergentes et de Cauchy se correspondent dans le transport.

d) Considérons le sous-espace F précédent.

Réfléchissons. On sait maintenant qu'il est fermé. Comment exploiter cette propriété?

Il n'y a pas de suite de F qui s'introduise naturellement et sur laquelle on aurait envie de travailler. On ne va donc pas s'intéresser à la fermeture en termes de suites convergentes. On va s'appuyer sur le fait que la partie complémentaire F^c est ouverte.

Quelle propriété définit une partie ouverte U dans un espace normé ou un espace métrique? Le fait que pour n'importe quel point a de U on puisse trouver un $r > 0$ et une boule (ouverte) de centre a et de rayon r incluse dans U .

Ici on a e_1 qui n'est pas dans F . On peut donc trouver un $r > 0$ tel que la boule (ouverte) de centre e_1 et de rayon r soit incluse dans F^c .

Incluse dans F^c signifie qu'elle ne rencontre pas F . Ou encore que si z est dans F , alors

$$\|e_1 - z\| \geq r .$$

N.B. Ce travail de décryptage qui transforme une propriété abstraite comme l'appartenance de e_1 à la partie ouverte F^c en une propriété opérationnelle, calculatoire comme la dernière inégalité, est le b a ba de la résolution des problèmes de mathématiques en général et des questions d'écrit en particulier.

En fait ce que nous avons obtenu est fait que la distance de e_1 à F n'est pas nulle; c'est une propriété de la distance à une partie fermée d'un point qui lui est extérieur.

Reprenons. Il existe $r > 0$ tel que si z est dans F alors

$$\|e_1 - z\| \geq r .$$

On peut remplacer z par $-z$ bien sûr puisque z varie dans un sous-espace vectoriel. On a donc

$$\|e_1 - z\| \geq r > 0$$

pour z dans F . Alors si $x_1 \neq 0$ il vient

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| = |x_1| \left\| e_1 + \frac{x_2}{x_1} e_2 + \dots + \frac{x_n}{x_1} e_n \right\|$$

d'où

$$\|x\| \geq r |x_1| .$$

cela vaut bien sûr encore si $x_1 = 0$.

Si nous refaisons le raisonnement pour e_2, \dots, e_n , nous obtiendrons de même

$$\|x\| \geq r |x_i| .$$

Corrigeons. En réalité, nous avons trouvé $r_1 > 0$ pour e_1 , puis $r_2 > 0$ pour e_2 etc. Ici r est le plus petit des r_i apparus.

Terminons. Une fois le même $r > 0$ choisi pour tout i , il vient

$$\|x\| \geq r \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = r \|x\|_\infty$$

et cela achève la démonstration.

Un autre exercice similaire.

Voici une façon plus élégante mais plus savante de présenter la question.

L'espace \mathbf{R}^n est muni de la norme produit

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

pour laquelle on sait qu'il est complet. On note (e_1, \dots, e_n) sa base canonique.

Il s'agit de montrer que toute application linéaire u d'un espace normé E de dimension finie dans un espace normé F est nécessairement continue.

a) Montrer la propriété lorsque E est l'espace normé \mathbf{R}^n défini ci-dessus.

b) Montrer, par récurrence sur n que tout isomorphisme algébrique (i.e. toute application linéaire bijective) v de l'espace normé \mathbf{R}^n sur un espace normé E est un isomorphisme topologique (i.e. qu'elle est continue dans les deux sens).

c) Etablir la propriété cherchée.

Solution résumée.

a) C'est simplement la majoration

$$\|u(x)\| \leq (\|u(e_1)\| + \dots + \|u(e_n)\|)\|x\|_\infty$$

obtenue en décomposant x dans la base canonique indiquée.

b) Pour $n = 0$ il n'y a rien à démontrer et pour $n = 1$, on

$$\|v(x)\| = \|v(e_1)\| \cdot |x|$$

où $\|v(e_1)\| \neq 0$, d'où la continuité de v et de v^{-1} .

Supposons donc la propriété établie à l'ordre $n - 1$. Soit $v : \mathbf{R}^n \rightarrow E$ un isomorphisme algébrique. La continuité directe résulte du a) et il s'agit d'établir la continuité de l'inverse.

Considérons l'application linéaire composée

$$\mathbf{R}^{n-1} \xrightarrow{w} \mathbf{R}^n \xrightarrow{v} E$$

où w associe au vecteur (x_2, \dots, x_n) le vecteur $(0, x_2, \dots, x_n)$. Par notre hypothèse de récurrence $v \circ w$ un isomorphisme topologique sur son image F qui est aussi celle de v . Cette dernière est alors complète et par suite fermée dans E .

Alors, en considérant d'abord le cas $x_1 \neq 0$ pour le mettre en facteur, on obtient

$$\|v(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| \geq |x_1| d(v(e_1), F)$$

où $d(v(e_1), F)$ est une constante > 0 .

En reprenant le raisonnement pour les autres coordonnées il vient

$$\|v(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| \geq c(|x_1| + \dots + |x_n|) = c\|x\|_\infty$$

où $c > 0$.

c) Considérons une base de E et l'isomorphisme algébrique $v : \mathbf{R}^n \rightarrow E$ qu'elle définit. Regardons

$$\mathbf{R}^n \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F.$$

On sait que $u \circ v$ est continue par le a) et que v^{-1} l'est par le b). Alors $u = (u \circ v) \circ v^{-1}$ l'est aussi.

Exercice sur la métrisabilité d'une topologie faible

Il s'agit de montrer que la topologie faible sur la boule unité d'un espace hilbertien séparable est métrisable.

Soient H un espace hilbertien séparable et X la boule unité fermée de H . On munit H de la topologie définie par les semi-normes $x \mapsto |\langle b, x \rangle|$ où b parcourt H ; cette topologie est dite *faible*.

Montrer que si (a_n) est une suite de H totale, i.e. engendrant un sous-espace dense, et tendant vers 0 en norme, alors

$$d(x, y) = \sup_n |\langle a_n, x - y \rangle|$$

est une distance sur H qui définit sur X la topologie induite par la topologie faible de H .

On rappelle qu'on rend d'abord filtrante la famille de semi-normes en considérant la famille

$$N_{b_1 \dots b_p}(x) = \max(|\langle b_1, x \rangle|, \dots, |\langle b_p, x \rangle|)$$

où b_1, \dots, b_p parcourent H . Alors une base (ou système fondamental) de voisinages de zéro est donnée par les ensembles

$$N_{b_1 \dots b_p}(x) < \epsilon$$

où $\epsilon > 0$. Autrement dit tout voisinage de zéro en contient un de ce type.

On rappelle par ailleurs qu'une application f est continue si l'image réciproque de toute partie ouverte est ouverte; elle est continue en x_0 si l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0 .

Solution.

a) On va vérifier que d est une **distance** en considérant d'abord ses valeurs. Clairement $d(x, y) \geq 0$. Encore faut-il que la borne supérieure ait une valeur finie. Or

$$|\langle a_n, x - y \rangle| \leq \|a_n\| \|x - y\| \leq C \|x - y\|$$

pour un $C \geq 0$ puisque la suite $\|a_n\|$, qui tend vers zéro, est bornée.

Evidemment $d(x, y) = d(y, x)$. De plus

$$|\langle a_n, x - y \rangle| \leq |\langle a_n, x - z \rangle| + |\langle a_n, z - y \rangle|$$

d'où

$$|\langle a_n, x - y \rangle| \leq d(x, z) + d(z, y)$$

puis

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

en passant à la borne supérieure sur n .

N.B. C'est ainsi qu'il est conseillé de présenter le calcul. On majore d'abord à droite indépendamment de n , puis on utilise le fait que le majorant obtenu majore la borne supérieure.

Il reste la propriété de séparation. Supposons que $d(x, y) = 0$, ce qui signifie que

$$\langle a_n, x - y \rangle = 0$$

pour tout n . Par linéarité la propriété se transmet aux éléments b de l'espace vectoriel engendré par les a_n . Par hypothèse chaque élément de H , en particulier $x - y$ est limite d'une suite (b_p) de ce sous-espace. On vient de voir que

$$\langle b_p, x - y \rangle = 0$$

pour tout p . En passant à la limite on obtient, par continuité du produit scalaire, que

$$0 = \langle x - y, x - y \rangle \|x - y\|^2$$

d'où $x = y$.

N.B. Eviter absolument d'utiliser le symbole \lim quand on n'a pas déjà établi l'existence de la limite; il est beaucoup plus efficace de partir d'une égalité ou d'une inégalité large et de passer à la limite.

b) On va maintenant montrer que les deux topologies, celle définie par les semi-normes et celle définie par la distance, coïncident sur X .

Comme l'une d'elles est définie par des voisinages, on va montrer qu'un voisinage d'un point x_0 de X pour l'une est un voisinage de ce point pour l'autre, dans les deux sens. Plus précisément, pour travailler sur les voisinages particuliers d'une base, on va montrer une double inclusion.

Pour la topologie, on considère les voisinages particuliers de x_0 du type

$$N_{b_1 \dots b_p}(x - x_0) \leq \epsilon$$

où b_1, \dots, b_p sont dans H et $\epsilon > 0$.

Pour la distance, on considère les voisinages particuliers du type

$$d(x_0, x) \leq \epsilon'$$

où $\epsilon' > 0$.

N.B. Ici on a préféré écrire des inégalités larges. C'est surtout intéressant dans le second cas, à cause de la borne supérieure. Il est facile d'exprimer $\sup \alpha_i \leq M$ qui signifie que M est un majorant, moins facile d'exprimer $\sup \alpha_i < M$; ce n'est pas $\alpha_i < M$ pour tout i .

N.B. Ici on se place dans X ; le point x_0 est dans X et l'on ne considère que les x de X . C'est cela qui traduit le fait qu'on travaille sur des topologies induites. Comme on le voit c'est innocent. Remarquons seulement que X n'est pas un espace vectoriel et qu'on ne peut pas dire qu'on se ramène au cas où $x_0 = 0$ encore que cela ne changerait pas grand chose.

Explicitons les propriétés qui caractérisent les deux familles de voisinages de $x - 0$. Ceux du premier type, qui définissent la topologie, sont caractérisés par

$$|\langle b_1, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon, \dots, |\langle b_p, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon .$$

Ceux du second type, qui définissent la distance, sont caractérisés par

$$|\langle a_n, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon'$$

pour tout n .

Montrons que tout voisinage du premier type en contient un du second. Donnons-nous donc un voisinage du premier type, c'est-à-dire b_1, \dots, b_p dans H et $\epsilon > 0$.

N.B. *La façon de démarrer le raisonnement est capitale. On doit se donner des b_1, \dots, b_p et $\epsilon > 0$ arbitraires. Il n'est pas question de les particulariser. En revanche c'est $\epsilon' > 0$ qu'il va falloir choisir pour établir l'inclusion cherchée.*

Il s'agit de réaliser la propriété

$$|\langle b_1, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon, \dots, |\langle b_p, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon$$

en imposant

$$|\langle a_n, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon'$$

pour tout n avec un $\epsilon' > 0$ convenable.

Commençons par chercher à réaliser

$$|\langle b_1, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon .$$

La première réduction va consister à réaliser pour cela une propriété du type

$$|\langle b'_1, x - x_0 \rangle| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

pour un b'_1 du sous-espace vectoriel engendré par les a_n . Remarquons que la dernière inégalité va impliquer

$$|\langle b_1, x - x_0 \rangle| \leq |\langle b'_1, x - x_0 \rangle| + |\langle b_1 - b'_1, x - x_0 \rangle| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2\|b - b'_1\|$$

sachant que $\|x - x_0\| \leq 2$. Il suffit de choisir b'_1 tel que $\|b_1 - b'_1\| \leq \epsilon/4$ pour avoir la propriété cherchée.

Maintenant b_1 est une combinaison linéaire (finie) des a_n . On a

$$b_1 = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$$

si la suite (a_n) est par exemple indexée à partir de 1. Alors

$$|\langle b'_1, x - x_0 \rangle| \leq |\lambda_1| |\langle a_1, x - x_0 \rangle| + \dots + |\lambda_n| |\langle a_n, x - x_0 \rangle|$$

et donc

$$|\langle b'_1, x - x_0 \rangle| \leq (|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|)\epsilon'_1$$

si x est choisi dans le voisinage du second type associé à ϵ'_1 . On peut toujours rendre le membre de droite inférieur à $\epsilon/2$ en choisissant $\epsilon'_1 > 0$ assez petit.

N.B. *Souvent on doit raisonner à l'envers de cette façon : on veut réaliser telle propriété, on se ramène à réaliser telle autre qui va l'impliquer, puis encore telle autre sur laquelle on aura vraiment prise. On notera encore la séparation des étapes : d'un b_1 quelconque à un b'_1 du sous-espace vectoriel engendré puis aux a_n . Bien sûr on pourra remettre les calculs dans l'ordre après coup mais c'est l'ordre indiqué qui fait trouver la solution.*

Maintenant il faudrait faire pour b_2, \dots, b_p ce qu'on a fait avec b_1 . On trouverait $\epsilon'_2, \dots, \epsilon'_p$ et on prendrait pour ϵ' le plus petit.

Dans l'autre sens montrons que tout voisinage de x_0 du second type en contient un du premier type. On se donne maintenant $\epsilon' > 0$ et il s'agit de réaliser

$$|\langle a_n, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon'$$

pour tout n . Apparemment cela fait une infinité de conditions. Cependant

$$|\langle a_n, x - x_0 \rangle| \leq \|a_n\| \|x - x_0\| \leq 2\|a_n\|$$

et le membre de droite tend vers 0 avec n . On pourra choisir un rang N tel que $2\|a_n\| \leq \epsilon'$ pour $n > N$. Cela signifie que la propriété sera automatiquement réalisée au delà du rang N . Il ne reste donc qu'à réaliser

$$|\langle a_1, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon', \dots, |\langle a_N, x - x_0 \rangle| \leq \epsilon' .$$

Pour cela il suffit de choisir x dans le voisinage du premier type pour lequel $p = N$, $b_k = a_k$ et $\epsilon = \epsilon'$.

Ainsi s'achève la démonstration. *On remarquera que le fait de se placer sur une partie bornée de H est essentiel. Sur H tout en entier la topologie faible n'est pas métrisable; on le vérifiera plus tard.*

Exercice sur la métrisabilité d'un produit dénombrable

Soit (X_n) une suite d'espaces métriques. On pose

$$d(x, y) = \sup_n \min(2^{-n}, d(x_n, y_n))$$

pour $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$.

a) Montrer que l'on munit ainsi le produit X des X_n d'une distance.

b) Montrer que les projections $pr_m : x \mapsto x_m$ sont uniformément continues.

c) On se donne un espace métrique Z et une suite $f_n : Z \rightarrow X_n$ d'applications uniformément continues. On définit $f : Z \rightarrow X$ par

$$f(z) = (f_n(z)) .$$

Montrer que f est uniformément continue.

d) On se donne un espace topologique Z et une suite $f_n : Z \rightarrow X_n$ d'applications continues. Montrer que l'application f définie comme précédemment est continue.

Il résulte en particulier de b) (dans lequel on ne retient que la continuité) et de d) que la distance introduite définit une topologie vérifiant les propriétés caractéristiques du produit. Le produit est donc métrisable.

Solution.

a) Montrons d'abord les propriétés d'une distance. La symétrie est évidente. Pour l'inégalité triangulaire, on part de

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) .$$

N.B. Dans les formules complexes avec des limites, des bornes supérieures etc., il est illusoire d'essayer de dérouler un mécanisme calculatoire. Mieux vaut procéder à partir de ce qui est simple.

Peut-on mettre le minimum avec 2^{-n} dans chacun des trois termes sans détruire l'inégalité. On considère l'expression que l'on veut mettre à droite, qui est

$$\min(2^{-n}, d(x_n, y_n)) + \min(2^{-n}, d(y_n, z_n)) .$$

il s'agit de la minorer par $\min(2^{-n}, d(x_n, z_n))$, c'est-à-dire par 2^{-n} ou par $d(x_n, z_n)$. La première minoration est acquise si l'un des termes de la somme est égal à 2^{-n} . Il reste à considérer celui où aucun ne l'est, ce qui veut dire que ces termes valent $d(x_n, y_n)$ et $d(y_n, z_n)$. Alors la relation ci-dessus fournit l'autre minoration possible.

Ainsi

$$\begin{aligned} & \min(2^{-n}, d(x_n, z_n)) \\ & \leq \min(2^{-n}, d(x_n, y_n)) + \min(2^{-n}, d(y_n, z_n)) . \end{aligned}$$

Par suite

$$\min(2^{-n}, d(x_n, z_n)) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

et on obtient l'inégalité triangulaire en passant à la borne supérieure sur n dans le membre de gauche.

Enfin $d(x, y) = 0$ implique $d(x_n, y_n) = 0$ pour tout n , d'où $x_n = y_n$ pour tout n , et donc $x = y$.

b) Montrons la continuité uniforme des projections. Pour cela considérons une projection pr_m et donnons-nous $\epsilon > 0$. Nous cherchons à obtenir

$$d(pr_m(x), pr_m(y)) = d(x_m, y_m) \leq \epsilon$$

sachant que

$$d(x, y) \leq \eta$$

et un $\eta > 0$ convenable à choisir.

N.B. Ici nous avons utilisé des inégalités larges, car il est beaucoup plus simple d'exprimer une majoration large pour une borne supérieure.

Nous savons en particulier que

$$\min(2^{-m}, d(x_m, y_m)) \leq \eta .$$

S'il n'y avait pas le minimum, il suffirait de prendre $\eta = \epsilon$. Comment faire pour se débarrasser du minimum? Il suffit de prendre aussi $\eta < 2^{-m}$. Par exemple $\eta = \min(\epsilon, 2^{-m-1})$ fait l'affaire.

c) Conservant les bonnes habitudes, nous nous donnons $\epsilon > 0$ et nous cherchons à réaliser

$$d(f(z), f(z')) \leq \epsilon .$$

Cela s'écrit

$$\sup_n \min(2^{-n}, d(f_n(z), f_n(z'))) \leq \epsilon$$

et revient à

$$\min(2^{-n}, d(f_n(z), f_n(z'))) \leq \epsilon$$

pour tout n . Maintenant dès que $2^{-n} < \epsilon$ la condition est automatiquement vérifiée. Choisisant N assez grand pour que $2^{N+1} < \epsilon$ (par exemple $N > \log \epsilon / \log 2$), il n'est besoin que d'imposer

$$d(f_n(z), f_n(z')) \leq \epsilon$$

pour $n = 1, \dots, N$ (si n part à 1).

Par hypothèse, pour chaque n on peut trouver η_n tel que $d(z, z') \leq \eta_n$ implique $d(f_n(z), f_n(z')) \leq \epsilon$. Il suffit de prendre

$$\eta = \min(\eta_1, \dots, \eta_N)$$

et d'imposer $d(z, z') \leq \eta$ pour réaliser la relation cherchée.

N.B. S'il convient d'opérer dans cet ordre pour trouver la solution, il est loisible de l'exposer ensuite différemment : partant de $\epsilon > 0$ on construit N , puis des $\eta_n > 0$ et η , et on montre que $d(z, z') \leq \eta$ implique $d(f(z), f(z')) \leq \epsilon$ en remontant les calculs. C'est ce que l'on trouve dans les livres.

d) S'agissant de la continuité à valeurs dans un espace métrique, il est plus facile de travailler avec des boules ou des ϵ . Cela signifie qu'on établira la continuité en chaque point.

Donnons-nous z_0 dans Z et $\epsilon > 0$. Nous voulons réaliser

$$d(f(z_0), f(z)) \leq \epsilon .$$

Comme précédemment, nous nous ramenons à réaliser

$$d(f_n(z_0), f_n(z)) \leq \epsilon$$

pour $n = 1, \dots, N$. La différence est que Z est un espace topologique. Ce qui va remplacer une boule de centre z_0 ou un η sera un voisinage de z_0 . Par hypothèse, pour chaque n on peut trouver un voisinage V_n de z_0 tel que $z \in V_n$ implique $d(f_n(z_0), f_n(z)) \leq \epsilon$. Il suffit de prendre

$$V = V_1 \cap \dots \cap V_N$$

et d'imposer $z \in V$ pour réaliser la condition cherchée.

Quelques exercices sur la compacité

Exercice sur la topologie de Zariski

Soit n un nombre entier ≥ 1 . On considère la topologie, dite de Zariski, sur \mathbf{C}^n , dont les parties fermées sont les ensembles de zéros communs d'un ensemble \mathcal{P} , éventuellement vide, de polynômes en n indéterminées.

a) Vérifier, pour les complémentaires, les axiomes des parties ouvertes.

b) Vérifier que l'espace topologique ainsi construit est irréductible dans le sens suivant: (i) toute partie ouverte est connexe, ou bien (ii) toute partie ouverte non vide est dense, ou encore (iii) deux parties ouvertes non vides se rencontrent.

On commencera par établir, pour un espace général X , l'équivalence entre ces propriétés.

On montrera ensuite la propriété pour \mathbf{C}^n avec la topologie de Zariski. Pour cela on établira, par récurrence sur n , qu'un polynôme qui ne prend sur \mathbf{C}^n que des valeurs nulles est nul.

c) Connaissant le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices à coefficients complexes ayant n valeurs propres distinctes, l'étendre aux matrices à coefficients complexes quelconques.

N.B. *Un zéro d'un polynôme est un point de \mathbf{C}^n où le polynôme s'annule.*

Rappel. *Les axiomes des parties ouvertes sont les suivants :*

(O1) Toute réunion de parties ouvertes est ouverte.

(O2) Toute intersection finie de parties ouvertes est ouverte.

Pour la seconde propriété, on peut traiter le cas de la partie pleine et celui de l'intersection de deux parties.

Commençons par traiter le cas de la réunion de deux parties ouvertes U_1 et U_2 . Désignons par $Z_1 = U_1^c$ et $Z_2 = U_2^c$ leurs complémentaires. Il nous faut voir que $(U_1 \cap U_2)^c = Z_1 \cup Z_2$ est l'ensemble des zéros commun d'un ensemble \mathcal{P} de polynômes à construire.

Par définition Z_1 est l'ensemble des zéros communs d'un ensemble \mathcal{P}_1 de polynômes, et Z_2 celui d'un ensemble \mathcal{P}_2 . Commençons par regarder le cas particulier d'ensembles réduits chacun à un élément p_1 et p_2 .

On s'intéresse à la réunion des ensembles $p_1(z) = 0$ et $p_2(z) = 0$, i.e. à l'ensemble des points vérifiant l'une ou l'autre des ces équations.

N.B. *Il n'est pas interdit de commencer par regarder un cas particulier pour se faire une idée. C'est une méthode de base de la recherche mathématique, qui peut aussi servir pour traiter une question d'écrit.*

Ici la réponse est simple; l'ensemble $p(z) = 0$ est la réunion des précédents.

Cela suggère de choisir pour \mathcal{P} l'ensemble des polynômes $p_1 p_2$ où p_1 parcourt \mathcal{P}_1 et p_2 parcourt \mathcal{P}_2 . Soit Z l'ensemble correspondant de zéros communs. Clairement le produit s'annule quand l'un des facteurs est nul. Donc $Z_1 \subset Z$ et $Z_2 \subset Z$ de sorte que $Z_1 \cup Z_2 \subset Z$. C'est l'inclusion inverse qu'il faut établir. Donnons-nous z dans Z . On a

$$p_1(z)p_2(z) = 0$$

pour tous p_1, p_2 .

N.B. Donc $p_1(z) = 0$ ou $p_2(z) = 0$. Mais cela ne suffit pas à assurer que z est dans la réunion $Z_1 \cup Z_2$. On peut craindre que le facteur nul ne soit pas toujours du même côté.

Maintenant ou bien $p_1(z) = 0$ pour tout p_1 et z est dans Z_1 , ou alors on peut trouver un $p_1(z)$ non nul. Dans ce cas $p_2(z)$ sera nul pour tout p_2 et z est dans Z_2 . C'est gagné.

N.B. Ne pas avoir peur de tenter ce petit raisonnement par l'absurde quand on coince.

Quant à la partie pleine, c'est le complémentaire de la partie vide qui est l'ensemble des zéros du polynôme constant 1.

Le cas de la réunion d'une famille $(U_i)_{i \in I}$ de parties ouvertes est plus simple. Chaque $U_i^c = Z_i$ est l'ensemble des zéros communs d'un ensemble \mathcal{P}_i de polynômes. La réunion \mathcal{P} de ces derniers a pour ensemble de zéros communs l'intersection Z des Z_i et $U = Z^c$ est une partie ouverte qui est la réunion des U_i .

Montrons l'équivalence demandée en commençant par (i) \Rightarrow (ii). Supposant (i) il s'agit de montrer que deux ouverts quelconques se rencontrent.

N.B. Nous avons là des exemples typiques de démonstrations "pilotees par l'objectif". On regarde la propriété à démontrer, qui est de type universel. On se donne les objets concernés et on travaille jusqu'à atteindre un état où l'hypothèse, qui est aussi de type universel, puisse accrocher.

Nous nous donnons donc deux parties ouvertes non vides U et V .

N.B. Il va falloir faire intervenir la connexité, qui est une propriété négative : on ne peut pas écrire l'espace comme réunion de deux parties ouvertes disjointes non vides, ou comme réunion de deux parties fermées disjointes non vides, ou il n'existe pas d'autre partie ouverte et fermée que les parties vide et pleine. Le raisonnement par l'absurde y est naturel.

Supposons par l'absurde que U et V ne se rencontrent pas. Alors $W = U \cup V$ n'est pas connexe. C'est contraire à l'hypothèse.

N.B. Si l'on veut c'est dans ce cas un raisonnement par contraposition. Cependant raisonner par l'absurde est plus souple et plus puissant. On travaille avec à la fois l'hypothèse et le contraire de la conclusion.

Montrons (iii) \Rightarrow (ii). Cette fois on va se donner une partie ouverte non vide U . Il s'agit, par exemple, de montrer que $\overline{U} = X$. Par l'absurde, si ce n'était pas le cas $V = \overline{U}^c$ ne serait pas vide. Or c'est une partie ouverte disjointe de U , ce qui contredit l'hypothèse.

Pour finir (ii) \Rightarrow (i). On se donne maintenant une partie ouverte W . Supposons par l'absurde qu'elle ne soit pas connexe. Alors on pourrait écrire

$$W = U \cup V$$

où U, V sont des parties ouvertes disjointes non vides. Alors $U \subset V^c$, d'où

$$\overline{U} \subset V^c$$

puisque V^c est une partie fermée. Donc $X \subset V^c$, ce qui est absurde.

On montre que \mathbf{C}^n est irréductible pour la topologie de Zariski en utilisant la caractérisation (iii). Supposons, là encore par l'absurde, qu'on puisse trouver deux parties ouvertes non vides U_1 et U_2 ne se rencontrant pas. Leurs complémentaires $Z_1 = U_1^c$ et $Z_2 = U_2^c$ seraient deux parties fermées non pleines telles que

$$Z_1 \cup Z_2 = \mathbf{C}^n .$$

L'ensemble Z_1 est associé à \mathcal{P}_1 et l'ensemble Z_2 à \mathcal{P}_2 . On peut toujours supposer que les ensembles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne contiennent pas le polynôme 0 qui n'apporte aucune condition; ils sont non vides.

Si l'on remplace \mathcal{P}_1 par l'un des polynômes p_1 qu'il contient, on agrandit l'ensemble des zéros communs et l'égalité ci-dessus reste vraie. Idem pour \mathcal{P}_2 . On est ainsi ramené au cas de deux polynômes p_1, p_2 , voire d'un seul en les remplaçant par $p = p_1 p_2$ dont il va falloir montrer que le fait qu'il s'annule partout est absurde.

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 1$ on sait qu'un polynôme non nul de degré k ne peut pas avoir plus de k zéros; par conséquent il ne peut s'annuler en tout point de \mathbf{C} .

Pour passer de $n - 1$ à n , on écrit le polynôme p en n indéterminées sous la forme

$$p_0(X_2, \dots, X_n) + X_1 p_1(X_2, \dots, X_n) + \dots + X_1^k p_k(X_2, \dots, X_n) .$$

et on suppose qu'il s'annule sur \mathbf{C}^n . Si on donne à X_2, \dots, X_n des valeurs z_2, \dots, z_n , on obtient un polynôme en X_1 nul sur \mathbf{C} de sorte que p_0, \dots, p_k s'annulent en z_2, \dots, z_n . Par l'hypothèse de récurrence ils sont nuls.

Voici comment on peut en déduire le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices complexes $n \times n$. On le vérifie aussitôt pour les matrices diagonales, puis diagonalisables. Il est donc établi pour les matrices dont le polynôme caractéristique P a toutes ses racines simples. Or l'existence d'au moins une racine multiple se traduit par celle d'une racine commune à P et P' . Comme P est unitaire, cela s'écrit

$$R(P, P') = 0$$

où R est le résultant de P et P' . La condition est ainsi l'annulation d'un polynôme en les n^2 coefficients de la matrice. Les matrices dont le polynôme caractéristique n'a que des racines simples constituent ainsi un ouvert de Zariski non vide, lequel est automatiquement dense. Mais les fonctions polynômes à valeurs complexes sont des fonctions continues pour la topologie de Zariski : l'image réciproque d'une partie fermée, à savoir \mathbf{C} ou un ensemble fini, est fermée comme ensemble de zéros communs d'un ensemble de polynômes. En passant à la limite par densité, on étend alors le théorème de Cayley-Hamilton aux matrices complexes quelconques.

Exercice sur l'espace projectif réel

On considère l'espace \mathbf{R}^{n+1} euclidien et le quotient \mathbf{S}_n/\pm de la sphère euclidienne \mathbf{S}_n de cet espace par la relation identifiant x et $-x$.

a) Montrer qu'on obtient une distance sur \mathbf{S}_n/\pm en posant

$$d(X, Y) = \min(\|x - y\|, \|x + y\|)$$

où x, y sont des éléments des classes X, Y .

b) Montrer que cette distance définit la topologie quotient et que le quotient est compact.

c) Montrer que l'application naturelle $\mathbf{S}_n \rightarrow \mathbf{S}_n/\pm$ induit un homéomorphisme de la demi-sphère ouverte définie par $x_{n+1} > 0$ sur son image.

On considère maintenant l'espace quotient \mathbf{P}_n de l'espace \mathbf{R}^{n+1} euclidien privé de 0 par la relation pour laquelle les vecteurs x et y sont équivalents s'ils sont proportionnels.

d) Quelles sont les classes d'équivalence?

e) Montrer que \mathbf{P}_n est naturellement homéomorphe à \mathbf{S}_n/\pm .

f) Montrer que l'application de \mathbf{R}^n dans \mathbf{P}_n qui à (x_1, \dots, x_n) associe la classe de $(x_1, \dots, x_n, 1)$ est un homéomorphisme sur son image.

g) Donner un homéomorphisme naturel de \mathbf{P}_n sur l'espace des projecteurs orthogonaux de \mathbf{R}^{n+1} de rang exactement 1.

Solution.

a) Il s'agit d'abord de vérifier que $d(X, Y)$ est bien défini, ne dépendant que de X et Y , non du choix de x et y dans les classes. Modifier ce choix consiste à remplacer x par $-x$ ou/et y par $-y$. On voit aussitôt que chaque changement d'un signe échange les deux termes du minimum et ne change donc pas le minimum.

La symétrie est évidente. La propriété de séparation est facile. Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire. Pour cela considérons

$$d(X, Y) + d(Y, Z) .$$

Choisissons d'abord y dans Y . Choisissons ensuite x dans X de façon que $d(X, Y) = \|x - y\|$ et de même z dans Z de façon que $d(Y, Z) = \|y - z\|$. Il vient

$$d(X, Y) + d(Y, Z) = \|x - y\| + \|y - z\| \geq \|x - z\| \geq d(X, Z)$$

et c'est l'inégalité cherchée.

b) Soit $(\mathbf{S}_n/\pm, d)$ l'espace quotient muni de la distance ci-dessus. L'application qui à x associe sa classe \dot{x} est continue puisque

$$d(\dot{x}, \dot{y}) = \min(\|x - y\|, \|x + y\|) \leq \|x - y\| .$$

Elle passe au quotient pour donner

$$\mathbf{S}_n \rightarrow \mathbf{S}_n/\pm \xrightarrow{i} (\mathbf{S}_n/\pm, d)$$

où i est l'application identique. Comme l'espace de droite est séparé, celui du milieu l'est aussi. Comme la sphère \mathbf{S}_n est compacte le quotient \mathbf{S}_n/\pm l'est aussi et la flèche de droite est un homéomorphisme.

c) L'application $\mathbf{S}_n \rightarrow \mathbf{S}_n/\pm$ induit une bijection de la demi-sphère $\mathbf{S}_n \cap \{x_{n+1} > 0\}$ sur son image : en imposant le signe de x_n il n'y a plus qu'un élément dans chaque classe.

Montrons que l'application réciproque est continue en une classe \dot{a} où a est dans la demi-sphère. Il s'agit de réaliser

$$\|x - a\| \leq \epsilon$$

en imposant

$$d(\dot{x}, \dot{a}) = \min(\|x - a\|, \|x + a\|) \leq \eta$$

pour un $\eta > 0$ convenable et x dans la demi-sphère.

Il suffit pour cela de choisir $\eta \leq \epsilon$ et

$$\eta < d(-a, \mathbf{S}_n \cap \{x_{n+1} \geq 0\})$$

ce qui est possible puisque la distance (euclidienne) ci-dessus est celle à une partie compacte d'un point qui n'en fait pas partie. Dans ce cas on aura $\|x+a\| > \eta$ d'où $\|x-a\| \leq \eta$.

d) Les classes sont les droites vectorielles privées de 0.

e) L'application identique de \mathbf{S}_n dans \mathbf{R}^{n+1} privé de 0 et l'application réciproque $x \mapsto x/\|x\|$ fournissent, par passage au quotient des applications continues

$$\mathbf{S}_n/\pm \rightarrow \mathbf{P}_n$$

et

$$\mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{S}_n/\pm$$

réciproques l'une de l'autre, ce qui produit l'identification topologique cherchée.

Exercice sur le nombre de Lebesgue d'un recouvrement

Soient K un espace métrique compact et (U_i) un recouvrement ouvert de K . Montrer qu'il existe un nombre $\epsilon > 0$ (nombre de Lebesgue) tel que toute boule de rayon ϵ (resp. toute partie de diamètre $\leq \epsilon$) soit incluse dans l'un des U_i .

Indication. Penser aux fonctions $f_i(x) = d(x, U_i^c)$.

Solution.

Que peut-on dire des fonctions f_i ? D'abord elles sont continues. On sait en effet que

$$f_i(x) = \inf_{z \in U_i^c} d(x, z) .$$

Or on a

$$d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$$

d'où

$$f_i(x) - d(x, y) \leq d(y, z)$$

puis

$$f_i(x) - d(x, y) \leq f_i(y)$$

en passant à la borne inférieure en z .

En échangeant x et y on en tire

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq d(x, y) .$$

Maintenant si z est dans U_i^c , alors $f_i(x) = 0$. Si z est dans U_i , alors $f_i(z) > 0$: précisément si U_i contient la boule $B(x; r)$ alors $f_i(x) \geq r$.

N.B. La première chose à faire va être de traduire l'hypothèse suivant laquelle les U_i recouvrent K , en termes des f_i . L'hypothèse est que $\bigcup_i U_i = K$; il faut déjà l'expliciter: elle signifie que chaque point x de K est dans au moins un des U_i .

En termes des fonctions f_i , l'hypothèse assure qu'en chaque point x au moins l'une des f_i n'est pas nulle. On peut facilement construire une fonction f partout > 0 partant de là. Quitte à extraire un recouvrement fini, on se ramène au cas où i varie dans l'ensemble $1, 2, \dots, n$. Alors

$$f(x) = \max(f_1(x), \dots, f_n(x))$$

définit une telle fonction f qui est de plus continue. Sur le compact K , elle atteint sa borne inférieure ϵ qui est par conséquent > 0 . On a donc

$$\max(f_1(x), \dots, f_n(x)) \geq \epsilon$$

en tout point x .

Soit $B(x; \epsilon)$ une boule ouverte de rayon ϵ . En x le maximum est pris par l'une des f_i , soit f_k . Ainsi $f_k(x) \geq \epsilon$.

Maintenant, si y est dans la boule $B(x; \epsilon)$, on a $d(x, y) < \epsilon$. Comme

$$f_k(y) \geq f_k(x) - d(x, y)$$

on a $f_k(y) > 0$. Cela montre que la boule $B(x; \epsilon)$ est incluse dans U_k .

Ce sera vrai pour une boule fermée de rayon $\epsilon' < \epsilon$. Par ailleurs toute partie de diamètre $\leq \epsilon'$ est incluse dans une boule fermée de rayon ϵ' (mais pas $\epsilon'/2$ en général!).

Exercice sur les idéaux de $\mathcal{C}(K)$

Soit K un espace compact. On désigne par J_x l'idéal des fonctions s'annulant en un point x donné de K . Dans la suite on étudie un idéal I de $A = \mathcal{C}(K)$.

- Montrer que si I n'est inclus dans aucun J_x , alors $I = A$.
- Montrer que les J_x sont exactement les idéaux maximaux de A .
- Montrer que l'adhérence de I est l'intersection des J_x contenant I .

Indication. Pour le b) on commencera par caractériser une inclusion comme $J_x \subset J_y$.

Rappels. L'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions réelles (ou complexes) sur K possède une structure d'anneau commutatif unitaire. En même temps c'est un espace vectoriel (ou complexe). L'ensemble en fait une algèbre.

Un idéal I de l'anneau A est un sous-groupe additif tel que (dans le cas commutatif) si $a \in A$ et $b \in I$ alors $ab \in I$.

Parmi les idéaux I de A on compte l'anneau A tout entier, qui est dit impropre. Un idéal est impropre, donc égal à A , dès qu'il contient l'élément 1. Parmi les idéaux propres, sont dits maximaux les idéaux qui ne sont pas contenus strictement dans un autre idéal propre.

N.B. Dans cet exercice, on va discuter à plusieurs reprises d'inclusions ensemblistes. L'inclusion de A dans B se traduit par le fait que tout élément a de A est aussi dans B ; on l'établit en se donnant a dans A et en montrant qu'il est aussi dans B . Dire que A n'est pas incluse dans B signifie qu'on peut trouver a dans A qui ne soit pas dans B .

Solution.

a) L'hypothèse contient un quantificateur universel. Elle signifie que, pour un x quelconque, l'idéal I n'est pas inclus dans J_x , ou qu'on peut trouver une fonction de I qui n'est pas dans J_x , autrement dit qui ne s'annule pas en x .

Nous la notons f_x parce que nous allons faire varier x dans la suite, de façon à faire apparaître un recouvrement ouvert de K pour lequel nous allons exploiter la compacité de K .

Ainsi $f_x(x) \neq 0$. Puisque f_x est continue, cela vaut encore dans un voisinage V_x de x , que l'on peut supposer ouvert. Plus précisément on peut prendre pour V_x l'ensemble des y tels que $f_x(y) \neq 0$. C'est une partie ouverte, qui contient x , donc ce qu'on appelle un voisinage ouvert de x .

Maintenant, quand x parcourt K , les V_x recouvrent K car V_x contient x . De ce recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini

$$K = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n} .$$

Considérons les fonctions f_{x_1}, \dots, f_{x_n} correspondantes. Elles ne s'annulent pas simultanément sur K .

N.B. Nous allons chercher une fonction f de l'idéal I ne s'annulant pas sur K . D'abord, en multipliant par $\overline{f_x}$, on rend chaque f_x positive ou nulle. Ensuite on prend une somme.

La fonction

$$f = \overline{f_{x_1}} f_{x_1} + \cdots + \overline{f_{x_n}} f_{x_n}$$

est dans I et vérifie $f(x) > 0$ partout. Par suite la fonction $1/f$ est continue et $(1/f).f = 1$ est dans I , ce qui signifie que $I = A$.

[D'une autre façon, la famille, pour laquelle f varie dans I , de parties fermées définies par

$$f(x) = 0$$

a une intersection vide. Par suite une sous-famille finie, définie par f_1, \dots, f_n a déjà une intersection vide. En considérant

$$f = \sum_{i=1}^n \overline{f_i} f_i$$

on conclut comme précédemment.]

b) Les J_x sont évidemment des idéaux propres puisqu'ils ne contiennent pas la constante 1.

Considérons une relation d'inclusion telle que $J_x \subset J_y$. Elle signifie que tout élément de J_x est aussi un élément de J_y . Autrement dit que toute fonction nulle en x est aussi nulle en y .

C'est bien le cas si $x = y$. Mais si $x \neq y$ c'est impossible : on peut trouver une fonction nulle en x qui ne soit pas nulle en y . Par exemple, dans le cas métrique, en considérant $f(z) = d(x, z)$. Dans le cas général en considérant f nulle en x et égale à 1 en y , comme le théorème de Urysohn-Tietze nous en donne l'existence.

Les J_x sont des idéaux maximaux. Soit, en effet, une inclusion

$$J_x \subset J$$

où J est un idéal propre. Par le a) l'idéal J est inclus dans un J_y puisqu'à défaut il serait impropre. Or

$$J_x \subset J \subset J_y$$

implique $x = y$, d'où $J_x = J_y = J$.

Inversement si J est un idéal maximal, toujours par le a), comme idéal propre il est inclus dans un J_x ; comme idéal maximal il lui est égal.

c) L'inclusion de l'adhérence de I est facile. On remarque d'abord que les idéaux J_x sont fermés, s'entend fermés dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(K)$ muni de la norme uniforme. En effet si des f_n de J_x convergent uniformément vers f , on aura

$$f_n(x) = 0$$

et $f(x) = 0$ en prenant la limite en x .

L'intersection des J_x qui contiennent J est donc fermée. Elle contient évidemment J . Par suite elle contient son adhérence \bar{J} .

Pour l'inclusion inverse, si Z désigne l'ensemble des zéros communs des fonctions de I , il s'agit de voir qu'une fonction f s'annulant sur Z adhère à I .

Si x n'est pas dans Z on sait qu'on peut trouver une fonction f_x de I ne s'y annulant pas. Comme précédemment on peut introduire le voisinage ouvert V_x de x défini par $f_x(y) \neq 0$.

Cependant cela ne réalise qu'un recouvrement de Z^c a priori. Or Z^c n'a aucune raison d'être une partie fermée; on sait juste que c'est une partie ouverte. Donc on ne peut invoquer la compacité. Il faut alors ajouter une fonction qui ne sera pas dans I mais sera non nulle sur Z .

N.B. Il y a plusieurs façons de caractériser l'adhérence d'une partie A dans un espace métrique M .

D'abord, comme c'est aussi le cas dans un espace topologique général, l'adhérence est la plus petite partie fermée contenant A .

Ensuite, l'adhérence de A est l'ensemble des limites dans M de suites de A .

Surtout l'adhérence est l'ensemble des points dont tout voisinage rencontre A ce qui, dans le cas métrique, signifie que, pour $\epsilon > 0$, la boule de rayon ϵ centrée en ce point rencontre A . Les points de l'adhérence sont ceux que l'on peut approcher à ϵ près, pour $\epsilon > 0$ quelconque, par un élément de A .

Soit donc $\epsilon > 0$. Désignons par L l'ensemble fermé défini par $|f(x)| \geq \epsilon$. Introduisons une fonction f_0 continue positive sur K , nulle sur L et strictement positive sur Z . On prendra par exemple

$$f_0(x) = d(x, L)$$

si K est métrique. Dans le cas général on peut invoquer le théorème de Urysohn-Tietze puisque Z et L sont des parties fermées disjointes.

En raisonnant comme en a) sur L , on trouve des fonctions f_1, \dots, f_n de I telles que

$$g = \sum_{i=0}^n \overline{f_i} f_i$$

vérifie $g > 0$ sur K , que

$$\phi_i = \frac{\overline{f_i}}{g} f_i$$

vérifie $\phi_i \geq 0$ pour tout i , soit dans I pour $I \neq 0$, et que

$$1 = \sum_{i=0}^n \phi_i$$

sur K . Alors

$$f = \phi_0 f + \sum_{i=1}^n \phi_i f$$

montre que f est somme d'une fonction bornée par ϵ et d'une fonction de I .

Exercice sur la séparabilité d'un espace métrique compact

Soit K un espace métrique compact. Montrer que K est séparable, autrement dit qu'il admet une partie dénombrable dense.

Remarques.

1) La séparabilité n'a rien en commun avec l'axiome de Hausdorff. Peut-être le terme est-il à la possibilité de séparer les points par des éléments de l'espace dual? Pour un espace hilbertien séparable, ce qui signifie encore qu'il admet une partie dénombrable totale D , la relation $\langle d, x \rangle = 0$ pour tout x dans D implique $x = 0$; donc si $x \neq y$ on peut trouver d tel que $\langle d, x \rangle \neq 0$.

2) La propriété n'a besoin que de la précompacité.

Solution.

Par la précompacité de K , pour $\epsilon > 0$ donné, nous pouvons trouver un ensemble fini F tel que K soit recouvert par les boules de rayon ϵ dont le centre est un point de K .

Ainsi tout point x de K est-il à une distance au plus ϵ d'un point de F , autrement dit peut-il être approché à ϵ près par un élément de F .

N.B. Les parties finies sont dénombrables. Mais l'objectif n'est pas atteint. Nous nous sommes donné $\epsilon > 0$ pour utiliser la précompacité; il ne peut plus bouger.

A ce propos on notera combien il est important de savoir ce qu'on se donne, ce qui suppose déjà qu'on se débarrasse de quantificateurs qu'on est incapable de maîtriser.

Nous voulons pouvoir approcher x par un élément d'une partie qui est encore à construire, avec une précision arbitraire. Pour cela on va bien se donner $\epsilon > 0$, mais on ne s'en donnera pas un seul.

En fait on donne à ϵ la suite de valeurs $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$. Chaque fois on trouvera une partie finie F_n . La réunion D des F_n est la partie dénombrable cherchée.

Exercice sur l'uniforme convexité

On considère un exposant p tel que $1 < p < +\infty$. Montrer que

$$\left| \frac{x+y}{2} \right|^p < \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$$

si x, y sont des nombres réels distincts. En déduire que pour $\eta > 0$ fixé, on peut trouver un nombre $C \geq 0$ tel que

$$|x-y|^p \leq (C+\eta) \frac{|x|^p + |y|^p}{2} - C \left| \frac{x+y}{2} \right|^p.$$

On pourra supposer d'abord $|x|^p + |y|^p = 1$.

Solution.

N.B. Comment faut-il interpréter la première inégalité? Il est trivialement faux que l'on ait $|x+y|^p \leq |x|^p + |y|^p$: prendre $p = 2$ et $x = y = 1$ par exemple; d'ailleurs, dans ce cas le dénominateur à droite serait 2^p et on pas 2.

En fait c'est une inégalité de convexité. Elle stipule que le point milieu sur la courbe est en-dessous du point milieu sur la corde. Cependant c'est une inégalité de convexité stricte.

Or comment établir la convexité? en dérivant une ou deux fois. Ici on peut dériver une fois, car x^p est dérivable y compris à droite en 0 où $x^p/x = x^{p-1} \rightarrow 0$. En revanche on ne peut pas dériver une seconde fois si $p < 2$.

Supposons d'abord $x, y \geq 0$.

N.B. On voit bien que si x et y ont des signes différents, il y a compensation à gauche alors qu'il n'y en a pas à droite. C'est le cas où x, y qui apparaît tout de suite le plus difficile.

La fonction définie sur $[0, +\infty[$ qui à x associe x^p est strictement convexe car sa dérivée px^{p-1} est strictement croissante. Il en résulte

$$\left(\frac{x+y}{2} \right)^p < \frac{x^p + y^p}{2}$$

pour $x \neq y$.

Maintenant

$$\left| \frac{x+y}{2} \right|^p \leq \left(\frac{|x|+|y|}{2} \right)^p$$

et l'égalité $|x+y| = |x| + |y|$ n'a lieu que si x et y sont de même signe, au sens large. L'inégalité demandée suit.

N.B. Il apparaît que la relation demandée est homogène; si x, y étaient des longueurs, chaque terme serait la puissance p -ième d'une longueur. Se ramener à $|x|^p + |y|^p = 1$, ou plutôt à $(|x|^p + |y|^p)^{1/p} = 1$ consiste à prendre cette dernière valeur comme unité, ou à changer d'échelle si l'on préfère.

Si $|x|^p + |y|^p = 0$, alors $x = y = 0$ et il n'y a rien à démontrer. Sinon posons $\alpha = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$. Si l'on prend $x' = x/\alpha$, $y' = y/\alpha$, on a $|x'|^p + |y'|^p = 1$ et l'inégalité demandée reste la même avec ces dernières variables.

Supposons donc $|x|^p + |y|^p = 1$. Il s'agit de voir que

$$|x - y|^p \leq C \left[\frac{|x|^p + |y|^p}{2} - \left| \frac{x + y}{2} \right|^p \right] + \frac{\eta}{2}.$$

Pourquoi avoir regroupé les termes de la sorte? Parce que η est donné et que l'on cherche C tout simplement. Il faut faire apparaître la contribution de l'un et de l'autre et surtout voir ce que l'on peut déjà tirer de η . Tout de suite une évidence va surgir.

Le grand crochet de droite est positif ou nul d'après ce qu'on vient de voir. Donc la propriété est vraie si $|x - y|^p \leq \eta/2$.

Il suffirait alors de voir que

$$\frac{|x - y|^p}{\frac{|x|^p + |y|^p}{2} - \left| \frac{x + y}{2} \right|^p} \leq C$$

dans le cas contraire.

N.B. *Pourquoi de nouveau cette écriture? Parce qu'on cherche C . Pour l'obtenir il n'y a plus qu'à expliciter en quoi consiste ce cas contraire.*

Maintenant les relations $|x|^p + |y|^p = 1$ et $|x - y|^p \geq \eta/2$ définissent une partie de \mathbf{R}^2 qui est fermée, et bornée comme incluse dans $[-1, 1]^2$, donc compacte. Et la fonction définie par le premier membre de la relation ci-dessus est continue puisque son dénominateur ne s'y annule pas, vu qu'on y a $x \neq y$. Le théorème de la borne supérieure fournit l'existence de C .

Quelques exercices sur la compacité faible

Le procédé diagonal

Un cas particulier du théorème de Tykhonoff.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite d'espaces métriques compacts. Le produit

$$X = \prod_{n \geq 1} X_n$$

a été muni de la distance

$$d(x, y) = \sup_{n \geq 1} (\min(2^{-n}, d(x_n, y_n)))$$

qui définit sa topologie. C'est un espace métrique compact.

Démonstration. Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite de X . La suite des projections $(pr_1(x_k))$ est une suite de l'espace compact X_1 ; on peut en extraire une suite convergente.

Cela signifie qu'on l'on peut trouver une fonction ϕ_1 strictement croissante de \mathbf{N} dans \mathbf{N} telle que la suite $(x_{\phi_1(k)})$ extraite de (x_k) ait une première projection $(pr_1(x_{\phi_1(k)}))$ sur X_1 qui converge vers une valeur l_1 .

Maintenant on peut recommencer. De cette suite on peut extraire une suite $(x_{\phi_2(k)})$ dont la projection $(pr_2(x_{\phi_2(k)}))$ sur X_2 converge vers l_2 .

N.B. Si l'on extrait indépendamment des suites pour chaque facteur, on peut créer une incompatibilité dès qu'il y a deux facteurs : imaginer que l'on garde les rangs pairs pour l'un et les rangs impairs pour l'autre; il faut donc faire des extractions à l'intérieur des extractions.

De proche en proche on peut donc fabriquer des suites extraites les unes des autres, la suite $(x_{\phi_n(k)})$ étant extraite de la suite $(x_{\phi_{n-1}(k)})$ précédente et ayant une projection sur X_n qui converge vers l_n .

Faisons figurer sur un tableau les extractions successives. On a posé $\phi_0(k) = k$ pour y figurer la suite initiale.

$$\begin{array}{cccccc}
 \phi_0(0) = 0 & < & \phi_0(1) = 1 & < & \cdots & < & \phi_0(k) = k & < & \cdots \\
 \phi_1(0) & < & \phi_1(1) & < & \cdots & < & \phi_1(k) & < & \cdots \\
 \phi_2(0) & < & \phi_2(1) & < & \cdots & < & \phi_2(k) & < & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \phi_n(0) & < & \phi_n(1) & < & \cdots & < & \phi_n(k) & < & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Rappelons qu'au n -ième stade, où $n \geq 1$, on s'est arrangé pour que la suite $(x_{\phi_n(k)})$ ait une projection sur X_n qui converge vers une valeur l_n .

Chaque ligne est extraite de la ligne située au-dessus (et donc de chaque ligne au-dessus). Mieux, si l'on considère la ligne n à partir du rang K , elle est extraite de celle (et donc celles) au-dessus à partir du même rang K ; en effet $\phi_n(K) \geq \phi_{n-1}(K)$.

N.B. Il faut comprendre que les ϕ_k sont des extractions composées. Pour expliciter ce que l'on fait, mieux vaut changer le nom de l'indice quand on opère une extraction de suite, comme pour le changement de variable dans une intégrale. Sinon l'on se trompe presque invariablement.

Par exemple, après avoir opéré la première extraction $k = \phi_1(p)$ (ce qui s'écrit aussi $k = k_p$) on opère une extraction à l'intérieur en posant $p = \psi_2(q)$ d'où $k = \phi_1(\psi_2(q))$ ou $\phi_2 = \phi_1 \circ \psi_2$.

C'est maintenant qu'on sort l'argument décisif. On considère la suite diagonale, dont $y_k = x_{\phi_k(k)}$ est le terme général.

Comparée à la suite $(x_{\phi_n(k)})$, la suite diagonale en est une suite extraite à partir du rang n . En particulier elle est extraite de la suite initiale. En particulier aussi, toutes ses projections convergent, de sorte qu'elle-même converge dans l'espace produit vers l'élément $l = (l_n)$ de ce dernier.

Ainsi a-t-on extrait de (x_k) une suite convergente, ce qui démontre pour le produit la propriété de Bolzano-Weierstraß.

Remarque. Le théorème de Tykhonoff général dit qu'un produit quelconque d'espaces topologiques compacts est compact.

Exercice sur la compacité faible

Soit un espace hilbertien séparable H , dans lequel $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite totale tendant vers 0. On considère sa boule unité fermée X , dont nous avons vu qu'elle était métrisable pour la topologie faible.

a) Soit (x_k) une suite de X . Montrer qu'on peut se ramener, par extraction d'une sous-suite, au cas où la suite $(\langle x_k, a_n \rangle)_k$ converge pour tout n .

Indication. On pourra utiliser l'application

$$x \mapsto (\langle x, a_n \rangle)_n$$

de X dans $D^{\mathbf{N}}$, où D est un disque fermé borné convenable de \mathbf{C} .

b) Soit y un élément quelconque de H . Montrer alors que la suite $\langle x_k, y \rangle$ est convergente. On notera $\phi(y)$ cette limite.

c) Montrer que ϕ est linéaire et que $|\phi(y)| \leq \|y\|$. En déduire que

$$\phi(y) = \langle x, y \rangle$$

pour un certain x de X et que x est la limite faible des x_k .

d) Reprendre le raisonnement pour la boule unité fermée du dual d'un espace normé séparable.

Solution.

a) Considérons une suite

$$(\langle x, a_n \rangle)$$

où x est dans X . Comme

$$|\langle x, a_n \rangle| \leq \|x\| \|a_n\| \leq \|a_n\|$$

on a

$$|\langle x, a_n \rangle| \in D$$

si D est le disque fermé de centre 0 et de rayon R , dès que R majore les $\|a_n\|$. Un tel rayon existe puisque la suite $\|a_n\|$, qui tend vers 0, est bornée.

Soit maintenant (x_k) . Il s'agit de voir qu'on peut en extraire une suite $(x_{\phi(k)})$ telle que la projection $(\langle x_{\phi(k)}, a_n \rangle)_k$ converge pour tout n .

N.B. *On veut opérer une extraction qui marche pour tout n . Il ne s'agit pas d'opérer une extraction pour chaque n , a fortiori de façon désordonnée. Ou bien on remet en place la stratégie, lourde à rédiger, du procédé diagonal, ou bien on utilise la compacité du produit.*

Le produit

$$D^{\mathbf{N}} = \prod_n D_n$$

où $D_n = D$ pour tout n , est compact. En effet le disque D , fermé et borné dans un espace normé de dimension finie, est compact. C'est une conséquence du cas particulier du théorème de Tykhonoff.

Appliquons à l'image de la suite (x_k) dans ce produit compact la propriété de Bolzano-Weierstraß. On peut extraire de (x_k) une suite $(x_{\phi(k)})$ dont l'image dans le produit converge. Toutes les projections de cette image vont alors converger. Or ce sont les suites $(\langle x_{\phi(k)}, a_n \rangle)_k$.

On change les notations pour appeler (x_k) la suite extraite. Elle vérifie la propriété demandée.

b) Il est clair que la propriété s'étend aux combinaisons linéaires b d'éléments a_n . La suite de terme général

$$\langle x_k, b \rangle$$

sera encore convergente.

Or ces combinaisons linéaires permettent d'approcher tout élément y de H .

Donnons-nous précisément un tel y et cherchons à montrer la convergence de la suite

$$\langle x_k, y \rangle .$$

N.B. Il est tentant de se donner $\epsilon > 0$. Mais pour quoi en faire? Une fois ce dernier fixé, il n'est plus possible de chercher un candidat à la limite : la limite ne peut pas dépendre de ϵ .

Si l'on doit chercher un candidat à la limite il faut le chercher tout de suite. On peut considérer une suite $b_n \rightarrow y$ telle que chaque $\langle x_k, b_n \rangle$ ait une limite l_n . Si l_n a une limite l ce serait peut-être un candidat.

Mais comment montre-t-on qu'une suite converge quand on ne connaît pas sa limite? Il y a le critère de Cauchy pour cela. La stratégie esquissée aboutirait mais penser tout de suite au critère de Cauchy est plus simple.

On va utiliser le critère de Cauchy. On se donne donc $\epsilon > 0$ et on cherche à réaliser

$$|\langle x_k - x_{k+l}, y \rangle| \leq \epsilon$$

pour k assez grand et $l \geq 0$. Or on majore le membre de gauche par

$$|\langle x_k - x_{k+l}, b \rangle| + |\langle x_k - x_{k+l}, y - b \rangle| .$$

Dans cette somme on commence par majorer le second terme par

$$\|x_k - x_{k+1}\| \|y - b\| \leq 2\|y - b\|$$

par $\epsilon/2$ en choisissant b pour que $\|y - b\| \leq \epsilon/3$.

Ensuite on choisit K assez grand de façon que le premier terme soit majoré par $\epsilon/3$ pour $k \geq K, l \geq 0$.

N.B. On respectera scrupuleusement cet ordre. On ne peut choisir K qu'une fois b choisi. Bien sûr il n'aurait pas fallu que le choix de b dépende de k . Ce genre de raisonnement est typique de ce qu'on appelle "couper ϵ en deux".

En même temps on voit toute l'importance de poser les quantificateurs. A tout moment on doit savoir ce qui a été choisi.

c) Les propriétés de la limite vis-à-vis des opérations font que ϕ est évidemment linéaire. Par ailleurs

$$|\langle x_k, y \rangle| \leq \|x_k\| \|y\| \leq \|y\|$$

donne à la limite

$$|\phi(y)| \leq \|y\| .$$

Ainsi ϕ est une forme linéaire de norme ≤ 1 . Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur x de H tel que

$$\phi(y) = \langle x, y \rangle$$

pour tout y . De plus $\|x\| \leq 1$ de sorte que x est dans X .

Enfin x_k converge faiblement vers x : cela signifie que $\langle x_k, y \rangle$ converge vers $\langle x, y \rangle$ pour tout y , ce qui est bien le cas.

d) Si E est un espace normé séparable et E' son dual (fort), espace des formes linéaires sur E muni de la norme d'opérateur, alors la boule unité fermée X de E' est compacte pour la topologie faible, qui est celle de la convergence simple sur E et qui est définie comme dans le cas hilbertien, mais avec les semi-normes

$$x' \mapsto |x'(b)|$$

au lieu de

$$x' \mapsto |\langle x', b \rangle| .$$

Les démonstrations sont strictement les mêmes. On est juste dispensé du recours au théorème de représentation.

N.B. Certains auteurs notent $\langle x', x \rangle$ la valeur $x'(x)$ de x' en x ; de cette façon la différence avec le cas hilbertien est invisible.

La topologie faible sur E' est appelée par certains faible, de l'anglais weak* topology; nous verrons plus tard la bonne terminologie; en allemand on parle de schwache Topologie.*

Le cas hilbertien consiste à regarder les éléments H comme des formes linéaires sur H (à conjugaison près dans le cas complexe) : à x on associe la forme $y \mapsto \langle x, y \rangle$; autrement dit on voit $\langle x, y \rangle$ comme $x(y)$.

Exercice sur le théorème de Helly

Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes sur l'intervalle I ; on suppose que l'ensemble des valeurs est borné en tout point x de I .

a) Montrer qu'on peut extraire de (f_n) une suite qui converge simplement sur $D = I \cap \mathbf{Q}$, complété éventuellement par les bornes de I qui seraient dans I .

b) Montrer que la limite ainsi définie sur D peut se prolonger en une fonction croissante f sur I .

c) Montrer que l'ensemble des points de saut de f est dénombrable; en déduire que l'on peut extraire de (f_n) une suite qui converge simplement sur I .

Solution.

a) On nous demande de montrer l'existence d'une suite extraite convergente. Cela va résulter d'une propriété de compacité. Qu'y a-t-il de compact dans les hypothèses?

En chaque point x de I , les valeurs $f_n(x)$ de la suite f_n sont dans une partie bornée de \mathbf{R} , donc dans un segment $[-M_x, M_x]$, lequel est compact.

N.B. Il est illusoire de tenter de jongler avec des quantificateurs si l'on ne maîtrise pas la différence entre une majoration en chaque point x et une majoration uniforme en x ; il vaut beaucoup mieux s'habituer à s'exprimer comme on vient de le faire; ici on a mis M_x plutôt que M pour bien faire apparaître la dépendance en x et parce qu'on n'a pas voulu fixer un point x particulier.

Il est question de convergence simple, ce qui fait penser à la convergence dans un produit; par ailleurs il faudra un produit dénombrable pour avoir la compacité et la métrisabilité, donc le droit d'extraire une sous-suite.

L'ensemble D est dénombrable car l'ensemble \mathbf{Q} l'est et qu'on y a ajouté au plus deux points. Le produit

$$\prod_{x \in D} [-M_x, M_x]$$

est donc métrisable compact.

Quel rapport entre une fonction f_n sur I et un élément du produit?

N.B. Rappelons qu'une famille $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ indexée par A d'éléments de E est la donnée pour chaque indice α de A d'un élément f_α de E .

Une application f de A dans E est la donnée pour chaque α dans A d'un élément $f(\alpha)$ de E .

Il n'y a pas de différence entre fonctions et familles; si ce n'est que pour les familles on peut, comme ici, faire varier l'ensemble d'arrivée. La différence se limite à la terminologie et aux notations : $f(\alpha)$ ou f_α . Il y a aussi une différence de pouvoir évocateur. Stricto sensu les termes sont synonymes, au détail indiqué près.

On va "envoyer" la suite dans le produit en associant à chaque f_n la famille

$$(f_n(x))_{x \in D}$$

indexée simplement par D . Essentiellement on a pris la restriction de f à D .

Considérons donc l'image de la suite (f_n) dans le produit. Par compacité de ce dernier, on peut trouver une application $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que l'image de la suite extraite $(f_{\phi(n)})$ (ou plutôt $(f_{\phi(p)})$ posant $n = \phi(p)$) converge dans le produit. Pour alléger l'écriture nous supposons l'extraction déjà opérée et désignons toujours par (f_n) la suite extraite.

N.B. Ce genre d'artifice rédactionnel est commode pour soulager le discours et il faudrait savoir le pratiquer. Il convient de prendre quelques précautions cependant. Il ne faut retenir des propriétés acquises pour (f_n) que celles qui se transmettent à la suite extraite. Ici cela va tout seul.

Maintenant chaque composante $(f_n(x))$ du produit converge. Ce signifie bien que la suite extraite converge en chaque point x de D .

Si l'on ne veut pas utiliser le théorème de Tykhonoff, on peut d'abord extraire de la suite (f_n) , une suite $(f_{1,n})$ dont les valeurs en x_1 convergent, puis de cette dernière une suite $(f_{2,n})$ dont les valeurs en x_2 convergent ... La suite diagonale $(f_{n,n})_{n \geq 1}$ est encore une suite extraite de (f_n) , mais aussi, à partir d'un certain rang, de toutes les suites précédentes. Elle converge en tout point de D .

Cependant développer les pointillés, ce qui revient à démontrer le théorème, est assez fastidieux.

b) La limite f ainsi définie sur D est croissante. Supposons le problème résolu et désignons par \tilde{f} un prolongement convenable. Pour x dans I et y, z dans D tels que

$$y \leq x \leq z ,$$

on doit avoir

$$f(y) \leq \tilde{f}(x) \leq f(z) .$$

Il existe toujours des y, z parce qu'on a mis dans D les extrémités de I qui sont dans I . Les $f(y)$ sont majorés et les $f(z)$ minorés. On peut donc passer aux limites monotones, les membres extrêmes étant bien définis a priori. Cela donne

$$\lim_{y \rightarrow x, y \in D, y \leq x} f(y) \leq \tilde{f}(x) \leq \lim_{z \rightarrow x, z \in D, z \geq x} f(z)$$

où la limite de gauche est une borne supérieure et celle de droite une borne inférieure.

Il suffirait d'imposer ces conditions à \tilde{f} pour avoir les propriétés cherchées. Par exemple, on peut définir le prolongement par

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in D, y \leq x} f(y) = \sup_{y \in D, y \leq x} f(y)$$

ce qui donnera le plus petit prolongement possible. Clairement $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour x dans D car x fait partie des y sur lesquels on prend la borne supérieure.

Etant donnés maintenant $x < z$ dans I , on choisit z dans D tel que

$$x \leq z \leq y$$

et on montre aussitôt que

$$\tilde{f}(x) \leq f(z) \leq \tilde{f}(y)$$

ce qui fournira la croissance de \tilde{f} .

c) Désormais on écrit f pour \tilde{f} .

N.B. En un point x donné, la fonction croissante f possède toujours une limite à gauche et une limite à droite; si elles sont égales la fonction est continue; sinon cette dernière présente un saut égal à la différence $f(x+0) - f(x-0)$ entre ces limites.

Si $[a, b]$ est un segment inclus dans I , on a d'abord

$$\sum_{x \in]a, b[} f(x+0) - f(x-0) \leq f(b) - f(a) .$$

N.B. On peut toujours prendre la somme d'une famille quelconque de nombres ≥ 0 : c'est la borne supérieure des sommes prises sur les parties finies.

Cette inégalité s'obtient en considérant d'abord une somme finie, prise sur des points $a < x_1 < \dots < x_n < b$ où f présente un saut et en majorant la somme correspondante. On le fait en intercalant y_i entre x_i et x_{i+1} et en complétant par $y_0 = a$ et $y_n = b$, parce que

$$f(y_i) - f(y_{i-1}) \geq f(x_i+0) - f(x_i-0)$$

évidemment.

N.B. Une propriété importante de la somme d'une famille de nombres positifs ou nuls est que si sa valeur est finie alors l'ensemble des indices fournissant un terme non nul est dénombrable.

Ainsi peut-on couper une valeur finie, un $\epsilon > 0$, en une infinité dénombrable de morceaux, mais pas davantage. C'est cela qui fait l'importance jouée par les suites de fonctions en calcul intégral ou théorie des probabilités.

Si S est la somme, il y a en effet au plus un terme qui soit $\geq S$; parmi les autres il y en a au plus 2 qui soient $\geq S/2 \dots$ au plus 2^n qui soient $\geq S/2^n \dots$. On atteint ainsi tous les termes non nuls qu'on peut ainsi ranger en une suite finie ou infinie.

Il résulte de cela que l'ensemble des points de saut sur $]a, b[$ est dénombrable. En écrivant l'intérieur de I comme réunion dénombrable d'une suite croissante de segments, puis en ajoutant au besoin des extrémités, on montre que l'ensemble S des points de saut sur I est aussi dénombrable.

En raisonnant comme en a), on se ramène à supposer que la suite (f_n) converge sur $D \cup S$. Il ne reste plus qu'à montrer la convergence en un point de continuité de f , non nécessairement dans D .

Précisément soit x un point de continuité; pour simplifier on fait la démonstration lorsque x est intérieur à I .

Etant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que si x' dans I vérifie $|x' - x| \leq \alpha$ alors $|f(x') - f(x)| \leq \epsilon/2$. Maintenant on peut aussi trouver y et z rationnels dans $]x - \alpha, x[$ et $]x, x + \alpha[$ respectivement. Par convergence de la suite (f_n) en y et z , on peut trouver N tel que $|f_n(y) - f(y)| \leq \epsilon/2$ et $|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon/2$ pour $n \geq N$. On écrit alors

$$f_n(x) - f(x) \leq f_n(z) - f(z) + f(z) - f(x) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

et

$$f_n(x) - f(x) \geq f_n(y) - f(y) + f(y) - f(x) \geq -\epsilon/2 - \epsilon/2 = -\epsilon$$

pour conclure.

Quelques exercices sur la compacité forte

Exercice sur le théorème d'Ascoli

a) Soit H la partie de $\mathcal{C}[0, 1]$ constituée des fonctions f telles que

$$|f(x)| \leq 1$$

et

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

pour tous x, y dans $[0, 1]$.

Montrer directement que H est compacte.

b) On se donne en chaque point x un module de continuité ω_x , qui est une fonction croissante $[0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ nulle et continue en 0. On remplace la seconde condition par

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_x(|x - y|) .$$

Etendre le résultat.

c) Que faut-il changer quand $[0, 1]$ est remplacé par un espace métrique compact?

d) Par quoi peut-on remplacer la première propriété quand les fonctions sont à valeurs dans un espace métrique?

Remarque. L'espace $\mathcal{C}[0, 1]$ est muni de la norme uniforme.

Indication. Introduire l'ensemble $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$.

Généralisation. L'exercice fait démontrer un cas particulier du théorème d'Ascoli, lequel n'est pas loin de l'énoncé général suivant.

Soient K un espace compact et M un espace métrique. Pour qu'une partie H de l'espace $\mathcal{C}(K, M)$ muni de la distance uniforme $d(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$ soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux propriétés suivantes.

- en chaque point x de K , elle est équicontinue (on dit aussi également continue): pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un voisinage V de x tel que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ pour y dans V et f dans H ,

- en chaque point x de K , l'ensemble $H(x)$ des valeurs prises par les fonctions de H est relativement compact dans M .

N.B. Lorsque M est un espace normé de dimension finie, la seconde propriété signifie que $H(x)$ est borné; on parle de partie équibornée en x .

N.B. En fait, compte-tenu de la compacité de M , ces propriétés impliquent l'uniforme équicontinuité et la relative compacité globale des valeurs.

Solution.

a) L'espace H est métrisable comme sous-espace d'un espace normé. C'est d'ailleurs évidemment une partie fermée. Montrons qu'elle est compacte et donnons pour cela une suite (f_n) de H . Il s'agit d'en extraire une suite uniformément convergente; la limite sera automatiquement dans H et en particulier continue.

On va commencer par en extraire une suite qui converge simplement sur $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$. Les fonctions de H prennent leurs valeurs dans le segment $[-1, 1]$. Considérons l'application de H dans le produit métrisable compact

$$\prod_{x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1]} [-1, 1] = [-1, 1]^{\mathbf{Q} \cap [0, 1]}$$

qui à f associe la famille

$$(f(x))_{x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1]}$$

de ses valeurs sur $x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1]$.

En appliquant à l'image de la suite (f_n) dans le produit la propriété de Bolzano-Weierstraß, on extrait de la suite (f_n) une suite $(f_{\phi(n)})$ dont l'image dans le produit converge; cela signifie que toutes les composantes convergent, i.e. que la suite $(f_n(x))$ converge pour tout x dans $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$. C'est ce que l'on cherchait dans un premier temps.

Désormais on note (f_n) la suite extraite. Elle converge simplement sur $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$. Il s'agit de voir qu'elle converge uniformément sur $[0, 1]$.

On a donc un candidat f à la limite défini sur $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ seulement et y vérifiant les propriétés des fonctions de H , en particulier l'uniforme continuité. On peut chercher à prolonger f à $[0, 1]$. Le prolongement sera unique à cause du prolongement par densité des identités. Si x est dans $[0, 1]$ on définit $f(x)$ comme limite d'une suite $f(r_k)$ où les r_k sont rationnels et $r_k \rightarrow x$; l'existence de la limite vient de ce que r_k est de Cauchy, donc aussi $f(r_k)$ à cause de la propriété de Lipschitz, sachant que \mathbf{R} est complet; par ailleurs la limite ne dépend pas du choix de (r_k) .

Cependant le plus dur resterait encore à faire. On préfère donc appliquer directement le critère de Cauchy.

On va appliquer le critère de Cauchy de convergence uniforme. Soit donc $\epsilon > 0$. On cherche à réaliser

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$$

pour $n \geq N$ et $p \geq 0$, où N est convenablement choisi.

On a de façon générale

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\leq |f_{n+p}(y) - f_n(y)| + |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(y)| + |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq |f_{n+p}(y) - f_n(y)| + 2|x - y| \end{aligned}$$

Il est tentant de conclure comme suit. On choisit y dans $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ tel que $|x - y| \leq \epsilon/3$. Comme la suite converge en y , on peut trouver N tel que $n \geq N$, $p \geq 0$ impliquent $|f_{n+p}(y) - f_n(y)| \leq \epsilon/3$ etc.

Malheureusement un tel raisonnement est faux. En effet N dépend de y et y dépend de x . Or la convergence uniforme est précisément une convergence pour laquelle N ne doit pas dépendre de x ! D'ailleurs introduire ainsi N supposerait qu'on l'a fixé, et si l'on fixe x d'abord, adieu la convergence uniforme!

Cependant, $\epsilon > 0$ étant ici fixé une fois pour toutes, pour approcher x à moins de ϵ il n'est pas besoin de tous les y rationnels; un nombre fini suffit.

Considérons un nombre entier K tel que $2^{-K} \leq \epsilon/3$ puis les points rationnels

$$y_k = k2^{-K}$$

où $k = 0, 1, \dots, 2^K$. Pour chaque y_k on choisit N_k assez grand pour que $|f_{n+p}(y_k) - f_n(y_k)| \leq \epsilon/3$ dès que $n \geq N_k$, $p \geq 0$, ce qui est possible puisque la suite converge en ce point. On pose $N = \max_k N_k$.

Si x est dans $[0, 1]$ on peut trouver un y_k tel que $|x - y_k| \leq \epsilon/3$. Prenant $y = y_k$ dans la majoration ci-dessus, on obtient la propriété cherchée.

Remarque. On pose $g = f_{n+p} - f_n$. Sachant que $|g(x)| \leq \epsilon/3$ aux points y_k et que $|g(x) - g(y)| \leq 2|x - y|$, faire apparaître sur un dessin (pour lequel $K = 3$) un encadrement uniforme de g sur $[0, 1]$.

b) On remplace l'inégalité du a) par

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(y) - f_n(y)| + 2\omega(|x - y|)$$

où l'on peut aussi bien prendre $\omega = \omega_x$ ou $\omega = \omega_y$.

On cherche à imposer maintenant $\omega_x(|x - y|) \leq \epsilon/6$. Par la continuité de ω_x en 0, on peut trouver $\eta_x > 0$ tel que $|x - y| < \eta_x$ implique cette inégalité. La dernière condition est l'appartenance de y à $]x - \eta_x, x + \eta_x[$

Cependant on ne veut mobiliser qu'un nombre fini de valeurs de y dans $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$. On note que les intervalles ci-dessus constituent un recouvrement ouvert de $[0, 1]$. On peut donc en extraire un recouvrement fini par des

$$]x_k - \eta_k, x_k + \eta_k[$$

où $\eta_k = \eta_{x_k}$ et où $k = 1, 2, \dots, K$.

On choisit un y_k dans chacun, puis des N_k , puis N . Pour finir on note que x est dans un $]x_k - \eta_k, x_k + \eta_k[$. On a alors

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x_k) - f_n(x_k)| + \epsilon/3$$

et

$$|f_{n+p}(x_k) - f_n(x_k)| \leq |f_{n+p}(y_k) - f_n(y_k)| + \epsilon/3$$

en utilisant dans les deux cas ω_{x_k} pour contrôler les derniers termes de droite.

c) Si K est un espace métrique compact, il admet une partie dénombrable dense; elle remplace $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$. C'est la seule chose à changer.

d) Il ne suffit pas que les valeurs soient bornées. On demande qu'en chaque point x les valeurs appartiennent à une partie compacte L_x . Leur produit, pour x dans une partie dénombrable dense, sera compact. Enfin un espace métrique compact étant complet, on pourra appliquer le critère de Cauchy.

Exercice sur les sous-espaces spectraux

On considère un opérateur compact K d'un espace normé complet E et on se donne $\epsilon > 0$.

a) Soit y un élément d'un noyau itéré $\ker(K - \lambda I)^r$. On note C_y le sous-espace vectoriel engendré par les $(K - \lambda I)^s y$ pour s entier ≥ 0 . Montrer que C_y est de dimension finie et stable par K .

b) On note E_ϵ la somme des C_y relatifs aux valeurs spectrales λ telles que $|\lambda| \geq \epsilon$, i.e. l'ensemble des sommes (finies) d'éléments appartenant à l'un de ces espaces.

Montrer que E_ϵ est stable par K . Montrer qu'on peut trouver x_1, \dots, x_n dans E_ϵ tels que l'image par K de la boule unité ouverte de cet espace soit incluse dans la réunion des boules de centres x_1, \dots, x_n et de rayon $\epsilon/2$.

c) On suppose chaque x_i décomposé en une somme d'éléments des espaces C_y et on considère le sous-espace F de dimension finie somme des C_y concernés. Montrer que K induit une application linéaire continue

$$\tilde{K} : E_\epsilon/F \rightarrow E_\epsilon/F$$

dont on demande de majorer la norme.

d) Montrer que $F = E_\epsilon$. Pour cela on supposera que F ne contient pas un certain C_y relatif à un λ tel que $|\lambda| \geq \epsilon$, puis qu'il contient un certain $(K - \lambda I)^{s+1}y$ sans contenir $z = (K - \lambda I)^s y$. Apporter une contradiction.

e) En déduire un énoncé classique de Frédéric Riesz. En déduire des propriétés du spectre d'un opérateur compact.

Rappel. Si E est un espace normé et F un sous-espace fermé de E , l'espace vectoriel quotient, espace des classes $\dot{x} = x + F$, est muni de la norme

$$\|\dot{x}\| = \inf_{y \in F} \|x + y\| .$$

L'application canonique

$$E \rightarrow E/F$$

est celle qui à x associe sa classe \dot{x} . La boule unité ouverte du quotient E/F est l'image de celle de E .

Solution.

a) On a $(K - \lambda I)^s y = 0$ pour $s = r$, donc aussi pour $s \geq r$, de sorte que C_y est de dimension au plus r .

De plus C_y est stable par K puisque l'image

$$K(K - \lambda I)^s y = (K - \lambda I)^{s+1} y + \lambda(K - \lambda I)^s y$$

d'un de ses générateurs est dans C_y aussi.

Remarque. En fait $C_y = \mathbf{C}[K]y$ où $\mathbf{C}[K]$ est l'anneau des polynômes en K ; c'est évidemment un sous-espace stable par K ; de plus il est de dimension $\leq r$ car $\mathbf{C}[K] = \mathbf{C}[K - \lambda]$: un polynôme en K est un polynôme en $K - \lambda$.

b) D'abord E_ϵ est stable comme somme de sous-espaces stables. Ensuite, si B est la boule unité ouverte de E_ϵ , on a une inclusion du type

$$K(B) \subset x_1 + \frac{\epsilon}{2}B \cup \dots \cup x_n + \frac{\epsilon}{2}B$$

par précompacité de $K(B)$.

N.B. Il faudrait mettre des parenthèses; on a préféré utiliser un espacement plus important pour des raisons esthétiques.

c) On considère la composée de K avec l'application canonique $p : E_\epsilon \rightarrow E_\epsilon/F$ qui à x associe sa classe $x + F$. Elle s'annule sur F et définit par passage au quotient une application linéaire continue $\tilde{K} : E_\epsilon/F \rightarrow E_\epsilon/F$ suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_\epsilon & \xrightarrow{K} & E_\epsilon \\ \downarrow p & \searrow & \downarrow p \\ E_\epsilon/F & \xrightarrow{\tilde{K}} & E_\epsilon/F \end{array}$$

En passant au quotient dans l'inclusion ci-dessus il vient

$$\tilde{K}(B) \subset \frac{\epsilon}{2}\tilde{B}$$

où \tilde{B} est la boule unité ouverte de E_ϵ/F . Cela signifie que $\|\tilde{K}\| \leq \epsilon/2$.

d) On raisonne par l'absurde en supposant que F n'est pas E_ϵ , donc ne contient pas un certain C_y relatif à un λ tel que $|\lambda| \geq \epsilon$; cela signifie qu'il ne contient pas un certain $z = (K - \lambda I)^s y$ où l'on peut supposer s le plus grand possible, sachant que c'est trivial pour $s = r$, autrement dit en supposant $(K - \lambda I)^{s+1}y$ dans F . Alors $Kz = \lambda z$ modulo F , i.e. $\tilde{K}z = \lambda z$, ce qui implique $\|\tilde{K}\| \geq \epsilon$ puisque $z \neq 0$.

e) Donc E_ϵ est de dimension finie. Cela implique que les sous-espaces spectraux relatifs à une valeur propre non nulle sont de dimension finie, que la suite des noyaux itérés est stationnaire et que les valeurs propres ne s'accumulent qu'en 0.

En particulier les sous-espaces propres relatifs à une valeur propre non nulle sont de dimension finie. Notamment l'identité de E ne peut être un opérateur compact qu'en dimension finie.

Exercice sur le théorème de Montel

Si V est une partie ouverte de \mathbf{C} on note $H^\infty(V)$ l'espace des fonctions holomorphes bornées sur V , muni de la norme uniforme

$$\|f\|_V = \sup_{z \in V} |f(z)| .$$

On supposera établi que cet espace est complet.

a) Soient a un nombre complexe et $r > 0$. On note D (resp D_+) le disque ouvert de \mathbf{C} de centre a et de rayon r (resp $2r$). On s'intéresse à des applications linéaires de l'espace $H^\infty(D_+)$ dans l'espace $H^\infty(D)$.

Majorer la norme de l'application qui à la fonction f associe la fonction $z \mapsto \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n$. Montrer que l'application de restriction à D est compacte.

b) On considère une partie ouverte U de \mathbf{C} et on introduit la famille \mathcal{F} des disques ouverts $D(s; r)$ dont le centre s est un point de U à coordonnées rationnelles et le rayon r un nombre rationnel vérifiant $0 < 2r < d(s, U^c)$. Montrer que ces disques recouvrent U .

c) Soit une suite (f_n) de fonctions holomorphes dans U . On suppose que pour toute partie compacte K de U on peut trouver une constante $M_K \geq 0$ telle que $|f_n(z)| \leq M_K$ pour z dans K et n quelconque : on dit que la suite (f_n) est "bornée" ou "normale" au sens de Montel.

Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout disque de la famille \mathcal{F} .

d) Montrer que cette suite extraite converge uniformément sur toute partie compacte de U . Montrer que sa limite est holomorphe.

Indication. Pour le c) on introduira pour chaque D de \mathcal{F} une partie compacte L_D convenable de $H^\infty(D)$ et on considèrera le produit

$$\prod_{D \in \mathcal{F}} L_D .$$

Rappel. Si f est holomorphe dans le disque de centre a et de rayon ρ et si $|f|$ y est majorée par M , alors les $a_n = f^{(n)}(a)/n!$ vérifient les inégalités de Cauchy $|a_n|\rho^n \leq M$.

Solution.

a) Si $\|f\|_{D_+} = M$, les inégalités de Cauchy donnent $|a_n|(2r)^n \leq M$ où $a_n = f^{(n)}(a)/n!$. Par suite

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n \right| \leq \frac{\|f\|_{D_+}}{2^n}$$

sur D , soit

$$\left\| \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n \right\|_D \leq \frac{\|f\|_{D_+}}{2^n}$$

de sorte la norme de l'application cherchée est majorée par 2^{-n} .

Ces applications sont de rang 1, donc compactes. Leur somme converge absolument en norme d'opérateur vers la restriction de f à D , qui est alors aussi compacte.

b) Pour voir qu'il s'agit d'un recouvrement, il faut pouvoir construire une boule contenant un point z donné de U . Faisons intervenir la distance $d = d(z, U^c)$ de z au bord.

N.B. On cherche un disque fermé $D(s; r)$; comme il doit contenir z , son rayon r doit vérifier $r > |z - s|$; de plus $d(s, U^c) \geq d(z, U^c) \geq |z - s| > d - r$ doit majorer $2r$. Cela oriente vers $3r \leq d$ donc $|z - s| < d/3$. Il reste à exiger que s soit à coordonnées rationnelles et que r soit rationnel.

Considérons un point s à coordonnées rationnelles tel que $|z - s| < d/3$; alors $d(s, U^c) \geq d(z, U^c) - |z - s| > 2d/3$. Soit r un nombre rationnel tel que $|z - s| < r \leq d/3$; alors le disque ouvert $D(s; r)$ contient z et vérifie $d(s, U^c) > 2r$.

c) Soit un disque $D = D(s; r)$ de la famille \mathcal{F} et D_+ le disque de même centre et de rayon double. Le disque fermé correspondant à D_+ est inclus dans U , de sorte que les $|f_n|$ y sont majorées par une constante M_D . Cela signifie que les restrictions des f_n à D_+ sont dans la boule de centre 0 et de rayon M_D de l'espace $H^\infty(D_+)$.

Or l'application de restriction de $H^\infty(D_+)$ dans $H^\infty(D)$ est compacte et l'image de la boule précédente est relativement compacte, i.e. incluse dans une partie compacte L_D . Alors les restrictions des f_n à D appartiendront à cet espace L_D .

Pour chaque n , la famille

$$(f_n|_D)_{D \in \mathcal{F}}$$

définit un élément du produit

$$\prod_{D \in \mathcal{F}} L_D .$$

Ce produit dénombrable d'espaces compacts est métrisable compact. On peut donc trouver une application strictement croissante $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que l'image de la suite $(f_{\phi(p)})$ dans le produit y converge. En particulier la suite des projections $(f_{\phi(p)}|_D)$ convergera dans $H^\infty(D)$ pour tout D . Autrement dit que la suite $(f_{\phi(p)})$ convergera uniformément sur tout disque D de \mathcal{F} . En particulier elle convergera simplement vers une fonction f .

d) Soit maintenant K une partie compacte de U . On peut extraire de la famille \mathcal{F} un recouvrement fini de K constitué de D_1, \dots, D_k . Il est facile de voir que la suite extraite, qu'on va encore noter (f_n) pour simplifier, converge uniformément sur K .

En effet, si $\epsilon > 0$ est donné, on peut trouver pour chaque i entre 1 et k un nombre entier N_i tel que $n \geq N_i$ implique $|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$ pour z dans D_i . Si l'on prend pour N le plus grand des N_i , alors $n \geq N$ implique $|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$ pour z dans K .

Enfin f est holomorphe. En effet f est dans $H^\infty(D)$ pour tout disque D de la famille \mathcal{F} .

Remarque. Nous avons utilisé la complétion de $H^\infty(D)$ dans le a). A défaut il aurait fallu prendre l'application de restriction de $H^\infty(D_+)$ dans l'espace $\mathcal{C}_b(D)$ des fonctions continues bornées sur D dont on aurait montré qu'il est complet. On terminerait alors avec le théorème de Weierstrass.

Exercice sur l'espace $W^{1,p}$

Avec une rédaction un peu plus détaillée cet exercice et celui qui suit pourraient faire l'objet d'un problème de concours. Il fait parcourir une grande partie de l'analyse : espaces L^p , inégalités de convexité, complétion, théorème d'Ascoli, compacité, approximation de la valeur absolue, dérivée faible, unités approchées etc.

On considère un exposant p tel que $1 < p < +\infty$.

a) Soit f dans l'espace \mathcal{C}_c^1 des fonctions de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans \mathbf{R} . Montrer que

$$|f(x)|^p \leq p \|f\|_p^{p-1} \|f'\|_p$$

et en déduire qu'il existe une constante C_p telle que

$$\|f\|_\infty \leq C_p \|f\|_{1,p}$$

où l'on a posé $\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p$.

b) Montrer que l'application de restriction de \mathcal{C}_c^1 , muni de la norme $\|\cdot\|_{1,p}$, dans l'espace $\mathcal{C}[-A, A]$ des fonctions continues sur le segment $[-A, A]$, est compacte pour tout A .

c) Montrer que toute suite de Cauchy de \mathcal{C}_c^1 pour la norme $\|\cdot\|_{1,p}$ converge dans l'espace \mathcal{C}_b des fonctions continues bornées sur \mathbf{R} , muni de la norme uniforme. Montrer que l'espace $W^{1,p}$ des limites f de telles suites (f_n) peut être muni d'une norme en posant

$$\|f\|_{1,p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{1,p}.$$

On montrera pour cela que la suite (f'_n) converge vers une fonction g qui vérifie

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(t) dt$$

pour tous a, b réels. On admettra qu'avec une telle propriété $f = 0$ implique $g = 0$; pour cela on renvoie à l'exercice sur la dérivée faible qui suit.

d) Montrer que \mathcal{C}_c^1 est dense dans $W^{1,p}$.

e) Montrer que l'application de restriction de $W^{1,p}$ dans $\mathcal{C}[-A, A]$ est compacte.

N.B. En étant plus savant, au lieu d'établir la relation sur g du c), on considérerait une fonction-test ϕ de l'espace \mathcal{D} . Si $f = 0$ et si f'_n converge vers g , comme

$$\int f'_n(x) \phi(x) dx = - \int f_n(x) \phi'(x) dx$$

il vient

$$\int g(x) \phi(x) dx = 0$$

à la limite pour $n \rightarrow \infty$. Le lemme fondamental des distributions assure que $g = 0$ presque partout.

On pourrait aussi régler directement la propriété qui est renvoyée en exercice : ici g est dans L^p où $p > 1$. L'hypothèse est que g est orthogonale aux fonctions indicatrices d'intervalles, donc aux fonctions en escalier. Or les fonctions en escalier sont dans L^q . Il suffit donc de savoir que la dualité entre L^p et L^q est séparée pour conclure, ce qui n'est qu'une étape dans le fait que L^p et L^q sont duaux l'un de l'autre.

Solution.

a) L'idée est d'écrire que $|f|^p$ est l'intégrale de sa dérivée. Cela donnerait

$$|f(x)|^p = \int_{-\infty}^x p|f(t)|^{p-1} \text{sign}(f(t))f'(t)dt$$

sachant que $f(t)$ est nul pour t suffisamment négatif et où la fonction sign vaut -1 en un point $x < 0$ et $+1$ en un point $x > 0$.

De là on tirerait

$$|f(x)|^p = p\| |f|^{p-1} \|_q \|f'\|_p$$

où q est l'exposant conjugué de p , vérifiant $1/p + 1/q = 1$, en appliquant l'inégalité de Hölder.

On obtiendrait ainsi la majoration demandée

$$|f(x)|^p = p\|f\|_p^{p-1} \|f'\|_p$$

sachant que

$$\left(\int (|f|^{p-1})^q\right)^{1/q} = \left(\int |f|^p\right)^{1/q} = \left(\|f\|_p^p\right)^{1/q} = \|f\|_p^{p/q} = \|f\|_p^{p-1} .$$

Malheureusement la formule de dérivation de $|f|^p$ ne vaut qu'en un point où $f(x) \neq 0$. Nous ne disposons pas encore des outils pour dépasser directement cet obstacle.

Nous allons introduire une approximation régulière de la valeur absolue. On vérifie aisément que $0 \leq \sqrt{\epsilon^2 + x^2} \leq \epsilon$. Cet artifice peut servir dans la démonstration du théorème de Weierstraß: voir le livre de Gustave Choquet; on approche une fonction continue par une fonction continue affine par morceaux; on écrit cette dernière comme combinaison linéaire de $|x - a|$; on se ramène à approcher $|x|$ sur $[-M, M]$ par des polynômes, ce qu'on fait par un développement en série convenable de la fonction indiquée.

Dans notre situation on introduit

$$f_\epsilon(x) = \sqrt{\epsilon^2 + f^2(x)}$$

pour $\epsilon > 0$.

On écrit

$$f_\epsilon^p(x) = \epsilon + \int_{-A}^x p f_\epsilon'(t) f_\epsilon^{p-1}(t) dt$$

pour A assez grand. Il en résulte

$$|f(x)|^p \leq \int_{-\infty}^x p |f'(t)| |f(t)|^{p-1} dt$$

en passant à la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$, sachant que $|f'_\epsilon| \leq |f'|$ et que f_ϵ converge uniformément vers $|f|$ sur un segment assez grand pour que f soit nulle en dehors.

Etablissons l'inégalité demandée. On a

$$|f(x)| \leq p^{1/p} \|f\|_p^{1-1/p} \|f'\|_p^{1/p}$$

et il s'agit de majorer le produit des deux derniers facteurs à l'aide de $\|f\|_p + \|f'\|_p$, ce qui peut se faire de bien des manières.

Posant $a = \|f\|_p$, $b = \|f'\|_p$, on peut distinguer le cas $a \geq b$ du cas contraire. Dans le premier cas on majore le produit $a^{1-1/p} b^{1/p}$ par $a^{1-1/p} a^{1/p} = a$ puis par $a + b$. Dans le second c'est pareil.

Sinon on peut majorer ainsi :

$$\frac{a^{1-1/p} b^{1/p}}{a + b} = \left(\frac{a}{a + b} \right)^{1-1/p} \cdot \left(\frac{b}{a + b} \right)^{1/p} \leq 1.$$

On peut encore utiliser la majoration classique

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

pour $a, b \geq 0$, laquelle se montre en utilisant la concavité du logarithme

$$\frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q \leq \log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right).$$

On peut encore se ramener, par homogénéité, à majorer $a^{1/q} b^{1/p}$ pour $a + b = 1$, ce qui revient à majorer $x^{1/q} (1-x)^{1/p}$; on étudie pour cela les variations.

b) C'est une conséquence du théorème d'Ascoli, sachant que l'espace $[-A, A]$ est compact. Soit en effet f une fonction de \mathcal{C}_c^1 vérifiant $\|f\|_{1,p} \leq 1$, i.e. $\|f\|_p + \|f'\|_p \leq 1$.

D'une part

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt$$

donne

$$|f(y) - f(x)| \leq |x - y|^{1/q} \|f\|_p \leq |x - y|^{1/q}$$

par Hölder et l'équicontinuité (uniforme) en découle : si on se donne $\epsilon > 0$, on peut choisir le même $\eta = \epsilon^q$ pour toutes les fonctions f considérées.

D'autre part

$$|f(x)| \leq C_p \|f\|_{1,p} \leq C_p$$

d'où une borne indépendante de f (et de x).

c) La convergence dans \mathcal{C}_b résulte des faits suivants. D'abord, grâce à la majoration du a), une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{1,p}$ est aussi de Cauchy pour la norme uniforme. Ensuite l'espace \mathcal{C}_b est complet.

Maintenant on doit vérifier qu'on définit bien une norme sur $W^{1,p}$ de la manière indiquée. La symétrie et l'inégalité triangulaire s'obtiennent par passage à la limite. Le seul point non évident à prouver est que la limite est indépendante de la suite de Cauchy (f_n) choisie.

Si on se donne deux suites de Cauchy (f_n) et (g_n) qui ont même limite uniforme, il s'agit de montrer que leur différence tend vers 0 en norme dans $W^{1,p}$; la différence des normes tendra alors vers 0 puisque $|\|f_n\| - \|g_n\|| \leq \|f_n - g_n\|$.

Par différence il s'agit de montrer que si une suite (f_n) de Cauchy dans $W^{1,p}$ converge uniformément vers 0, alors la suite des normes tend vers 0.

Comme les suites (f_n) et (f'_n) sont de Cauchy dans L^p et que cet espace est complet, elles convergent respectivement vers des fonctions f et g dans L^p .

N.B. Il serait tentant de remplacer g par f' ; cependant ici g ne sera même pas dérivable en général : ce ne sera vrai qu'au sens des distributions. Il ne faut pas confondre la convergence dans L^p avec la convergence uniforme; avec cette dernière $g = f'$ en effet.

Cependant $f = 0$ (presque partout). En effet d'une suite qui converge dans L^p on peut extraire une suite qui converge simplement presque partout; or $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur \mathbf{R} .

Par suite la norme de (f_n) dans $W^{1,p}$ converge en fait vers $\|g\|_p$. Il s'agit maintenant de voir que $g = 0$ (presque partout) pour terminer.

On a

$$f_n(b) - f_n(a) = \int_a^b f'_n(t) dt$$

d'où

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(t) dt$$

à la limite. La limite de $f_n(b)$ et $f_n(a)$ est sans problème : la convergence est même uniforme. Pour passer à la limite sous l'intégrale, on utilise le fait que

$$\left| \int_a^b f'_n(t) dt - \int_a^b g(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt \right| \leq |b - a|^{1/q} \|f'_n - g\|$$

par Hölder.

N.B. On intègre sur un intervalle borné mais il ne s'agit pas d'un passage à la limite uniforme : la convergence a lieu dans L^p . En fait, c'est un peu comme un produit scalaire avec la fonction indicatrice de $[a, b]$ sauf que L^p et L^q remplacent L^2 .

Par suite

$$\int_a^b g(t) dt = 0$$

pour tous a, b réels, et donc $g = 0$ presque partout.

d) Si la suite (f_n) définit f , alors

$$\|f - f_n\|_{1,p} \rightarrow 0.$$

En effet, pour $\epsilon > 0$ donné, on peut trouver un rang N tel que $n \geq N, m \geq 0$ impliquent

$$\|f_n - f_{n+m}\|_{1,p} \leq \epsilon.$$

Laissant $\epsilon \rightarrow 0$, il vient

$$\|f_n - f\|_{1,p} \leq \epsilon.$$

Ainsi \mathcal{C}_1^c est dense dans $W^{1,p}$.

e) Soit B' la boule unité de $W^{1,p}$. Il s'agit de voir que les restrictions des fonctions de B' forment une partie précompacte de $\mathcal{C}_b[-A, A]$.

On se donne $\epsilon > 0$ et on introduit un $\epsilon' > 0$ qui sera précisé plus loin. Il s'agit de recouvrir la partie considérée par un nombre fini de boules de $\mathcal{C}_b[-A, A]$ de rayon ϵ .

Les restrictions des fonctions de $B' \cap \mathcal{C}_c^1$ forment déjà une partie précompacte de $\mathcal{C}_b[-A, A]$. On peut donc trouver g_1, \dots, g_n dans $B' \cap \mathcal{C}_c^1$ de façon que les boules de $\mathcal{C}_b[-A, A]$ de rayon ϵ' recouvrent cette dernière partie.

Soit maintenant f une fonction de la boule B' . On peut trouver g dans \mathcal{C}_c^1 telle que $\|f - g\|_{1,p} \leq \epsilon'$. On peut même imposer à g d'être dans B' . A défaut on remarque que $\|g\|_{1,p} \leq 1 + \epsilon'$ et alors $h = g/(1 + \epsilon')$ est dans cette boule; de plus $\|g - h\|_{1,p} \leq \epsilon'$.

Il existe alors une fonction g_i telle que $\|g_i|_A - h|_A\|_\infty \leq \epsilon'$. Par suite

$$\|g_i|_A - f|_A\|_\infty \leq \|g_i|_A - h|_A\|_\infty + \|h - g\|_\infty + \|g - f\|_\infty \leq \epsilon' + 2C_p\epsilon'$$

Choisissant $\epsilon' = \epsilon/(1 + 2C_p)$, on obtient la propriété souhaitée.

Exercice sur la dérivée faible.

On considère sur une fonction f localement intégrable sur \mathbf{R} telle que

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

pour tous a, b réels. Il s'agit de montrer que $f = 0$ presque partout.

N.B. Il n'est pas possible de dériver l'intégrale par rapport à sa borne supérieure aussi simplement qu'avec une fonction continue. Il y a bien un théorème de Lebesgue qui le permet presque partout mais nous nous en passerons. Nous utiliserons une variante du produit de convolution avec une unité approchée de L^1 .

Ici la propriété s'interprète comme l'orthogonalité entre f et les fonctions en escalier. Cependant, si la dualité en L^1 et L^∞ est séparante, il manque la densité des fonctions en escalier dans L^∞ pour conclure de cette façon.

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où f est intégrable; c'est l'hypothèse qu'on fait désormais.

b) Soit g une fonction intégrable sur \mathbf{R} . Montrer que

$$\frac{1}{h} \int \left| \int_x^{x+h} g(t)dt \right| dx = \frac{1}{h} \int \left| \int_x^{x+h} (g(t) - f(t))dt \right| dx \leq \|g - f\|_1$$

pour tout $h > 0$.

c) Etant donné $\epsilon > 0$, on prend pour g une fonction continue à support dans un segment $[-A, A]$ telle que $\|g - f\|_1 \leq \epsilon$. Montrer que

$$\frac{1}{h} \int \left| \int_x^{x+h} g(t)dt \right| dx \rightarrow \int |g(x)|dx$$

quand $h \rightarrow 0$; on pourra se limiter au cas où $h = 1/n$. Conclure.

Solution.

a) Il suffit de montrer que la fonction $1_{[-N, N]}f$ est presque partout nulle pour tout N entier. Or cette fonction est intégrable et vérifie l'hypothèse faite sur f .

b) La contribution de f à l'intégrale en t est nulle, ce qui montre la première inégalité. Ensuite on applique le théorème de Fubini à l'intégrale

$$\frac{1}{h} \int \left(\int_x^{x+h} |g(t) - f(t)|dt \right) dx$$

qui majore celle considérée.

N.B. D'abord, pour une fonction positive, il n'y a aucune précaution à prendre. Il faut cependant se débarrasser des bornes variables. On fait intervenir la fonction $1_{[x, x+h]}(t) = 1_{[t-h, t]}(x)$, laquelle vaut 1 si $x \leq t \leq x+h$, et donc aussi si $t-h \leq x \leq t$.

On a

$$\frac{1}{h} \int \left(\int 1_{[x, x+h]}(t) |g(t) - f(t)| dt \right) dx = \frac{1}{h} \int |g(t) - f(t)| \left(\int 1_{[t-h, t]}(x) dx \right) dt$$

et l'intégrale de droite vaut $\|g - f\|_1$.

c) On peut imposer $0 < h \leq 1$. L'intégrale

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt$$

est nulle pour x en dehors de $[-A-1, A]$. Si M majore $|g|$, elle est donc dominée par la fonction indicatrice de $[-A-1, A]$ multipliée par $(2A+1)M$. Par ailleurs cette intégrale tend vers $g(x)$ quand $h \rightarrow 0$, par la continuité de g en x . On a donc le résultat cherché par convergence dominée.

N.B. Si l'on veut appliquer le théorème à une suite, on se contentera de $h = 1/n$. Par ailleurs on noterait que la convergence est en fait uniforme sur $[-A-1, A]$: c'est une conséquence de la continuité uniforme de f ; la convergence dominée n'est pas nécessaire.

On a finalement $\|g\|_1 \leq \epsilon$, d'où $\|f\|_1 \leq 2\epsilon$; comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, il vient $\|f\|_1 = 0$, soit $f = 0$ presque partout.

Quelques exercices sur la complétion

Exercice sur la complétion de $l^2(\mathbf{Z})$

On rappelle que $l^2(\mathbf{Z})$ est l'espace des séries $u = (u_k)$, qu'on prendra ici réelles, vérifiant

$$\|u\| = \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |u_k|^2 \right)^{1/2} < +\infty$$

muni de la norme ci-dessus qui dérive du produit scalaire qui aux séries $u = (u_k)$ et $v = (v_k)$ associe

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}} u_k v_k .$$

Il s'agit de montrer que cet espace est complet.

a) On se donne une suite de Cauchy de terme général ${}_n v = ({}_n v_k)$ dans $l^2(\mathbf{Z})$, où l'on plac e l'indice de suite à gauche pour ne pas le confondre avec l'indice de série. Etant donn e $\epsilon > 0$ on peut donc trouver N tel que $n, l \geq N$ impliquent $\|{}_n v - {}_l v\| \leq \epsilon$.

Montrer que pour chaque k fix e dans \mathbf{Z} , la suite $({}_n v_k)$ converge vers une valeur v_k ; on désigne par v la série ainsi définie.

b) Si $\epsilon > 0$ est donn e, si N est choisi comme dans a) et si K est un nombre entier positif, montrer que

$$\left(\sum_{|k| \leq K} |{}_n v_k - v_k|^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon$$

pour $n \geq N$.

En déduire que $\|{}_n v - v\| \leq \epsilon$ pour $n \geq N$ et conclure.

Solution.

a) Si $\epsilon > 0$ est donn e et si N est choisi comme indiqu e, alors

$$|{}_n v_k - {}_l v_k| \leq \left(\sum_m |{}_n v_m - {}_l v_m|^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon$$

pour $n, l \geq N$.

Cela montre que $({}_n v_k)$ est une suite de Cauchy dans \mathbf{R} , qui est complet; cette suite admet donc une limite v_k .

b) Pour $n, l \geq N$, on a

$$\left(\sum_{|k| \leq K} |{}_n v_k - {}_l v_k|^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon .$$

Dans cette somme finie passons à la limite pour $l \rightarrow \infty$. Il vient

$$\left(\sum_{|k| \leq K} |{}_n v_k - v_k|^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon .$$

il n'y a plus qu'à prendre la limite croissante, ou la borne supérieure, sur K , pour obtenir $\|{}_n v - v\| \leq \epsilon$.

En particulier, pour $\epsilon = 1$ par exemple et n assez grand, on en tire

$$\|v\| \leq \|v - {}_n v\| + \|{}_n v\| \leq 1 + \|{}_n v\|$$

ce qui montre que v est dans $l^2(\mathbf{Z})$.

Exercice sur le théorème de Banach (stabilité des épimorphismes stricts)

Soient E, F des espaces de Banach et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire continue. On suppose qu'il existe des constantes positives $k < 1$ et $K \geq 0$ telles que tout point y vérifiant $\|y\| \leq 1$ dans F puisse s'écrire

$$y = z + u(x)$$

où z vérifie $\|z\| \leq k$ dans F et x vérifie $\|x\| \leq K$ dans E . Alors u est ouverte et en particulier surjective.

Indication. Partir d'un point y de F et construire x par approximations successives.

Solution.

Partons de y dans F et essayons de l'écrire sous la forme $u(x)$. Le cas où $y = 0$ est trivial et nous l'excluons.

N.B. L'hypothèse porte sur les y tels que $\|y\| \leq 1$; il faut s'habituer à raisonner par homogénéité positive dans un espace normé, c'est-à-dire à opérer des homothéties.

Posons $y_0 = y$. En appliquant l'hypothèse à $Y_0 = y_0/\|y_0\|$, qu'on décompose en $Y_1 + u(X_1)$, il vient

$$y_0 = y_1 + u(x_1)$$

où $\|y_1\| \leq k\|y_0\|$ et $\|x_1\| \leq K\|y_0\|$.

Par récurrence, on construit y_n dans F et x_n dans E vérifiant

$$y_{n-1} = y_n + u(x_n)$$

où $\|y_n\| \leq k^n\|y_0\|$ et $\|x_n\| \leq Kk^{n-1}\|y_0\|$.

Si les suites sont construites jusqu'à l'ordre $n \geq 1$, en appliquant l'hypothèse à $Y_n = y_n/\|y_n\|$ qu'on décompose en $Y_{n+1} + u(X_{n+1})$, il vient en effet

$$y_n = y_{n+1} + u(x_{n+1})$$

où $\|y_{n+1}\| \leq k\|y_n\| \leq k^{n+1}\|y_0\|$ et $\|x_{n+1}\| \leq K\|y_n\| \leq Kk^n\|y_0\|$. La récurrence se poursuit.

Maintenant on ajoute les relations obtenues, ce qui donne

$$y = y_n + u(x_1 + \cdots + x_n)$$

pour $n \geq 1$. La série (x_n) converge absolument, dans l'espace E qui est complet, comme une série géométrique. Soit x sa somme. Elle vérifie

$$\|x\| \leq \sum_{n \geq 1} Kk^{n-1}\|y_0\| = \frac{K}{1-k}\|y_0\|$$

évidemment. Si y vérifie

$$\|y\| \leq \frac{1-k}{K} = r$$

on a en particulier $\|x\| \leq 1$.

Sachant que u est continue et que la suite (y_n) tend vers 0, il vient

$$y = u(x)$$

à la limite.

Ainsi u est surjective. De plus l'image de la boule unité fermée de E contient la boule fermée de centre 0 et de rayon r de F .

Exercice sur la complétude et les séries

Soit E un espace normé. Montrer que les propriétés qui suivent sont équivalentes:

- (i) E est complet.
- (ii) Toute série *absolument* convergente de E est convergente.

Rappel. La série (u_n) est dite absolument convergente, si la série des normes $(\|u_n\|)$ est convergente. Pour une série de fonctions cela n'a rien à voir avec la convergence simple absolue. Lorsque la norme est la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, on parle encore de convergence *normale*.

Solution.

D'abord (i) implique (ii).

Sachant que E est complet, il s'agit de montrer que toute série absolument convergente est convergente. On se donne donc une série (u_n) telle que la série $(\|u_n\|)$ convergente. Il s'agit de montrer que la série des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

est convergente. Dans un espace complet on dispose pour cela du critère de Cauchy.

On a

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\|.$$

N.B. On peut conclure en disant que, la suite des sommes partielles de $(\|u_n\|)$ étant de Cauchy, il en est de même de celle de (u_n) . Cependant mieux vaut expliciter la propriété.

Donnons-nous $\epsilon > 0$. On peut trouver un N tel que $\sum_{k>n} \|u_k\| < \epsilon$. Alors

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \epsilon$$

pour $n \geq N$ et $p \geq 0$. QED.

N.B. Dans une rédaction aboutie on peut ne placer la majoration qu'à la fin, sous la forme

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\| \leq \epsilon$$

ce qui est plus économique encore.

Ensuite (ii) implique (i).

On sait maintenant que toute série (u_n) telle que $(\|u_n\|)$ est convergente est elle-même convergente. On se donne une suite de Cauchy (x_n) .

Ecrivons la propriété : étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver N tel que

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \epsilon$$

pour $n \geq N$ et $p \geq 0$.

N.B. Il ne faut surtout pas introduire une série absolument convergente (u_n) de façon arbitraire. Une telle série doit sortir naturellement de l'avancement de la démonstration. On peut chercher à prendre dans l'autre sens ce qu'on a fait précédemment. La suite (x_n) est constituée des sommes partielles de la série de terme général $u_n = x_n - x_{n-1}$, en convenant $x_{-1} = 0$. Cependant la propriété de Cauchy donne seulement

$$\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$$

ce qui ne suffit pas pour une convergence de série. Il faut que cette différence tende vers 0 suffisamment vite .

On va chercher à montrer qu'une suite extraite $(x_{\phi(q)})$ de la suite donnée est convergente, de limite x . Sachant que cette dernière est de Cauchy cela montrera qu'elle converge aussi vers x .

Soit donc $\epsilon > 0$. La propriété de Cauchy nous fournit un N tel que

$$\|x_{\phi(q)} - x_n\| \leq \epsilon$$

pour $n \geq N$ et $q \geq n$, puisque $\phi(q) \geq q$. Laisant n fixe et prenant la limite pour $q \rightarrow \infty$, il vient

$$\|x - x_n\| \leq \epsilon$$

pour $n \geq N$. QED

N.B. On peut aussi, moins élégamment, écrire

$$\|x - x_n\| \leq \|x - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)} - x_n\| .$$

Chaque terme de droite peut être rendu inférieur à $\epsilon/2$, le premier pour $n \geq N_1$ par convergence de la suite extraite, le second pour $n \geq N_2$ par la propriété de Cauchy. Il reste à choisir $N = \max(N_1, N_2)$.

Maintenant nous allons construire une suite extraite de (x_n) de façon à réaliser

$$\|x_{\phi(q+1)} - x_{\phi(q)}\| \leq 2^{-q}$$

pour $q \geq 0$.

Comment choisir $\phi(0)$ de façon à pouvoir choisir ensuite $\phi(1) > \phi(0)$?

N.B. La difficulté ici est de choisir un indice, non pas pour vérifier directement une propriété à ce stade, mais pour l'avoir lors du choix suivant.

En faisant $\epsilon = 1$ dans la propriété de Cauchy, on en tire N tel que

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq 1$$

pour $n \geq N$, $p \geq 0$. Si on choisit $\phi(0) = N$, on aura en particulier

$$\|x_m - x_{\phi(0)}\| \leq 1$$

pour $m > \phi(0)$.

Supposons que l'on ait choisi ... $\phi(q-1)$ de façon que

$$\|x_m - x_{\phi(q-1)}\| \leq 2^{-q+1}$$

pour $m > \phi(n-1)$. Alors on prend $\epsilon = 2^{-n}$ dans la propriété de Cauchy et on en tire N tel que

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq 2^{-q}$$

pour $n \geq N$, $p \geq 0$. On prendra $\phi(q)$ à la fois plus grand que N et que $\phi(q-1) + 1$, pour avoir une application ϕ strictement croissante. Alors

$$\|x_m - x_{\phi(q)}\| \leq 2^{-q}$$

pour $m > \phi(q)$ et la récurrence se poursuit.

La propriété cherchée en découle pour la suite extraite. La série de terme général $u_q = x_{\phi(q)} - x_{\phi(q-1)}$ associée est absolument convergente, et sa somme x est la limite de $(x_{\phi(q)})$, donc aussi de (x_n) .

Exercice sur le complété d'un espace normé

Dans cet exercice les flèches désignent des applications linéaires de norme ≤ 1 .

Soit E un espace normé. On veut construire un espace normé complet \hat{E} et une flèche $i : E \rightarrow \hat{E}$ résolvant le problème suivant : pour tout espace normé complet F et toute flèche $f : E \rightarrow F$, il existe une flèche $\hat{f} : \hat{E} \rightarrow F$ unique vérifiant $f = \hat{f} \circ i$, i.e. rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ & \searrow & \nearrow \\ & \hat{E} & \end{array}$$

ce qui donnera notamment l'unicité de cette solution.

a) On considère l'espace l_E^1 des séries $\underline{x} = (x_n)_{n \geq 0}$ de E telles que $\sum \|x_n\| < +\infty$, muni de la norme $\|\underline{x}\| = \sum \|x_n\|$ et la flèche naturelle $E \rightarrow l_E^1$ qui à x associe la série $x, 0, 0, \dots$. On considère le sous-espace vectoriel fermé Z_E de l_E^1 engendré par les séries $0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0, -x, 0, \dots$, adhérence du sous-espace des séries à support fini de somme nulle, et l'espace normé quotient $\hat{E} = l_E^1/Z_E$. Construire i ; vérifier $\hat{x} = \sum i(x_n)$ et $\|i(x)\| = \|x\|$; en déduire que i est isométrique et d'image dense.

b) Caractériser $\hat{f}(\hat{x})$ par $\sum f(x_n)$. Construire \hat{f} en passant au quotient dans

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \downarrow & & \uparrow \\ l_E^1 & \rightarrow & l_F^1 \end{array}$$

où la flèche $l_F^1 \rightarrow F$ associe à \underline{x} sa somme.

c) Montrer que si la flèche $E_1 \rightarrow E_2$ est isométrique et d'image dense, alors la flèche naturelle $\hat{E}_1 \rightarrow \hat{E}_2$ est un isomorphisme.

d) Montrer que E est complet si et seulement si i est un isomorphisme. En déduire que \hat{E} est complet.

e) Soient E_1 un sous-espace dense de l'espace normé E_2 et f une application linéaire continue de E_1 dans un espace normé complet F . Montrer que f se prolonge de façon unique en une application linéaire continue sur E_2 , sans augmentation de sa norme. On considèrera le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \rightarrow & F \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ E_2 & & \hat{E}_1 \\ & \searrow & \uparrow \\ & & E_2 \end{array}$$

où $\hat{E}_2 \rightarrow \hat{E}_1$ inverse un isomorphisme.

Remarque. On pourrait supposer E ordonné et/ou muni d'une structure d'algèbre normée. La méthode s'adapte aussi pour donner une construction de \mathbf{R} à partir de \mathbf{Q} .

Solution.

a) On construit i en composant la flèche naturelle $E \rightarrow l_E^1$ avec l'application de l_E^1 sur son quotient.

La classe

$$\underline{\dot{x}} - \sum_{p=0}^n i(x_p)$$

dans \hat{E} est celle de la série $0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$, dont la norme est majorée par $\sum_{p>n} \|x_p\|$, qui tend vers 0 comme le reste d'une série convergente.

Ainsi a-t-on $\underline{\dot{x}} = \lim i(\sum_{p=0}^n x_p)$ et i est d'image dense.

De plus si $\underline{x} = x, 0, 0, \dots$ et si \underline{y} est à support fini de somme nulle, on vérifie que $\|\underline{x} + \underline{y}\| \geq \|x\|$; il en résulte $\|i(x)\| \geq \|x\|$ puis $\|i(x)\| = \|x\|$; ainsi i est isométrique.

b) La continuité de \hat{f} impose $\hat{f}(\underline{\dot{x}}) = \sum f(x_p)$. Le reste est clair.

c) D'abord \hat{f} est isométrique par densité de E_1 dans \hat{E}_1 et par passage à la limite.

Ensuite \hat{f} est surjective. Etant donnée une série $\underline{x} = (x_n)$ de $l_{E_2}^1$, on peut trouver une série $\underline{y} = (y_n)$ d'éléments de E_1 vérifiant $\|\sum_{p=0}^n (x_p - y_p)\| \leq 2^{-n}$. Elle sera dans $l_{E_1}^1$ car $\|x_n - y_n\| \leq 2^{n+2}$ pour $n \geq 1$. Il est facile de voir que ces deux séries définissent la même classe dans \hat{E}_2 .

d) Dans un sens c'est clair. Dans l'autre, si la flèche $E \rightarrow \hat{E}$ est un isomorphisme, étant donnée une série de $\underline{x} = (x_n)$ de l_E^1 , sa classe dans \hat{E} est l'image par i d'un élément x de E qui est alors sa limite.

Comme la flèche

$$E \rightarrow \hat{E}$$

est d'image dense, la flèche

$$\hat{E} \rightarrow \hat{\hat{E}}$$

qui s'en déduit est un isomorphisme; alors \hat{E} est complet.

e) Le diagramme fournit tout.

Remarque. Pour compléter \mathbf{Q} , on ne peut pas donner de sens à la somme $\sum r_n$ d'une série de nombres rationnels positifs ou nuls. En revanche on peut en donner un à la relation $\sum r_n \leq s$ où s est rationnel. Elle signifie que les sommes partielles sont majorées par s .

Exercice sur le théorème de Baire

Montrer qu'un espace topologique α -favorable dans le jeu de Chaquet est un espace de Baire.

Indication. On partira d'une suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de parties ouvertes denses de X et d'une partie ouverte non vide U de cet espace.

Solution.

Donnons-nous comme indiqué une suite $(V_n)_{n \geq 1}$ de parties ouvertes denses et une partie ouverte U non vide de X .

Le joueur β commence par choisir $V_0 = U$, qui est non vide par hypothèse. A la n -ème étape, si le joueur α a choisi U_n , il choisit $V_n \cap U_n$.

Grâce à la stratégie de α , on est assuré que les V_n auront un point commun, qui est aussi dans $V_0 = U$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice sur les points de continuité d'une limite simple

Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}[a, b]$ qui converge **simplemment** vers une fonction f .

a) Pour $\epsilon > 0$ et N entier donnés, on note $F_{\epsilon, N}$ l'ensemble des points x de $[a, b]$ tel que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

pour tous $n, m \geq N$. Montrer que $F_{\epsilon, N}$ est fermé. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et tout intervalle ouvert I non vide, l'un des $F_{N, \epsilon}$ possède un point intérieur dans I .

b) Montrer que la réunion des intérieurs

$$U_\epsilon = \bigcup_N (F_{\epsilon, N})^\circ$$

est une partie ouverte dense.

c) En déduire que f possède un ensemble dense de points de continuité.

Solution.

a) Pour voir que la partie $F_{\epsilon, N}$ est fermée, on peut d'abord considérer une suite (x_k) de cette partie qui converge vers un point x de $[a, b]$; il s'agit de voir que x est dans $F_{\epsilon, N}$.

N.B. Pour éviter toute confusion dans le raisonnement, il est bon de mettre les points sur les 'i', et de préciser que la limite est a priori dans $[a, b]$. Parler de suite convergente d'une partie est toujours ambigu.

Par hypothèse

$$|f_n(x_k) - f_m(x_k)| \leq \epsilon$$

pour $n, m \geq N$ et k quelconque. En prenant la limite dans cette inégalité large on obtient

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

pour $n, m \geq N$, par la continuité de f_n et f_m . Cela montre que x est dans $F_{\epsilon, N}$.

Plus simplement on peut remarquer que la partie définie par

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

est fermée par continuité de f_n, f_m ; c'est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[-\epsilon, \epsilon]$ par $f_n - f_m$. Alors la partie $F_{\epsilon, N}$, qui en est l'intersection pour $n, m \geq N$, est aussi fermée.

Pour voir que l'un des $F_{\epsilon, N}$ possède un point intérieur dans I , raisonnons par l'absurde. Si aucune des parties $F_{\epsilon, N} \cap I$, qui sont fermées dans I , ne possède de point intérieur, alors leur réunion est maigre dans I , donc aussi maigre dans $[a, b]$.

Or l'espace métrique $[a, b]$ est complet; c'est donc un espace de Baire. L'intervalle I ne peut être maigre. Par conséquent il ne peut être la réunion des $F_{\epsilon, N} \cap I$, autrement il ne peut être inclus dans la réunion des $F_{\epsilon, N}$.

N.B. Jusqu'ici nous n'avons fait que dérouler un raisonnement de façon automatique; maintenant il nous faut revenir à l'hypothèse sur la suite (f_n) pour tenter d'apporter une contradiction.

Or si x est dans I , par convergence de la suite $(f_n(x))$, on peut trouver N tel que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

pour $n, m \geq N$. C'est absurde.

N.B. On peut rédiger la solution autrement. En résumé : d'abord on montre que I est inclus dans la réunion des $F_{\epsilon, N}$, autrement dit que I est la réunion des $F_{\epsilon, N} \cap I$, qui sont des parties fermées de I ; puisque $[a, b]$ est un espace de Baire, l'une de ses parties est non vide.

b) D'abord U_ϵ est évidemment une partie ouverte.

N.B. Pour voir qu'une partie est dense, on montre que son adhérence est l'espace complet, autrement dit que tout point x appartient à l'adhérence; cela signifie encore que toute boule ouverte de centre x et de rayon non nul rencontre la partie considérée. Finalement cela revient à montrer que toute boule ouverte non vide ou toute partie ouverte non vide la rencontre.

La partie U_ϵ est dense car elle rencontre tout intervalle ouvert non vide I d'après la question précédente.

c)

N.B. Il va falloir fabriquer un ensemble G de points de continuité. Si nous laissons ϵ fixé, il ne sera pas possible d'atteindre la propriété de continuité cherchée. Il faut faire varier $\epsilon > 0$ de façon qu'il prenne des valeurs arbitrairement petites. On prendra par exemple $\epsilon = 1/p$.

Posons

$$G = \bigcap_{p \geq 1} U_{1/p} .$$

Comme $[a, b]$ est un espace de Baire aussi, la partie G est dense; c'est même un G_δ dense.

Nous aurons achevé la démonstration si nous montrons que tout point x de G est un point de continuité de f .

Donnons-nous donc $\epsilon > 0$.

N.B. Si l'on cherche à partir de

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

on n'arrivera à rien. En effet, ou bien l'on essaie de majorer à droite d'abord le second terme en choisissant un α qui dépend de n , pour majorer ensuite le troisième en choisissant n ; ou bien l'on majore d'abord le troisième en choisissant un N qui dépend de y , pour majorer ensuite le second en imposant des conditions à y . On tourne en rond. En plus la démonstration, si elle était juste, donnerait la continuité de la limite en tout point, ce qui est faux.

Choisissons p tel que $1/p \leq \epsilon/3$, puis N tel que x soit dans l'intérieur de $F_{1/p, N}$. Il existera $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $]x - \alpha, x + \alpha[\cap [a, b]$ soit dans $F_{1/p, N}$. Ecrivons

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)|$$

pour y dans $]x - \alpha, x + \alpha[\cap [a, b]$ et pour $n \geq N$.

A droite, les premier et dernier termes sont majorés par $\epsilon/3$. On peut rendre le second inférieur à $\epsilon/3$ en utilisant la continuité de f_N et imposant à y d'être dans $]x - \beta, x + \beta[\cap [a, b]$ pour un β tel que $0 < \beta \leq \alpha$ convenable. QED.

Remarque. On montrerait que l'ensemble C des points de continuité de f est un G_δ , donc un G_δ dense.

La fonction f est continue au point x si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un voisinage (ouvert) V de x sur lequel l'oscillation vérifie

$$\sup_{y, z \in V} |f(y) - f(z)| \leq \epsilon .$$

Pour ϵ fixé, cela définit une partie ouverte U_ϵ et l'ensemble des points de continuité de f est l'intersection des $U_{1/n}$.

Exercice sur le théorème de Banach-Steinhaus

Soit E un espace vectoriel réel dont la topologie est définie par une suite croissante p_n de semi-normes. On le suppose complet — ce sera ce qu'on appelle un espace de Fréchet — pour la distance

$$d(x, y) = \sup_n \min(2^{-n}, p_n(x - y))$$

associée. On se donne une suite (f_k) de formes linéaires continues sur E qui converge simplement vers f (qui est une forme linéaire).

a) Si N est un nombre entier naturel, on note F_N l'ensemble des x tels que $|f_k(x)| \leq N$ pour tout k . Montrer que F_N est fermé. Montrer que E est la réunion des F_N . En déduire que l'on peut trouver un N tel que F_N possède un point intérieur. On conserve un tel indice N désormais.

b) Montrer que 0 est intérieur à F_N . En déduire qu'il existe n entier et $\epsilon > 0$ tels que $p_n(x) \leq \epsilon$ implique $|f_k(x)| \leq N$ pour tout k .

c) Montrer une propriété semblable pour f . En déduire que f est continue.

Remarques. La distance mentionnée définit la topologie de E ; la vérification est semblable à celle faite en plusieurs occasions. On l'a introduite pour parler de complétion et indiquer qu'on a un espace de Fréchet. Cependant elle n'a pas beaucoup d'importance. La complétion n'intervient qu'à travers la propriété de Baire, laquelle est une propriété topologique.

Par ailleurs on pourrait prendre des applications linéaires continues à valeurs vectorielles, dans un espace de Banach ou encore de Fréchet. Nous avons choisi des formes linéaires pour simplifier. L'exemple classique d'application est celui des distributions. Une distribution générale induit une forme linéaire continue sur chaque \mathcal{C}_K^∞ , lequel est un espace de Fréchet pour les semi-normes

$$p_n(f) = \|f\|_K + \dots + \|f^{(n)}\|_K$$

où $\|\cdot\|_K$ est la norme uniforme sur la partie compacte K . Si des distributions T_n convergent simplement vers T , alors T est une distribution : la continuité sur chaque \mathcal{C}_K^∞ résulte de Banach-Steinhaus.

En fait l'utilisation du théorème est simplement imposée par un choix maladroit dans la définition de la convergence dans \mathcal{D}' . Avec un choix convenable, la continuité de la limite était acquise.

Solution.

a) D'abord la partie F_N est fermée. Ou bien l'on prend une suite (x_n) de F_N qui converge vers x dans E et on montre que x est dans F_N en passant à la limite dans

$$|f_k(x_n)| \leq N$$

quand $n \rightarrow \infty$, pour obtenir

$$|f_k(x)| \leq N$$

pour tout k , par *continuité* des f_k .

Ou bien on remarque que F_N est l'intersection des images réciproques par les fonctions continues f_k des intervalles fermés $[-N, N]$.

Ensuite on montre que E est la réunion des F_N . Autrement tout point x de E est dans l'un des F_N . Fixons x dans E . Il s'agit de voir qu'il existe N tel que $|f_k(x)| \leq N$ pour tout k . Cela signifie que la suite $(f_k(x))_k$ est bornée. Or cette suite est convergente. QED.

N.B. Il faut absolument fixer x . En effet l'hypothèse est celle de la convergence simple de la suite (f_k) , i.e. de la suite $(f_k(x))$ de nombres réels pour tout x . Soigner la rédaction à cet égard.

L'existence d'un F_N qui possède un point intérieur résulte du théorème de Baire.

b) On exprime le fait que le point a est intérieur à F_N . Cela signifie que F_N contient une pseudo-boule de centre a et de rayon non nul. On peut donc trouver un n et un $r > 0$ tels que F_N contienne la pseudo-boule constituée des x vérifiant

$$p_n(x - a) \leq r .$$

Autrement dit $p_n(x - a) \leq r$ implique que x est dans F_N .

On va se ramener à $a = 0$. Pour cela on remarque que F_N est convexe. Si x, y sont des points de F_N et si t est dans $[0, 1]$, le point

$$(1 - t)x + ty$$

du segment qui les joint est en effet dans F_N puisque

$$|f_k((1 - t)x + ty)| = |(1 - t)f_k(x) + tf_k(y)| \leq (1 - t)N + tN = N .$$

Par ailleurs F_N est symétrique : si x est dans F_N alors $-x$ aussi.

Nous avons vu que F_N contenait la pseudo-boule $p_n(x - a) \leq r$ de centre a . Par symétrie F_N contient aussi la pseudo-boule $p_n(x + a) \leq r$ de centre $-a$. Par convexité F_N contient encore la pseudo-boule $p_n(x) \leq r$ centrée en 0. En effet si x est dans cette dernière

$$x = \frac{1}{2}(x + a) + \frac{1}{2}(x - a)$$

est le milieu d'un segment joignant un point de la pseudo-boule $p_n(x - a) \leq r$ à un de la pseudo-boule $p_n(x + a) \leq r$.

Ainsi $p_n(x) \leq r$ implique $|f_k(x)| \leq N$ pour tout k .

c) Soit x tel que $p_n(x) \leq r$. Il vient

$$|f(x)| \leq N$$

à la limite quand $n \rightarrow \infty$, par la convergence de $f_k(x)$ vers $f(x)$.

Pour voir la continuité de f , qui est linéaire, il suffit de la montrer en 0. Soit $\epsilon > 0$. Il faut trouver une pseudo-boule de centre 0 et de rayon non nul envoyée par f dans $[-\epsilon, \epsilon]$.

N.B. Avec la pseudo-boule $p_n(x) \leq r$, nous avons $|f(x)| \leq N$. Pour passer de N à ϵ , il faut multiplier par ϵ/N .

Choisissons $\alpha = \epsilon r/N$; la pseudo-boule $p_n(x) \leq \alpha$ convient.

Quelques exercices sur la dualité

Exercice sur le théorème de Hahn-Banach

On considère un espace vectoriel normé réel E , un sous-espace vectoriel F de E et une forme linéaire u sur F de norme ≤ 1 . On cherche à prolonger u en une forme linéaire \tilde{u} sur E de norme ≤ 1 également.

a) On suppose d'abord que F est de codimension 1, autrement dit que $E = F + \mathbf{R}a$ où a n'est pas dans F . On propose pour un prolongement le choix de $\alpha = \tilde{u}(a)$. Donner l'expression de $\tilde{u}(x)$ en fonction de u et de α . Exprimer les conditions à vérifier pour que la forme linéaire \tilde{u} ainsi définie satisfasse $|\tilde{u}(x)| \leq \|x\|$ sur E , sous la forme d'inégalités portant sur α .

b) Montrer qu'il existe au moins un choix de α permettant de satisfaire toutes les conditions.

c) On suppose maintenant que E est engendré par F et une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de vecteurs de E . Montrer l'existence d'un prolongement.

d) Montrer l'existence d'un prolongement dans le cas où E est séparable.

Indication. Pour montrer le b) on établira au préalable le

Lemme. Soient $(a_i), (b_i)$ deux familles de nombres réels. Pour qu'il existe un point x tel que $a_i \leq x \leq b_i$ pour tout i , il faut et il suffit que $a_i \leq b_j$ pour tous i, j .

Solution.

Commençons par établir le lemme.

D'abord la condition est nécessaire : on suppose $a_i \leq x \leq b_i$ pour tout i . Etant donnés deux indices i, j , on a $a_i \leq x$ et $x \leq b_j$, donc $a_i \leq b_j$.

Elle est suffisante : on suppose $a_i \leq b_j$ pour tous i, j . Alors

$$\sup a_i \leq \inf b_j$$

en prenant la borne supérieure sur i , pour j fixé, puis la borne inférieure sur j dans le résultat. Si l'on prend x entre ces deux bornes, au sens large, on a $a_i \leq x \leq b_j$ pour tous i, j .

N.B. La condition $a_i \leq b_i$ pour tout i ne suffit pas; elle signifie simplement que les intervalles $[a_i, b_i]$ sont non vides. Prenons le cas de deux intervalles $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ non vides. Pour qu'ils aient un point commun il faut encore que $a_1 \leq b_2$ et $a_2 \leq b_1$.

Le lemme établit le résultat suivant : une famille de segments de \mathbf{R} admet un point commun dès que deux quelconques se rencontrent. C'est faux en dimension 2 avec des disques : il faudrait des intersections 3 à 3.

a) Si $x = y + \lambda a$, où y est dans F et λ réel, le prolongement linéaire \tilde{u} de u valant α en a est donné par

$$\tilde{u}(y + \lambda a) = \tilde{u}(y) + \lambda \tilde{u}(a) = u(y) + \lambda \alpha .$$

Les conditions demandées sont

$$|u(y) + \lambda \alpha| \leq \|y + \lambda a\|$$

pour tous y dans F et λ réel.

Cependant on peut se limiter à $\lambda \neq 0$ puisque l'hypothèse les donne pour $\lambda = 0$. Cela permet de les écrire

$$\left| u\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \alpha \right| \leq \left\| \frac{y}{\lambda} + a \right\|.$$

On peut les simplifier en

$$|u(z) + \alpha| \leq \|z + a\|$$

pour tout z dans F , puisque y/λ parcourt F .

Autrement dit il faut vérifier

$$-\|z + a\| \leq u(z) + \alpha \leq \|z + a\|$$

ou encore

$$-u(z) - \|z + a\| \leq \alpha \leq -u(z) + \|z + a\|$$

pour tout z dans F .

b) Appliquons le lemme. Il suffit de montrer que

$$-u(z) - \|z + a\| \leq -u(z') + \|z' + a\|$$

pour tous z, z' dans F . Cela signifie que

$$u(z' - z) \leq \|z + a\| + \|z' + a\|.$$

On applique l'inégalité triangulaire à

$$u(z' - z) \leq \|z - z'\| \leq \|(z + a) - (z' + a)\|.$$

c) On construit par récurrence une forme \tilde{u}_n sur le sous-espace F_n engendré par F et a_1, \dots, a_n à partir de $\tilde{u}_0 = u$ de façon que chaque forme prolonge la précédente.

Supposons les prolongements construits jusqu'à l'ordre n . Si a_{n+1} est dans F_n , alors $F_{n+1} = F_n$ et $\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n$; sinon $F_{n+1} = F_n + \mathbf{R}a_{n+1}$ et \tilde{u}_{n+1} s'obtient à partir de \tilde{u}_n avec les questions a), b).

Maintenant on construit \tilde{u} sur E en posant

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}_n(x)$$

pour un F_n contenant x . La valeur est indépendante du choix de x ; si n est le plus petit entier convenable, on a $\tilde{u}_n(x) = \tilde{u}_{n+1}(x) = \dots = \tilde{u}_{n+p}(x)$ puisque les \tilde{u}_n se prolongent mutuellement.

L'application \tilde{u} a les propriétés cherchées : par exemple on établit la linéarité en considérant x, y et un n assez grand pour que F_n contienne ces deux points.

d) On suppose donc que E admet une suite totale $(a_n)_{n \geq 1}$. La question a) permet d'obtenir un prolongement convenable au sous espace G engendré par F et les a_n , que l'on va encore noter u .

Maintenant $\overline{G} = E$. Pour prolonger u en \tilde{u} à E , on procède par densité en posant

$$\tilde{u}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(y_n)$$

pour une suite $y_n \rightarrow x$ de F . On établit successivement les propriétés qui suivent :

- la suite $u(y_n)$ converge : elle est de Cauchy dans \mathbf{R} qui est complet.
- sa limite ne dépend pas du choix de la suite $y_n \rightarrow x$: avec une autre on a $u(y'_n) - u(y_n) \rightarrow 0$.
- ainsi définie, \tilde{u} prolonge u : si y est dans F , on utilise la suite constante y pour définir $\tilde{u}(y)$.
- la fonction \tilde{u} est linéaire : par les propriétés des limites.
- on a $|\tilde{u}(x)| \leq \|x\|$: par passage à la limite dans une inégalité large.

Remarque. *La démonstration qu'on vient de faire vaut pour des applications à valeurs dans un espace normé complet.*

Proposition. Soient E un espace normé, G un sous-espace vectoriel dense de E et F un espace normé complet. Toute application linéaire continue $u : G \rightarrow F$ se prolonge de façon unique en une application linéaire continue $\tilde{u} : E \rightarrow F$, et sans augmentation de la norme.

Cas général. Le théorème de Hahn-Banach vaut sans hypothèse de séparabilité. Cependant la démonstration utilise alors le lemme de Zorn.

Exercice sur la dualité faible

On considère deux espaces vectoriels réels E, F en dualité.

a) Montrer qu'une forme linéaire u sur E qui est continue pour la topologie faible $\sigma(E, F)$ est représentée par (au moins) un élément de F .

b) En déduire que si la dualité est séparante chaque espace s'identifie au dual faible de l'autre.

c) (**théorème des bipolaires**) Montrer que si M est une partie de E son bipolaire $M^{\circ\circ} = (M^\circ)^\circ$ est l'enveloppe convexe, fermée pour la topologie faible $\sigma(E, F)$, de M et de 0 .

Indications. Pour le a) on établira d'abord par récurrence la propriété suivante.

Lemme. Si, dans le dual (algébrique) d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif K , le noyau de la forme u contient l'intersection des noyaux des formes u_1, \dots, u_n , alors u est une combinaison linéaire de ces formes.

On l'appliquera en explicitant l'hypothèse de continuité faible à l'aide d'un voisinage de 0 .

Pour le c) on pourra considérer une partie M contenant 0 , convexe et faiblement fermée et a non dans M ; on fabriquera une forme linéaire faiblement continue b telle que $b(x) \leq 1$ sur M et $b(a) > 1$ en se ramenant à la dimension finie, puis au cas euclidien, par passage au quotient.

Solution.

Commençons par établir le lemme. Raisonnons pour cela par récurrence sur n . Le puriste pourrait commencer par $n = 0$; dans ce cas l'intersection de la famille vide de noyaux serait E et u serait nulle; or 0 est combinaison linéaire de la famille vide.

Étudions le cas $n = 1$ qui est déjà plus instructif. L'hypothèse est

$$\ker u \supset \ker u_1$$

et elle signifie que $u_1(x) = 0$ implique $u(x) = 0$.

Il est un cas où la démonstration s'achève aussitôt, celui où $u_1 = 0$. Alors $u = 0$ aussi et $0 = 1 \cdot 0$ par exemple.

Supposons donc $u_1 \neq 0$.

N.B. Nous voulons réaliser $u = \lambda u_1$. Que faut-il prendre pour λ ? Supposons le problème résolu. Alors si x_0 quelconque vérifie $u_1(x_0) \neq 0$ il faudra

$$u(x_0) = \lambda u_1(x_0)$$

d'où $\lambda = u(x_0)/u_1(x_0)$. Il y a certainement unicité dans ce cas. Mais on ne sait pas si ce λ convient pour tous les x .

Choisissons x_0 tel que $u_1(x_0) \neq 0$ et posons $\lambda = u(x_0)/u_1(x_0)$. Il s'agit de voir que $u = \lambda u_1$, ou encore que $u - \lambda u_1 = 0$.

Nous savons que $u - \lambda u_1$ est nul sur $\ker u_1$ par hypothèse et en x_0 par construction de λ . Cette forme est donc nulle sur

$$\ker u_1 + Kx_0.$$

Or ce sous-espace est égal à E .

N.B. Cela exprime le fait que $\ker u$ est un hyperplan. Ne présupposons rien cependant. Il s'agit de voir que tout vecteur x de E s'écrit

$$x = y + \mu x_0$$

où y est dans $\ker u_1$ et μ dans K . Supposons le problème résolu et appliquons u_1 , il vient

$$u_1(x) = \mu u_1(x_0) .$$

Posons $\mu = u_1(x)/u_1(x_0)$. On a

$$u_1(x - \mu x_0) = 0$$

de sorte que $y = x - \mu x_0$ est dans le noyau de u_1 . Ainsi s'achève le cas $n = 1$.

Supposons maintenant la propriété établie à l'ordre $n - 1$. Pour l'établir à l'ordre n , faisons l'hypothèse

$$\ker u \supset \ker u_1 \cap \ker u_2 \cap \cdots \cap \ker u_n .$$

N.B. Pour appliquer l'hypothèse de récurrence, il faut pouvoir se débarrasser de l'un de ces noyaux, par exemple u_1 . Mais cela ne se peut pas en général. Il faudra en même temps modifier u pour l'annuler davantage.

Il y a un cas où la démonstration s'achève, celui où $\ker u_1$ contient l'intersection

$$F = \ker u_2 \cap \cdots \cap \ker u_n$$

des autres noyaux. Alors $\ker u \supset F$ et

$$u = \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

par l'hypothèse de récurrence.

Dans le cas contraire, on peut trouver x_0 dans F qui n'est pas dans $\ker u_1$, donc tel que $u_1(x) \neq 0$.

Comme précédemment, posons $\lambda = u(x_0)/u_1(x_0)$ et considérons $v = u - \lambda u_1$. La forme v s'annule sur

$$\ker u_1 \cap F = \ker u_1 \cap \cdots \cap \ker u_n$$

car c'est le cas pour u et u_1 . Par ailleurs elle s'annule en x_0 . Par suite elle est nulle sur la somme

$$(\ker u_1 \cap F) + Kx_0 .$$

Cette dernière somme est égale à F , comme on le voit en reproduisant dans F le raisonnement fait pour E dans le cas $n = 1$.

Il n'y a plus qu'à appliquer à v l'hypothèse de récurrence. On a

$$v = \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

d'où

$$u = \lambda u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n .$$

Variante. Voici comment on aurait pu faire en dimension finie. D'abord on peut retirer de l'intersection une forme qui serait une combinaison linéaire des autres. De proche en proche on se ramène au cas où les formes u_n sont linéairement indépendantes.

On peut alors compléter ces formes par u_{n+1}, \dots, u_m pour constituer une base du dual. Par suite $u_i = e_i^*$ pour $i = 1, \dots, m$ où e_1, \dots, e_m est une base de E .

Ecrivons

$$u = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* + \lambda_{n+1} e_{n+1}^* + \dots + \lambda_m e_m^* .$$

Pour $p \geq 1$, sachant que e_{n+p} est dans le noyau des $e_i^* = u_i$ pour $i \leq n$, il vient

$$0 = u(e_{n+p}) = \lambda_{n+p}$$

ce qui montre que

$$u = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*$$

et achève la démonstration.

De là on peut passer au cas général : il suffit de passer au quotient par

$$\ker u_1 \cap \dots \cap \ker u_n$$

pour se ramener en dimension finie.

a) Soit u une forme linéaire sur E qui est continue pour la topologie faible $\sigma(E, F)$. L'image réciproque par u de $] -1, 1[$ contient un voisinage de 0 dans E , de la forme

$$|\langle x, y_1 \rangle| < \epsilon, \dots, |\langle x, y_n \rangle| < \epsilon$$

où les y_i sont dans F et où ϵ est > 0 .

Autrement dit les inégalités ci-dessus impliquent $|u(x)| \leq 1$. Si l'on remplace ϵ par $\alpha\epsilon$, on obtient $|u(x)| \leq \alpha$. Ainsi, si

$$\langle x, y_1 \rangle = \dots = \langle x, y_n \rangle = 0$$

alors $|u(x)| \leq \alpha$ pour tout α , donc $u(x) = 0$.

Cela veut dire que

$$\ker u \supset \ker \langle \cdot, y_1 \rangle \cap \dots \cap \ker \langle \cdot, y_n \rangle .$$

Grâce au lemme il vient

$$u = \lambda_1 \langle \cdot, y_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle \cdot, y_n \rangle = \langle \cdot, y \rangle$$

où $y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$. Cela montre que u provient bien d'un élément de F .

b) Les applications naturelles $E \rightarrow F'$, qui à x associe $\langle x, \cdot \rangle$, et $F \rightarrow E'$, qui à y associe $\langle \cdot, y \rangle$, à valeurs dans les espaces duaux faibles, sont injectives si la dualité est séparante. Nous venons de voir qu'elles sont surjectives. Ce sont des isomorphismes algébriques.

c) Tout d'abord le bipolaire $M^{\circ\circ}$ contient l'enveloppe convexe faiblement fermée \tilde{M} de M et de 0.

En effet le polaire d'une partie A quelconque, et donc celui de $A = M^\circ$, est toujours convexe. Si x, x' sont dans le polaire de A° , on a

$$\langle x, y \rangle \leq 1 \quad \text{et} \quad \langle x', y \rangle \leq 1$$

pour tout y dans A ; alors, si $0 \leq t \leq 1$, on a

$$\langle (1-t)x + tx', y \rangle \leq (1-t) + t = 1$$

pour tout y dans A aussi, de sorte que $(1-t)x + tx'$ est dans A° .

Par ailleurs le polaire d'une partie A quelconque est toujours faiblement fermé. Ici on ne peut pas raisonner avec des suites, faute de métrisabilité a priori. On remarque que

$$A^\circ = \bigcap_{y \in A} u_y^{-1}(]-\infty, 1])$$

où $u_y = \langle \cdot, y \rangle$. Or les applications u_y sont continues. Par exemple parce que c'est le cas en 0, l'image réciproque de $]-\epsilon, \epsilon[$ étant le voisinage de zéro défini par

$$|\langle x, y \rangle| < \epsilon .$$

Ou parce que ce sont des projections du produit \mathbf{R}^F . Ou parce qu'on a vérifié auparavant que la topologie faible $\sigma(E, F)$ était la topologie la moins fine rendant continues les applications $u_y = \langle \cdot, y \rangle$.

Evidemment un polaire contient 0. Enfin le bipolaire $M^{\circ\circ}$ contient M : si x est dans M et y dans M° , alors $\langle x, y \rangle \leq 1$.

Par suite $M^{\circ\circ}$ contient l'enveloppe \tilde{M} , qui est définie comme l'intersection des parties de E ayant les propriétés mentionnées.

Voyons l'inclusion inverse. Comme $M \subset \tilde{M}$, on a $M^\circ \supset \tilde{M}^\circ$ et donc $M^{\circ\circ} \subset \tilde{M}^{\circ\circ}$. Il suffit donc de montrer que $M^{\circ\circ} = \tilde{M}$.

On se ramène à supposer que la partie M est convexe, fermée pour la topologie faible $\sigma(E, F)$ et qu'elle contient 0. Il s'agit de montrer que M est alors son bipolaire, ou encore qu'il le contient.

Par l'absurde supposons qu'on puisse trouver a dans $M^{\circ\circ}$ qui ne soit pas dans M . Cette dernière partie étant faiblement fermée, on peut trouver y_1, \dots, y_n dans F et $\epsilon > 0$ tels que M ne rencontre pas le voisinage de a défini par

$$|\langle x, y_1 \rangle| \leq \epsilon, \dots, |\langle x, y_n \rangle| \leq \epsilon .$$

Nous allons passer au quotient par le sous-espace

$$G = \ker \langle \cdot, y_1 \rangle \cap \ker \langle \cdot, y_n \rangle .$$

Le quotient E/G sera de dimension finie. Pour cela on commence par établir le résultat suivant.

Lemme. Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif K et u_1, \dots, u_n des formes linéaires sur K . Alors

$$E/(\ker u_1 \cap \dots \cap \ker u_n)$$

est de dimension finie $\leq n$.

Pour établir ce lemme, on considère l'application $U = (u_1, \dots, u_n)$ de E dans K^n qui à x associe $(u_1(x), \dots, u_n(x))$. Elle admet la décomposition canonique

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & K^n \\ \downarrow & & \uparrow \\ E/\ker U & \rightarrow & \text{Im}U \end{array}$$

où la flèche du bas est un isomorphisme. Comme l'image de U est un sous-espace de K^n le résultat suit.

Le fait qu'il s'agisse d'un isomorphisme est évident. La surjectivité vient de ce que l'espace d'arrivée est justement l'image de U . Par ailleurs le noyau est la classe $\ker u$, i.e. la classe nulle.

N.B. Il n'est pas si facile de construire directement des générateurs de ce quotient. Pour $n = 1$ et si $u_1 \neq 0$, on peut prendre la classe \dot{x}_1 d'un x_1 tel que $u_1(x_1) \neq 0$. En effet on aura

$$x = \frac{u_1(x)}{u_1(x_1)}x_1 + z$$

où z est dans le noyau. Alors

$$\dot{x} = \frac{u_1(x)}{u_1(x_1)}\dot{x}_1 .$$

On en déduit que

$$(E/(\ker u_1 \cap \dots \cap \ker u_p))/(E/(\ker u_1 \cap \dots \cap \ker u_{p+1}))$$

est de dimension ≤ 1 et on peut prouver ainsi le résultat cherché de proche en proche.

Désignons par p l'application naturelle de E sur le quotient E/G . Les formes $\langle \cdot, y_1 \rangle, \dots, \langle \cdot, y_n \rangle$ passent au quotient pour définir des formes V_1, \dots, V_n sur E/G telles que l'image $p(M)$ de M ne rencontre pas le voisinage de $A = \dot{a}$ défini par

$$V_1(X - A) < \epsilon, \dots, V_n(X - A) < \epsilon .$$

L'adhérence $\overline{p(M)}$ ne rencontre pas davantage le voisinage ouvert en question.

Munissons le quotient H , qui est de dimension finie, d'une structure euclidienne et considérons la projection P de A sur la partie convexe fermée $\overline{p(M)}$ et la forme W sur le quotient définie par

$$W(X) = \frac{\langle X, A - P \rangle}{\langle (A + P)/2, A - P \rangle} = 2 \frac{\langle X, A - P \rangle}{\|A\|^2 - \|P\|^2}$$

où les pointes désignent le produit scalaire choisi sur le quotient. L'hyperplan médiateur de $[P, A]$ sépare $\overline{p(M)}$ de A et notamment 0 de A . Le dénominateur est ainsi > 0 . De plus on a $W(X) < 1$ sur $\overline{p(M)}$ et $W(A) > 1$.

Maintenant $W \circ p$ est de la forme $\langle \cdot, y \rangle$ où y est dans F à cause du lemme établi pour la question a). Il apparaît alors que cette forme est ≤ 1 sur M et > 1 en a de sorte que a n'est pas dans le bipolaire. C'est absurde.

Exercice sur le dual de L^p

On considère un exposant p tel que $1 < p < +\infty$ et l'exposant conjugué q . On considère l'espace L^p réel d'une mesure positive quelconque, celle de Lebesgue sur \mathbf{R} par exemple.

a) Montrer que

$$\left| \frac{x+y}{2} \right|^p < \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$$

si x, y sont des nombres réels distincts. En déduire que pour $\eta > 0$ fixé, on peut trouver un nombre $C \geq 0$ tel que

$$|x-y|^p \leq (C+\eta) \frac{|x|^p + |y|^p}{2} - C \left| \frac{x+y}{2} \right|^p$$

puis la même propriété dans L^p avec $\| \cdot \|_p$ au lieu de $| \cdot |$. On pourra supposer d'abord $|x|^p + |y|^p = 1$.

b) Dans L^p , soient C une partie convexe fermée non vide et f une fonction. Montrer qu'il existe une fonction $f+g$ et une seule de C qui réalise le minimum de la distance de f à un élément de C .

Montrer que la fonction $\tilde{g} = \text{sign}(g)|g|^{p-1}$ est dans L^q , et que g est caractérisée par la relation $\int -\tilde{g}(h-f-g) \leq 0$ pour toute fonction h de C .

c) Montrer que si L est un sous-espace vectoriel fermé de L^p , on a $L^{\perp\perp} = L$ pour la dualité avec L^q . En déduire le dual de L^p et y montrer Hahn-Banach.

Solution.

a)

N.B. La première inégalité est une inégalité de convexité. Elle stipule que le point milieu sur la courbe est en-dessous du point milieu sur la corde.

Supposons d'abord $x, y \geq 0$. La fonction définie sur $[0, +\infty[$ qui à x associe x^p est strictement convexe car sa dérivée $(p-1)x^{p-1}$ est strictement croissante. Il en résulte

$$\left(\frac{x+y}{2} \right)^p < \frac{x^p + y^p}{2}$$

pour $x \neq y$.

Maintenant

$$\left| \frac{x+y}{2} \right|^p \leq \left(\frac{|x|+|y|}{2} \right)^p$$

et l'égalité $|x+y| = |x|+|y|$ n'a lieu que si x et y sont de même signe, au sens large. L'inégalité demandée suit.

N.B. Il apparaît que la relation demandée est homogène; si x, y étaient des longueurs, chaque terme serait la puissance p -ième d'une longueur. Se ramener à $|x|^p + |y|^p = 1$, ou plutôt à $(|x|^p + |y|^p)^{1/p} = 1$ consiste à prendre cette dernière valeur comme unité, ou à changer d'échelle si l'on préfère.

Si $|x|^p + |y|^p = 0$, alors $x = y = 0$ et il n'y a rien à démontrer. Sinon posons $\alpha = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$. Si l'on prend $x' = x/\alpha$, $y' = y/\alpha$, on a $|x'|^p + |y'|^p = 1$ et l'inégalité demandée reste la même avec ces dernières variables.

Supposons donc $|x|^p + |y|^p = 1$. Il s'agit de voir que

$$|x - y|^p \leq C \left[\frac{|x|^p + |y|^p}{2} - \left| \frac{x + y}{2} \right|^p \right] + \frac{\eta}{2}.$$

Le grand crochet de droite est positif ou nul d'après ce qu'on vient de voir. Donc la propriété est vraie si $|x - y|^p \leq \eta/2$.

Il suffirait de voir que

$$\frac{|x - y|^p}{\frac{|x|^p + |y|^p}{2} - \left| \frac{x + y}{2} \right|^p} \leq C$$

dans le cas contraire.

Maintenant les relations $|x|^p + |y|^p = 1$ et $|x - y|^p \geq \eta/2$ définissent une partie de \mathbf{R}^2 qui est fermée, et bornée comme incluse dans $[-1, 1]^2$, donc compacte. Et la fonction définie par le premier membre de la relation ci-dessus est continue puisque son dénominateur ne s'y annule pas, vu qu'on y a $x \neq y$. Le théorème de la borne supérieure fournit l'existence de C .

En intégrant

$$|f(x) - g(x)|^p \leq (C + \eta) \frac{|f(x)|^p + |g(x)|^p}{2} - C \left| \frac{f(x) + g(x)}{2} \right|^p$$

il vient

$$\|f - g\|_p^p \leq (C + \eta) \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} - C \left\| \frac{f + g}{2} \right\|_p^p.$$

b) Ici nous n'écrivons plus l'indice pour les normes. Soit $d = d(f, C) = \inf_{h \in C} \|h - f\|$ la distance de f à C . Pour l'existence, il s'agit de voir que la borne inférieure est atteinte. Si n est un nombre entier ≥ 1 , on peut trouver h_n dans C vérifiant

$$\|h - f_n\|^p \geq d^p + \frac{1}{n}.$$

Si l'on peut montrer que la suite (h_n) est convergente, sa limite h sera dans la partie fermée C et vérifiera $\|h - f\| \leq d$, ce qui établira l'existence.

Puisque L^p est complet, on va vérifier le critère de Cauchy. D'après le a), si l'on a choisi α et que l'on a en tiré C , on peut majorer

$$\|h_n - h_{n+m}\|^p = \|(h_n - f) - (h_{n+m} - f)\|^p$$

par

$$(C + \eta) \frac{\|h_n - f\|^p + \|h_{n+m} - f\|^p}{2} - C \left\| \frac{h_n + h_{n+m}}{2} - f \right\|^p.$$

Or la partie convexe C , qui contient h_n et h_{n+m} , contient aussi le milieu $(h_n + h_{n+m})/2$. Par suite

$$\|h_n - h_{n+m}\|^p \leq (C + \eta) \left(d^p + \frac{1}{n} \right) - C d^p = \frac{C + \eta}{n} + \eta d^p.$$

N.B. Il faut être soigneux pour présenter la démonstration. On peut toujours majorer par

$$\frac{C+1}{n} + \eta d^p$$

en imposant $\eta \leq 1$. Mais on ne peut pas commencer par choisir n assez grand. Il faut en effet connaître C . Or ce dernier dépend de η . Si l'on a déjà choisi η on ne peut plus rien lui demander.

Étant donné $\epsilon > 0$, on choisit d'abord $\eta > 0$ de façon que $\eta d^p \leq \epsilon^{1/p}/2$. On prend alors une valeur de C qui vérifie la condition du a). Enfin on prend N assez grand pour que

$$\frac{C+\eta}{N} \leq \epsilon^{1/p}/2.$$

Alors $\|h_n - h_{n+m}\|^p \leq \epsilon$ pour $n \geq N$ et $m \geq 0$.

L'unicité s'établit directement avec l'inégalité du a). Si h et h' réalisent le minimum de la distance, alors $\|h - h'\|$ est majoré par

$$(C+\eta) \frac{\|h-f\|^p + \|h'-f\|^p}{2} - C \left\| \frac{h+h'}{2} - f \right\|^p \leq (C+\eta)d^p - Cd^p = \eta d^p.$$

Or η peut être choisi arbitrairement petit; on prend la limite pour $\eta \rightarrow 0$ qui donne $h = h'$.

Il reste à caractériser la projection. Supposons d'abord que la fonction g réalise le minimum de la distance et considérons une fonction $h = f + g + k$ de C . Alors $f + g + tk$ est aussi dans C pour t dans $[0, 1]$, de sorte que

$$\|g + tk\| \geq \|g\|$$

pour t dans cet intervalle.

N.B. Ici les fonctions g, k sont dans L^p .

Dérivons par rapport à t la fonction $\|g + tk\|^p$, c'est à dire

$$\int |g(x) + tk(x)|^p dx.$$

On vérifie que, pour $p > 1$, la fonction $|y|^p$ est dérivable sur \mathbf{R} , sa dérivée étant donnée par $p \operatorname{sign} |y|^{p-1}$. Le seul point à vérifier concerne la dérivée à l'origine : $|y|^p/y \rightarrow 0$. Ici la fonction sign prend les valeurs $+1$ ou -1 ; on peut lui donner la valeur 0 en 0 .

La dérivée en t sous l'intégrale est donc

$$\operatorname{sign}(g(x) + tk(x)) |g(x) + tk(x)|^{p-1} k(x).$$

Elle est dominée par

$$(|g(x)| + |k(x)|)^{p-1} |k(x)|$$

pour t dans $[0, 1]$. Cette dernière fonction est dans L^1 comme produit d'une fonction de L^q par une fonction de L^p . En effet $(p-1)q = p$. La dérivée est donc établie.

En particulier la dérivée à droite en 0 est

$$\int \tilde{g}k .$$

Elle est positive puisque

$$\frac{\|g + tk\|^p - \|g\|^p}{t} \geq 0$$

pour t dans $[0, 1]$.

Réciproquement supposons cette dérivée à droite en 0 positive pour toute fonction $h = f + g + k$ de C . Posons

$$\phi(t) = \|g + tk\|$$

et montrons que $\phi(1) \geq \phi(0)$.

La fonction ϕ est convexe comme composée de la norme, qui est convexe, avec une fonction affine. Elle possède une dérivée à droite en zéro liée à celle de ϕ^p par

$$(\phi^p)'_d(0) = \phi(0)^{p-1} \phi'_d(0) .$$

Il n'y a rien à montrer si $\phi(0) = 0$. Sinon on en tire $\phi'_d(0) \geq 0$. Mais la fonction ϕ'_d est croissante; par suite ϕ est elle-même croissante pour $t \geq 0$.

c) Les démonstrations sont identiques à celles que l'on fait dans le cas hilbertien. On retrouve notamment celle du théorème de représentation de Riesz.

Exercice sur la continuité faible d'une transposée

Soient E, F des espaces vectoriels réels ou complexes en dualité (algébrique). On suppose donnés des endomorphismes (algébriques) T de E et U de F qui sont transposés l'un de l'autre dans le sens que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle .$$

Montrer qu'ils sont, l'un et l'autre, faiblement continus. Par exemple T sera continu pour la topologie $\sigma(E, F)$.

Remarque. On peut appliquer le résultat à la dérivation dans \mathcal{D} et dans \mathcal{D}' . Chacune est transposée de l'opposée de l'autre. On notera qu'aucune notion structure d'analyse n'intervient dans les hypothèses.

Il reste que la continuité de la dérivation dans l'espace des distributions est surtout intéressante pour la notion naturelle de convergence dans cet espace. En fait la dérivation des distributions apparaît surtout comme une application linéaire bornée.

Solution.

Nous présentons deux variantes.

a) Commençons par raisonner avec des voisinages de 0. Donnons-nous un voisinage de 0 dans E , que nous pouvons choisir de la forme

$$|\langle x, y_1 \rangle| < \epsilon, \dots, |\langle x, y_n \rangle| < \epsilon$$

où y_1, \dots, y_n sont dans E et ϵ est > 0 , puisque tout voisinage de 0 en contient un de ce type.

L'image réciproque par T de cette partie est définie par

$$|\langle T(x), y_1 \rangle| < \epsilon, \dots, |\langle T(x), y_n \rangle| < \epsilon$$

ou encore

$$|\langle x, T(y_1) \rangle| < \epsilon, \dots, |\langle x, T(y_n) \rangle| < \epsilon$$

et on reconnaît un autre voisinage de 0.

b) On sait que la topologie faible $\sigma(E, F)$ est induite par le produit \mathbf{R}^F ou \mathbf{C}^F . Pour voir qu'une application à valeur dans le produit est continue, on compose avec les projections. Ici cela revient à considérer les $\langle T(\cdot), y \rangle$, soit encore les $\langle \cdot, T(y) \rangle$, lesquelles sont elles-mêmes des projections.

Exercice sur la non métrisabilité de la topologie faible

Soit H un espace hilbertien de dimension infinie. Montrer que sa topologie faible, celle de la dualité avec son conjugué, est non métrisable.

Remarque. Sur la boule unité fermée, dans le cas séparable, nous avons vu qu'elle est métrisable. Nous avons introduit une distance sur H ; il apparaît qu'elle ne définit pas la topologie faible sur l'espace entier.

Solution.

Raisonnons par l'absurde en supposant la topologie faible de H définie par une distance. Dans ce cas un système fondamental de 0 sera constitué des boules V_n de rayon $1/n$ où n est un nombre entier > 1 .

Maintenant chaque V_n contient un voisinage W_n de 0 du type

$$|\langle y_{n,1}, x \rangle| < \epsilon_n, \dots, |\langle y_{n,k_n}, x \rangle| < \epsilon_n$$

où $\epsilon_n > 0$ et où $y_{n,1}, \dots, y_{n,k_n}$ sont dans H .

L'ensemble des $y_{n,k}$ ainsi introduits constitue une partie dénombrable D , que nous pouvons ranger en une suite z_1, \dots, z_p, \dots

Soit maintenant y quelconque dans H . L'ensemble des x tels que

$$|\langle y, x \rangle| < 1$$

est un voisinage faible de 0. Il contient l'un des V_n et donc W_n . Par suite

$$|\langle y_{n,1}, x \rangle| < \lambda \epsilon_n, \dots, |\langle y_{n,k_n}, x \rangle| < \lambda \epsilon_n$$

implique

$$|\langle y, x \rangle| < \lambda$$

pour tout $\lambda > 0$. Il en résulte que

$$\langle y_{n,1}, x \rangle = \dots = \langle y_{n,k_n}, x \rangle = 0$$

implique $\langle y, x \rangle = 0$.

Comme nous l'avons établi en lemme à propos du dual faible, cela implique que y est une combinaison linéaire des $y_{n,k}$ pour k variant de 0 à k_n . Ici on peut directement remarquer que y est dans le biorthogonal du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, lequel est fermé puisque de dimension finie, donc égal à son biorthogonal.

Finalement D engendre (algébriquement), de sorte que H est la réunion de la suite H_n , où H_n est le sous-espace vectoriel engendré par z_1, \dots, z_n . Or chaque H_n est fermé. Donc l'un des H_n a un point intérieur, qu'on peut toujours supposer être 0 par translation. On peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $\|x\| < \epsilon$ implique que x est dans H_n . Par homothétie cela montre que $H = H_n$, ce qui est contradictoire puisque H est de dimension infinie.

Quelques exercices divers non résolus

Petits exercices non résolus

Dual de $E = L^p([0, 1])$ pour $1 < p < +\infty$. On désigne par q l'exposant conjugué de p .

a) Construire une application linéaire de norme ≤ 1 naturelle Φ de L^q dans le dual normé E' .

On cherche maintenant à construire une application linéaire de norme ≤ 1 naturelle Ψ de E' dans L^q ; pour cela on se donne T dans E' .

b) Montrer que

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx \leq 1 + \int_0^1 |f(x)|^2 dx$$

en distinguant les cas $f(x) \leq 1$ et $f(x) > 1$; en déduire que L^2 s'injecte continûment dans L^p , puis que T définit, par restriction, une forme linéaire continue sur L^2 , puis encore l'existence de g dans L^2 caractérisée par

$$(*) \quad T(f) = \int_0^1 g(x)f(x)dx$$

pour f dans L^2 .

c) Montrer $\|g\|_q \leq \|T\|$ et définir Ψ . Montrer que $\Psi \circ \Phi = Id_{L^q}$.

d) Montrer (*) pour f dans L^p , en approchant f par des fonctions bornées; en déduire $\Phi \circ \Psi = Id_{E'}$. Conclure.

Rétraction du disque sur le cercle. Dans le plan euclidien \mathbf{R}^2 , on considère le disque unité fermé B et le cercle unité C qui le borde. Si x, y sont des points distincts de B on considère la demi-droite $D_{x,y}$ issue de x qui est opposée à celle issue de ce point et passant par y , puis l'intersection $G(x, y)$ de cette droite avec le cercle C . Il s'agit de montrer que G est une application continue du produit $B \times B$ privé de sa diagonale dans C .

a) Soient a, b des points distincts de B et $c = G(a, b)$. On pose $d = \|a - b\|$ et on considère r tel que $0 < r < d/2$. Montrer que si x est dans le disque fermé B_a de centre a et de rayon r et y dans le disque fermé B_b de centre b et de rayon r aussi, alors $G(x, y)$ est sur l'arc de C découpé par le secteur angulaire défini par les demi-tangentes issues du milieu m du segment $[a, b]$ au cercle C_a bordant B_a .

On pourra remarquer que si un demi-plan fermé contient x sans que y lui soit intérieur, alors il contient D_x et donc $G(x, y)$; c'est le cas s'il contient B_a sans que B_b rencontre son intérieur; on considèrera alors les tangentes communes internes aux cercles C_a et C_b .

b) Montrer que

$$\|G(x, y) - c\| \leq l(\gamma) \leq \pi\alpha = \pi \arcsin(2r/d)$$

où γ est l'arc joignant c à $G(x, y)$ et α est le demi-angle du secteur considéré; on pourra comparer α à un angle inscrit, puis à l'angle au centre relatifs à γ .

c) En déduire que si f était une application continue de B dans lui-même sans point fixe, on pourrait construire une rétraction continue de B sur C par $g(x) = G(x, f(x))$ (ce qui est bien sûr impossible car B est simplement connexe alors que C ne l'est pas).

Champ rentrant dans le disque. Dans le plan euclidien \mathbf{R}^2 , on considère le disque unité fermé B et le cercle unité C qui le borde. On suppose donnée une application continue v de B dans \mathbf{R}^2 ne s'annulant pas, définissant un champ rentrant en tout point x de C , i.e. y vérifiant

$$\langle x, v(x) \rangle < 0 .$$

a) Soit l'application ϕ définie sur B par

$$\phi(x) = \frac{\max(-2\langle x, v(x) \rangle, 1 - \|x\|)}{\|v(x)\|} .$$

Montrer que ϕ est partout strictement positive, puis qu'il existe $t > 0$ tel que $\phi(x) \geq t$ pour tout x .

b) Montrer que $f(x) = x + tv(x)$ définit une application continue de B dans B sans point fixe (ce qui est bien sûr impossible). Pour voir que f prend ses valeurs dans B , on pourra considérer deux cas : $t\|v(x)\| \leq 1 - \|x\|$ ou $2\langle x, v(x) \rangle < -t\|v(x)\|$; dans le second on montrera que $\|f(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.

Méthode de Newton. Soit f une fonction deux fois dérivable $[x_0 - r_0, x_0 + r_0]$ vérifiant $|f''(x)| \leq C$. On suppose que $f'(x_0) \neq 0$ et que

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq \frac{1}{2} \min\left(\frac{f'(x_0)}{C}, r_0\right)$$

ce qui signifie que $f(x_0)$ est suffisamment petit quand $f'(x_0)$ ne l'est pas trop.

a) Montrer une propriété analogue pour

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

avec $r_1 = r_0/2$, en commençant par vérifier que x_1 est dans l'intervalle considéré.

b) En déduire que la méthode de Newton aboutit : la suite (x_n) reste dans l'intervalle initial et elle converge vers un point a tel que $f(a) = 0$.

N.B. Ce n'est pas une application du théorème de point fixe classique, mais c'est l'utilisation du même schéma. On notera qu'il n'y a pas unicité en général ici. L'énoncé s'étend au cas d'un espace normé complet et d'une partie convexe fermée; dans ce cas r est la distance au bord.

Complété d'un espace métrique. Dans cet exercice les flèches représentent des applications f vérifiant $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

Soit M un espace métrique. On veut construire un espace métrique complet \hat{M} et une flèche $i : M \rightarrow \hat{M}$ résolvant le problème : pour tout espace métrique complet N et toute flèche $f : M \rightarrow N$, il existe une flèche $\hat{f} : \hat{M} \rightarrow N$ unique vérifiant $f = \hat{f} \circ i$, i.e. rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \rightarrow & N \\ & \searrow & \nearrow \\ & \hat{M} & \end{array}$$

ce qui donnera notamment l'unicité de cette solution.

a) Sur l'ensemble \mathcal{C}_M des suites $\underline{x} = (x_n)$ de Cauchy de M on introduit l'écart

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) .$$

Construire l'espace métrique \hat{M} en passant au quotient par la relation $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0$. On envoie M dans \mathcal{C}_M en associant à x la suite constante valant x . Construire i ; vérifier $\hat{x} = \lim i(x_n)$ et $d(i(x), i(y)) = d(x, y)$; en déduire que i est isométrique et d'image dense.

b) Caractériser $\hat{f}(\hat{x})$ par $\lim f(x_n)$. Construire \hat{f} en passant au quotient dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \rightarrow & N \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathcal{C}_M & \rightarrow & \mathcal{C}_N \end{array}$$

où la flèche $\mathcal{C}_N \rightarrow N$ associe à (x_n) sa limite. Etendre la construction de \hat{f} au cas où f est uniformément continue.

c) Montrer que si la flèche $M_1 \rightarrow M_2$ est isométrique et d'image dense, alors la flèche naturelle $\hat{M}_1 \rightarrow \hat{M}_2$ est un isomorphisme.

d) Montrer que M est complet si et seulement si i est un isomorphisme. En déduire que \hat{M} est complet.

e) Soient M_1 un sous-espace dense de l'espace métrique M_2 et f une application uniformément continue de M_1 dans un espace métrique complet N . Montrer que f se prolonge de façon unique en une application uniformément continue sur M_2 . On considèrera le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \rightarrow & N \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ M_2 & & \hat{M}_1 \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \hat{M}_2 \end{array}$$

où la flèche $\hat{M}_2 \rightarrow \hat{M}_1$ inverse un isomorphisme.

Tietze-Urysohn et fonctions lipschitziennes. On veut montrer que si F est une partie quelconque de l'espace métrique E , alors toute fonction uniformément continue $f : F \rightarrow [0, 1]$ se prolonge en une fonction uniformément continue sur E .

Il en résultera le théorème classique de Tietze-Urysohn suivant : si F est une partie compacte de l'espace métrique E , alors toute fonction continue $f : F \rightarrow [0, 1]$ se prolonge en une fonction uniformément continue sur E .

Le principe est de remplacer la distance d par une autre d' uniformément équivalente de façon que $|f(x) - f(y)| \leq d'(x, y)$ sur F .

a) Pour chaque ϵ dans $]0, 1]$ on choisit α dans $]0, 1]$ tel que $d(x, y) \leq \alpha$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ et on considère la fonction affine ρ_ϵ sur $[0, +\infty[$ vérifiant $\rho_\epsilon(0) = \epsilon$ et $\rho_\epsilon(\alpha) = 1$; vérifier $\rho_\epsilon(t) \geq \min(1, t)$ et $\rho_\epsilon(t) \geq \frac{t}{t+u} \rho_\epsilon(t+u)$ pour $t, u \geq 0$.

b) On pose

$$\rho(t) = \inf_{0 < \epsilon \leq 1} \rho_\epsilon(t) .$$

Montrer que ρ est croissante sur $[0, \infty)$, vérifie $\rho(t) > 0$ pour $t > 0$ et $\rho(t+u) \leq \rho(t) + \rho(u)$ pour $t, u \geq 0$, puis $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = 0$.

c) Montrer que $d' = \rho \circ d$ convient.

b) Montrer que l'on peut prolonger f par

$$\inf_{y \in F} (f(y) + d'(x, y))$$

pour obtenir le résultat cherché.

Remarques. En fait on montre que toute distance bornée uniformément équivalente à une distance d donnée est majorée par une distance du type $\rho \circ d$ où ρ vérifie les propriétés du b).

Pour caractériser deux distances bornées uniformément équivalentes, on peut alors utiliser des conditions

$$d_2 \leq \rho \circ d_1 \quad , \quad d_1 \leq \rho' \circ d_2$$

où ρ, ρ' vérifient les propriétés du b). On peut aussi imposer $\rho = \rho'$.

Par ailleurs pour le α du a) on peut prendre $\sup \omega^{-1}(\epsilon)$ où ω est le module d'uniforme continuité de f ; autrement dit on prend le plus grand : il n'est pas besoin d'axiome du choix.

Petit cours sauvage d'Analyse mathématique

Un peu d'histoire locale nancéienne pour commencer. Après la réforme de 1967, déjà justifiée par la nécessaire mise en conformité avec les normes européennes, le seul C4 que l'on ait proposé en mathématiques à Nancy a été un enseignement d'Analyse, avec comme premier titulaire Pierre Eymard. Sa création a été notamment défendue pour fournir un enseignement complémentaire aux agrégatifs. Le certificat s'est maintenu au cours des années avec un programme pratiquement inchangé. Ont été plus tard revus d'une part sa dénomination, puisqu'il s'est mu en une unité d'Analyse réelle et complexe, et d'autre part sa part dans l'enseignement de quatrième année, qui est passée d'une demi-année à moins d'un quart. Cependant il est devenu obligatoire. En même temps il restait la partie structurante de la quatrième année à côté d'un enseignement issu du très officiel C3 d'Algèbre et de Géométrie.

La situation a duré jusqu'à l'année 2004-2005 incluse. Avec la réforme du LMD, en 2005-2006, la partie conceptuelle de ce cours a été reversée dans un petit module facultatif. En 2006-2007 il a été décidé a priori que ce module ne serait même pas ouvert, parce que, globalement, les effectifs de quatrième année étaient insuffisants. On peut donc penser que les mathématiques ont beaucoup changé des deux dernières années, au moins à Nancy. C'est le cas en effet, à la suite de la réforme du LMD en particulier mais selon un processus qui s'était amorcé bien avant. Si l'enseignement des trois premières années, celui de la licence, s'était vu renforcer, l'abandon du descendant du glorieux C4 aurait pu s'expliquer. En réalité c'est l'inverse qui a eu lieu : l'enseignement de la licence s'est peu à peu abaissé au mieux au niveau d'un enseignement de deuxième année et encore!

Il n'est donc plus possible d'enseigner l'Analyse, et aussi bien l'Algèbre, en quatrième année aujourd'hui comme avant. On sait que le programme de l'Agrégation de mathématiques se situe au niveau d'une troisième année pour l'épreuve d'Analyse et de celui d'une deuxième année pour l'épreuve de Mathématiques générales. Cependant il s'agit d'un niveau renforcé, pour lequel on exige des candidats beaucoup de maîtrise et un peu de recul. C'est donc d'un enseignement intermédiaire entre une troisième et quatrième année que les futurs agrégatifs auraient besoin en Analyse.

Pour expliquer ce niveau intermédiaire on peut prendre en partie appui sur le *cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier* de Jean-Michel Bony à l'Ecole polytechnique. Le cœur de l'exposé, consacré aux distributions et à l'analyse de Fourier dans ce cadre, n'est pas au programme de l'agrégation, ni de l'écrit, ni de l'oral. Cependant l'ouvrage cité comporte deux grands chapitres initiaux qui sont une consolidation du niveau de la licence et trois appendices qui en sont un enrichissement. C'est un peu cela qu'il faut pour l'agrégation : faire le point sur les connaissances antérieures et les approfondir.

Malheureusement, dans l'ouvrage mentionné, le début et la fin ne sont pas aussi détaillés que le cœur, à cause du faible nombre d'heures allouées aux mathématiques à l'Ecole polytechnique, ce dont l'auteur se plaint d'ailleurs. Indépendamment d'un traitement insuffisamment modulaire pour vraiment convenir à la préparation de l'agrégation,

cette partie présente plusieurs défauts qu'elle partage avec beaucoup d'enseignements universitaires. Pour ces derniers, il y a aussi un problème d'horaires, artificiellement créé par la balkanisation des modules, mais il y a surtout une démission dans les exigences.

Un des défauts les plus courants de l'enseignement d'aujourd'hui est l'insuffisance de mise en lumière des concepts. Cela crée un handicap lorsqu'on cherche à mener un raisonnement — à l'écrit — ou à bâtir un plan — à l'oral.

On se contente aujourd'hui de présenter un enchaînement à peu près logique dans le meilleur des cas, en visant surtout l'économie de la réflexion. Il est bien dommage que l'enseignement français en soit arrivé là, surtout quand il s'agit de celui qu'on délivre à Nancy.

On se souvient en effet que Bourbaki, professeur à l'université de Nancago, a voulu, en écrivant son traité, réaliser un modèle pour la Licence de mathématiques. Evidemment il a été amené à travailler beaucoup plus en profondeur, oubliant au passage son but initial. Pour cette raison le traité, même si la plume de Jean-Alexandre Dieudonné l'a fait souvent très supérieur à la concurrence, ne peut être directement conseillé aux étudiants. Cependant le travail des Bourbakistes a débouché sur un savoir-faire qui va bien au-delà des volumes de leur traité car il comprenait un grand nombre de secrets de fabrication qui ont malheureusement tendance à passer dans l'oubli.

Les secrets en question n'étaient pas vraiment secrets. Ils fleurissent partout dans l'enseignement qu'ont dispensé Henri Cartan ou Roger Godement. Ils sont à l'origine du cours d'Analyse à la Sorbonne donné en 1953 par Gustave Choquet, cours qui a complètement rénové l'enseignement universitaire français. Ceux de ma génération ont pu connaître directement ces maîtres et ont appris d'eux ce qu'on ne trouve pas toujours dans leurs ouvrages, à savoir la raison pour laquelle ils s'y sont pris de telle ou telle façon pour présenter les choses. Jadis le dialogue était permanent. Même sans les côtoyer, on pouvait bénéficier de l'influence de Jean-Pierre Serre ou d'Alexandre Grothendieck. Il y avait des relais, comme Christian Houzel ou, à Nancy même, Jean-Louis Ovaert. Malheureusement ce dialogue n'existe plus aujourd'hui; chacun est enfermé dans sa vanité et ses certitudes et le flambeau ne peut plus se transmettre.

La prééminence des concepts sur les calculs sordides est parfaitement illustrée par la façon dont David Hilbert a refondé l'Analyse, en y introduisant la vision géométrique. L'Analyse moderne refuse de voir chaque fonction isolément et ne la regarde qu'en tant qu'élément d'un espace fonctionnel. Lorsqu'on cherche à résoudre une équation, on traite d'abord la question dans un grand espace, où l'on obtient l'existence et surtout l'unicité. Ensuite, et c'est souvent la partie délicate, on montre que *la* solution appartient à un plus petit espace, et jouit de propriétés, par exemple de régularité, qui permettront de travailler plus facilement.

On ne peut donc qu'être surpris par le développement qui continue d'être donné aux propriétés ponctuelles relatives aux fonctions, même dans les ouvrages de référence. Les propriétés qui relèvent de l'Analyse fonctionnelle semblent ne devoir être mentionnées que pour faire comme tout le monde, sans que leur rôle soit vraiment élucidé. On finit même par en oublier pourquoi on parle d'espaces normés, d'espaces métriques ou d'espaces topologiques. Hélas

En même temps qu'on minimise l'importance des concepts, on oublie souvent qu'il faut privilégier leur côté *naturel*. Trop souvent les choix pour les définitions sont présentés comme arbitraires. Souvent ils sont dictés par le souci de proposer des exercices aussi

faciles que possible, la difficulté étant cachée sous le tapis. Ou alors ils sont inspirés par un souci de concision apparente de l'exposé, concision que l'on paye dès que l'on veut approfondir un peu. L'invention des *catégories*, qui a été l'un des grands progrès du siècle écoulé, a permis de mettre de l'ordre. Il n'est pas question d'en introduire le langage dans l'enseignement de quatrième année : ce n'est pas le vocabulaire qui compte et le pédantisme n'a jamais été le signe d'un bon enseignement. En revanche on peut en retenir un peu de la philosophie, selon laquelle, tout simplement, il faut chercher avant tout ce qui est naturel. Par ailleurs une bonne règle, pas toujours respectée, est de ne pas oublier les morphismes après la présentation des objets.

Il est par exemple remarquable que le concept d'isomorphisme soit fuit autant qu'il peut l'être dans l'enseignement d'aujourd'hui. Quand, par hasard, le mot est utilisé, il n'est même pas bien sûr qu'il le soit à bon escient.

La mode des "catégories sans morphismes" va jusqu'à fabriquer des "catégories sans objets". On se pose bien trop souvent la question de savoir quelle structure l'on pourrait mettre sur tel ensemble ou tel espace vectoriel. C'est ignorer le fait que les objets mathématiques viennent naturellement tout armés d'une structure naturelle. S'il arrive que, pour des raisons de commodité, l'on mette cette structure un peu dans l'ombre pour en privilégier certains de ses aspects, il faut garder conscience du fait que l'on peut avoir aussi besoin d'aspects trop vite écartés.

Un autre défaut de l'enseignement d'aujourd'hui est qu'on n'y a plus le culte de la démonstration. Certes de longues et pénibles démonstrations figurent dans les photocopiés, dont on donne bien rarement la clé parce qu'on n'attend pas que les étudiants les comprennent et les réutilisent. En revanche on passe trop souvent sur les petites vérifications, beaucoup plus accessibles et dont la maîtrise pourrait être exigée au titre de la préparation aux écrits.

C'est un peu tout cela qu'on aurait voulu corriger, si l'on en avait eu les moyens. Le petit cours est une entreprise sauvage parce qu'il va exactement à contresens des modes et n'a pas été inscrite dans la programmation officielle. En même temps ce ne sont que de petites rustines qu'on placerait en désordre sur une chambre à air pourrie. La mise en place d'un cours complet ne peut être un projet individuel. Il faudrait une petite équipe pour s'y atteler. Cela finira bien par se faire quelque part.

Ce petit cours est composé de quelques développements disparates sur des thèmes rebattus, choisis en fonction de la demande parmi les innombrables manques dont souffre l'enseignement local.

Il commence par une présentation très brève de constructions générales, comme produits et quotients, du théorème de Baire et de la dualité, présentation qui renvoie à des exercices de la seconde partie.

Il enchaîne sur un chapitre, vide de mathématiques, sur les limites, dont la lecture peut être différée. Il n'a sa place que parce qu'un sujet aussi banal n'est plus vraiment enseigné et qu'il est lassant d'entendre n'importe quoi sur le sujet.

On s'intéresse ensuite aux exponentielles de matrice, comme exemple de calcul fonctionnel en dimension finie. Un bref regard sur l'espace projectif suit.

On offre un traitement minimal des équations différentielles, question centrale qui a pratiquement disparu aussi des enseignements locaux.

Un autre développement traite des espaces L^p en développant deux points souvent négligés : la complétion et la dualité. On fait comme si les étudiants maîtrisaient déjà l'introduction de l'intégrale et les théorèmes de convergence. Comme ce n'est pas le cas, il pourront se reporter aux excellents rappels contenus dans le livre de J.-M. Bony cité.

Un bloc sur l'analyse de Fourier vient aussi combler l'absence de son enseignement sur place. On a essayé de traiter séries et intégrales de façon semblable, sans avoir peur des répétitions. Ce texte renvoie aux ouvrages suivants : *Calcul intégral* de Jacques Fauraut, *Real and Complex Analysis* de Walter Rudin et *Éléments d'Analyse pour l'agrégation* de Claude Zuily et Hervé Quéffelec.

On termine par la théorie de Fredholm des opérateurs compacts et on parle un peu de quelques espaces localement convexes. C'est un sacrifice à la culture.

Jean-Pierre Ferrier
18 février 2007

Quelques outils

Sous-espaces et produits

Ce qui suit concerne aussi bien les espaces normés (avec les applications linéaires continues, ou de norme ≤ 1) que les espaces métriques (avec, au choix, les applications continues, uniformément continues ou telles que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$), que les espaces topologiques (avec les applications continues) ou que les espaces (vectoriels topologiques) localement convexes (avec les applications linéaires continues).

Les objets et les flèches des diagrammes ci-dessous désigneront toujours un espace et une application de la nature choisie.

Pour les **sous-espaces** (avec une structure parmi celles évoquées ci-dessus) le principe est le suivant : une application prenant ses valeurs dans le sous-espace ne change pas de nature (parmi celles évoquées ci-dessus) qu'on la considère à valeurs dans le sous-espace ou le grand espace.

On a $\begin{array}{c} Y \\ \downarrow \\ X \end{array}$ et si $Z \searrow X$ a une image dans Y , alors $Z \begin{array}{c} \nearrow Y \\ \searrow X \end{array}$ de façon unique.

La norme, la distance, les semi-normes d'un sous-espace, dites induites, s'obtiennent par restriction. La topologie induite a pour parties ouvertes les traces des parties ouvertes du grand espace.

Pour les **produits** (avec une structure parmi celles évoquées ci-dessus) le principe est le suivant : considérer une famille d'applications à valeurs dans les facteurs ou l'application à valeur dans le produit correspondant, qui est définie par

$$f(z) = (f_\alpha(z))_\alpha ,$$

ne fait pas changer de nature (parmi celles évoquées ci-dessus).

On a des $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ X_\alpha \end{array}$ et si $Z \searrow X_\alpha$ pour tout α , alors $Z \begin{array}{c} \nearrow X \\ \searrow X_\alpha \end{array}$ de façon unique.

En fait, dans le cas des produits, on n'exige pas a priori que l'espace produit soit construit sur le produit des ensembles, même si ce sera le cas dans les exemples que nous considérerons.

Les produits finis existent pour les espaces normés et les espaces métriques. Les produits quelconques existent pour les espaces topologiques ou vectoriels topologiques localement convexes.

Pour deux espaces, la norme ou la distance produit sont définies par

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|) \quad , \quad d((x, y), (x', y')) = \max(d(x, x'), d(y, y')) .$$

Le produit d'une famille infinie d'espaces normés, comme espace (vectoriel topologique) localement convexe, a la topologie définie par les semi-normes $x \mapsto \|pr_\alpha(x)\|$.

Voir les exercices sur l'équivalence des normes, sur la métrisabilité d'un produit dénombrable, sur la compacité faible.

Quotients

Pour le **quotient** X/R d'un espace X par une relation d'équivalence R , le principe est le suivant : une application définie sur X et constante sur les classes ne change pas de nature, qu'on la considère sur X ou sur le quotient X/R .

On a $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ X/R \end{array}$ et si $\begin{array}{c} X \\ \searrow \\ Z \end{array}$ est constante sur les classes, alors $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ X/R \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ Z \end{array}$ avec unicité.

(la flèche verticale est celle qui à x associe sa classe \dot{x})

Il n'y a pas toujours des quotients. Par exemple le cas des espaces métriques est problématique. Deux cas sont très importants.

1) le quotient d'un espace **normé** E par un sous-espace vectoriel **fermé** F . Il porte la norme quotient

$$\|\dot{x}\| = \inf_{y \in F} \|x + y\| .$$

Nous y reviendrons.

2) le quotient d'un espace **topologique** X par une relation d'équivalence R quelconque. Ses parties ouvertes sont les images dans le quotient des parties ouvertes saturées de X , i.e. des parties ouvertes U telles que si $x \in U$ et $y \sim x$ alors $y \in U$.

Quotient d'un espace normé par un sous-espace vectoriel fermé.

Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . L'espace vectoriel quotient E/F est l'espace des classes $\dot{x} = x + F$; on y fait passer les opérations de E par

$$\dot{x} + \dot{y} = \dot{(x + y)}$$

et

$$\lambda \dot{x} = \dot{(\lambda x)}$$

après avoir vérifié que les seconds membres ne dépendaient que des classes de x et y .

Si maintenant E est normé et si F est un sous-espace vectoriel *fermé*, on munit l'espace vectoriel E/F d'une norme en posant

$$\|\dot{x}\| = \inf_{y \in F} \|x + y\|$$

après avoir vérifié que le second membre ne dépendait que de la classe de x .

On vérifie que c'est une norme. L'homogénéité est évidente. L'inégalité triangulaire s'obtient en passant à la borne inférieure sur y puis y' dans F , à partir de

$$\|x + y\| + \|x' + y'\| \geq \|x + x' + y + y'\| \geq \|\dot{x} + \dot{y}\| .$$

Enfin si $\|\dot{x}\| = 0$ alors $d(x, F) = 0$, de sorte que x est dans \overline{F} donc dans F , d'où $\|\dot{x}\| = 0$.

Pour finir la boule unité *ouverte* de E/F est l'image de celle de F : si $\|\dot{x}\| < 1$, on peut trouver y dans F tel que $\|x + y\| < 1$ et $\dot{x} = \dot{(x + y)}$.

Une application : le théorème de Frédéric Riesz.

Enonçons.

Théorème. Un espace normé réel (ou complexe) E dans lequel la boule unité (ouverte ou fermée) est précompacte est de dimension finie.

On peut résumer les relations entre compacité et dimension finie dans ce qui suit.

Proposition. Soit E un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) L'espace E est de dimension finie.
- (ii) Les parties compactes de E sont exactement les parties fermées bornées.
- (iii) L'espace E est localement compact.
- (iv) La boule unité fermée (resp. la sphère unité) de E est compacte.
- (v) La boule unité de E est précompacte.

On rappelle qu'une partie est dite précompacte si, pour tout $\epsilon > 0$, on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ϵ .

Dans l'implication de (i) vers (ii), il s'agit de voir que les parties fermées bornées sont compactes. Cela résulte de l'isomorphisme topologique avec l'espace produit \mathbf{R}^n , de la compacité d'un produit fini d'espaces compacts, et enfin de celle d'un segment.

Ensuite (ii) implique (iii) immédiatement. Puis (iii) implique (iv) car les boules fermées de rayon non nul sont homéomorphes par homothétie. On passe de la sphère à la boule par l'application continue de $[0, 1] \times S$ sur B' qui à (λ, x) associe λx .

Enfin (iv) implique (v) aussitôt. C'est la réciproque qu'il faut démontrer.

Démonstration.

Soit B la boule unité ouverte de E . Si elle est précompacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $1/2$, ce qui s'écrit

$$B \subset (x_1 + \frac{1}{2}B) \cup \dots \cup (x_n + \frac{1}{2}B) .$$

Désignons par F le sous-espace vectoriel engendré par les x_i . Il est de dimension finie, donc fermé. On peut donc se placer dans l'espace normé quotient $G = E/F$. On y a

$$\dot{B} \subset (\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\dot{B}) \cup \dots \cup (\dot{x}_n + \frac{1}{2}\dot{B}) \int = \frac{1}{2}\dot{B} .$$

Mais si la boule unité de G est incluse dans sa moitié, alors $\|y\| < 1$ y implique $\|y\| < 1/2$, puis $\|y\| = 0$. Ainsi $G = 0$ et $E = F$. QED.

Voir les exercices sur *l'espace projectif réel*, sur *les sous-espaces spectraux*.

Espaces de Baire

On commence par quelques définitions.

Définition. Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie de X est *rare* si son adhérence est d'intérieur vide; on dit qu'elle est *maigre* si elle est la réunion d'une suite de parties rares.

Si A est une partie ouverte de X , elle est maigre dans X si et seulement si elle est maigre dans elle-même, ce qui est une propriété topologique intrinsèque.

D'abord si A est maigre dans un sous-espace Y , réunion d'une suite F_n de parties fermées d'intérieur vide de Y , alors les adhérences $\overline{F_n}$ sont d'intérieur vide dans X ; si $\overline{F_n}$ contenait une partie ouverte non vide, cette partie rencontrerait F_n et l'intersection serait une partie ouverte non vide de Y . Ainsi A est maigre dans X .

Dans l'autre sens, si U est ouverte et maigre dans X , contenue dans la réunion d'une suite F_n de parties fermées d'intérieur vide de X , alors U est réunion des traces $F_n \cap U$, qui sont fermées et sans point intérieur dans U . Elle est donc maigre en elle-même.

Définition. Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace de Baire, s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes qui suivent.

- (i) Toute partie ouverte non vide est non maigre.
- (ii) L'intersection d'une suite de parties ouvertes denses est dense.
- (iii) L'intersection d'une suite de G_δ denses est un G_δ dense.

Un G_δ est une intersection dénombrable de parties ouvertes. L'abréviation vient des mots allemands "geöffnet" (ouvert) et "Durchschnitt" (intersection).

On rappelle qu'une partie A de X est dite dense si son adhérence est égale à X . Il revient au même de dire qu'elle rencontre toute partie ouverte non vide. Dans le cas métrique, cela signifie encore que tout point de X est limite d'une suite de A .

L'énoncé fondamental est alors le suivant.

Théorème (de Baire). Tout espace métrique complet est un espace de Baire.

On peut démontrer ce résultat en s'appuyant sur un jeu, en l'occurrence celui que Choquet a inventé et désigné sous le nom de jeu de Banach et Mazur. Un espace topologique X étant donné, les joueurs α et β choisissent à tour de rôle une partie ouverte non vide de X contenue dans celle choisie en dernier par l'autre joueur. C'est β qui commence. S'il existe pour α une stratégie assurant que toutes les parties choisies ont un point commun, alors X est un espace de Baire.

Montrons par exemple (ii); donnons-nous une suite (V_n) de parties ouvertes denses et une partie ouverte U non vide.

Le joueur β commence par choisir $V_0 \cap U$, qui est non vide par hypothèse. A la n -ème étape, si le joueur α a choisi U_n , il choisit $V_n \cap U_n$.

Grâce à la stratégie de α , on est assuré que les V_n et U auront un point commun, ce qu'il fallait démontrer.

Dans un espace métrique complet, le joueur α choisira des boules ouvertes dont la boule *fermée* correspondante est incluse dans la partie ouverte proposée par β . Pour assurer l'existence d'un point commun, il imposera que la suite (r_n) des rayons tende vers 0. Il lui suffira d'évoquer le théorème des parties fermées emboîtées. Ou il remarquera que la suite des centres constitue une suite de Cauchy puisque $d(x_n, x_{n+p}) \leq r_n$ pour tout p , qui converge donc vers un point x ; or $d(x_n, x) \leq r_n$ à la limite, de sorte que x est un point commun aux parties ouvertes considérées.

Maintenant, le joueur α peut gagner même s'il ne connaît pas le nombre de fois qu'il a déjà joué. Pour cela on regarde la partie ouverte V proposée par β . Si elle est de diamètre infini, il s'impose seulement $r \leq 1$. Sinon il s'impose de choisir r inférieur au quart du diamètre de V par exemple. Alors r_{n+1} est majoré par $r_n/2$ pour $n \geq 1$, puisque le diamètre d'une boule est majoré par le double de son rayon.

Voir les exercices sur le théorème de Baire, sur les points de continuité d'une limite simple, sur le théorème de Banach-Steinhaus.

Le théorème de Banach

Le théorème suivant est appelé classiquement “théorème d’homomorphisme de Banach”. Une dénomination plus scolaire en fait le “théorème de l’application ouverte”. Dans un langage plus savant on dit que tout épimorphisme est strict.

Théorème. Soient E, F des espaces normés complets et u une application linéaire continue de E sur F , surjective par conséquent. Alors on a les conséquences suivantes, qui sont facilement équivalentes et correspondent aux trois dénominations ci-dessus.

1) L’image de la boule unité de E contient une boule centrée en 0 de rayon non nul de F .

2) L’application u est ouverte : l’image par u d’une partie ouverte est ouverte.

3) En passant au quotient par $\ker u$ on obtient un isomorphisme topologique

$$E/\ker u \rightarrow F .$$

Autrement tout épimorphisme est un quotient; on dit qu’il est strict.

Noter que si u est linéaire continue bijective, c’est un isomorphisme topologique.

On démontre ce théorème en deux étapes. La première utilise la surjectivité et la complétion de F . Soit B'_E la boule unité fermée de E . On a

$$F \subset u\left(\bigcup_n n.B'_E\right) \subset \bigcup_n u(n.B'_E) \subset \bigcup_n \overline{n.u(B'_E)} .$$

Par le théorème de Baire l’un des $\overline{n.u(B'_E)}$ possède un point intérieur a . Désignons-le par C . Il contient une boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$.

Mais C est une partie convexe : l’image d’une partie convexe par une application linéaire est convexe; l’adhérence d’une partie convexe est convexe. Prenons en effet d’abord $y = u(x)$, $y' = u(x')$ dans l’image, où x, x' sont dans B'_E , et t dans $[0, 1]$; alors $(1-t)u(x) + tu(x') = u((1-t)x + tx')$. Prenons ensuite $y = \lim y_n$ et $y' = \lim y'_n$ dans l’adhérence où y_n, y'_n sont dans l’image; alors $(1-t)y + ty'$ est la limite de $(1-t)y_n + ty'_n$.

Par ailleurs C est symétrique : si x est dans C , alors $-x$ aussi. C’est pareil.

Partant de là on montre que C contient la boule de centre 0 et de rayon r . Voir l’exercice sur Banach-Steinhaus.

Etant donné $\epsilon > 0$, on sait que si y vérifie $\|y\| \leq r$ dans F , alors il existe x dans $n.B'_E$, donc tel que $\|x\| \leq n$, et z vérifiant $\|z\| \leq \epsilon$ dans F tels que

$$y = z + u(x) .$$

Pour partir de y tel que $\|y\| \leq 1$, faisons une homothétie de rapport $1/r$. On peut écrire la relation précédente avec $\|z\| \leq \epsilon/r$ et $\|x\| \leq n/r$.

De tout cela nous n’allons utiliser que le cas d’un $k = \epsilon/r < 1$; nous posons $K = n/r$. De plus nous oublions la complétion de F et la surjectivité de u .

Voir l’exercice sur le théorème de Banach (stabilité des épimorphismes stricts) pour la fin de la démonstration.

Dualité

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K . Le dual (algébrique) E' ou E^* de E est l'espace vectoriel des formes linéaires sur K , i.e. des applications linéaires de K dans le corps de base.

Si E est de dimension finie, son dual l'est aussi et il a la même dimension.

On a une application linéaire naturelle $E \rightarrow E''$ de E dans son bidual, celle qui à x dans E associe l'évaluation en x : la forme qui prend sur x' dans E' la valeur $x'(x)$.

Cette application est en général injective : si x dans E est non nul, on peut trouver x' dans E' tel que $x'(x) \neq 0$. Cependant il faut le théorème général de la base incomplète pour le montrer, donc l'axiome du choix général et le théorème de Zorn ou celui de Zermelo. On met x dans une base et on définit la forme x' en lui donnant la valeur 1 en x et la valeur 0 sur les autres vecteurs de base.

Si E est un espace *normé* réel ou complexe, son dual (topologique) E' ou E^* est l'espace *normé* des formes linéaires *continues* sur E , muni de la norme d'opérateur ($\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$).

En dimension finie dual algébrique et topologique coïncident. Sinon le même mot et la même notation cachent deux notions très différentes.

On a une encore application linéaire continue naturelle de E dans son bidual E'' . Nous verrons qu'elle est injective et qu'elle identifie E à un sous-espace normé de E'' .

Exemples.

1) Si H est un espace hilbertien, l'application $H \rightarrow H''$ est un isomorphisme : on sait déjà que H' s'identifie au conjugué de H .

2) Si $E = l^p$, pour $1 < p < +\infty$, alors l'application $E \rightarrow E''$ est un isomorphisme : on sait en effet que le dual de l^p s'identifie à l^q ; voir l'exercice correspondant.

3) Idem si, plus généralement $E = L^p(\mu)$ pour $1 < p < +\infty$; nous le montrerons.

Cela étant nous verrons les choses de façon plus symétrique. Etant données des espaces vectoriels E et F sur K , une **dualité** entre E et F est la donnée d'une forme bilinéaire $E \times F \rightarrow K$. On la notera $\langle x, y \rangle$.

Si E, F sont en dualité on a des **applications linéaires naturelles** $E \rightarrow F'$ et $F \rightarrow E'$. La première associe à x la forme sur F qui prend en y la valeur $\langle x, y \rangle$. C'est pareil pour la seconde.

Ces applications sont injectives, identifiant notamment E à un sous-espace de F' et F à un sous-espace de E' , lorsque la dualité est **séparante**, i.e. vérifie

1) Si x est $\neq 0$ dans E , il existe y dans F tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

2) Si y est $\neq 0$ dans F , il existe x dans E tel que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

Entre espaces normés une dualité sera **normée** si l'on a en plus

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Dans ce cas les applications naturelles précédentes prennent leurs valeurs dans les duaux normés.

Exemples.

1) Si H est un espace hilbertien réel, la donnée du produit scalaire le met en dualité avec lui-même; dans le cas complexe il est en dualité avec son conjugué. Cette dualité est topologique par Cauchy-Schwarz.

2) Les espaces l^p et l^q où p, q sont des exposants conjugués, vérifiant $1/p + 1/q = 1$, sont toujours en dualité pour $1 \leq p \leq +\infty$ sans restriction. Cette dualité est donnée par

$$\sum_n x_n y_n$$

grâce au théorème de Hölder qui montre en même temps que c'est une dualité topologique.

3) Idem pour L^p et L^q avec

$$\int f(x)g(x)d\mu(x) .$$

On notera que ces faits sont bien plus primitifs que la connaissance du dual. Pour H c'est la définition alors que le dual exige le théorème de représentation de Riesz. Pour l^p, l^q ou L^p, L^q , ce n'est que le théorème de Hölder alors que la détermination du dual est un exercice difficile.

Noter que E et son dual E' sont en dualité par

$$\langle x, x' \rangle = x'(x)$$

qui est topologique car $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$.

Mais la dualité est symétrique : si E, F sont en dualité, alors F, E le sont aussi.

Voir l'exercice sur la dualité dans les espaces l^p .

Dualité faible

Soient E, F des espaces vectoriels réels [ou complexes] en dualité.

Si M est une partie de E , l'**orthogonal** ou **annulateur** de M dans F est la partie M^\perp des éléments y de F tels que $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout x dans M ; on définit de même, par symétrie, l'orthogonal ou annulateur d'une partie de F .

De façon plus précise, si M est une partie de E , on définit le **polaire** de M dans F comme la partie M° des éléments y de F tels que

$$\langle x, y \rangle \leq 1 \quad [\text{ou } \Re \langle x, y \rangle \leq 1]$$

pour tout x dans M , et de même pour une partie de F . Si M est un sous-espace vectoriel, polaire et orthogonal ou annulateur coïncident; sinon le second est le polaire du sous-espace engendré.

Attention ! On notera de la même façon orthogonaux ou annulateurs et polaires de parties de E et de parties de F . Le risque de confusion est ailleurs. Il se trouve qu'un espace peut souvent être mis en dualité avec plusieurs autres. Il faut donc préciser *polaire dans F* ou *polaire pour la dualité entre E et F* systématiquement.

La **topologie faible** sur E pour la dualité avec F est

- la topologie induite par le produit \mathbf{R}^F [ou \mathbf{C}^F],
- la topologie de la convergence simple sur F ,
- la topologie définie par les semi-normes $x \mapsto |\langle x, y \rangle|$ où y parcourt F ,
- la topologie, invariante par translation, dont un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par les parties $V_{\epsilon, y_1, \dots, y_n}$ où $\epsilon > 0$, où y_1, \dots, y_n sont dans F et où $V_{\epsilon, y_1, \dots, y_n}$ est définie par les inégalités

$$|\langle x, y_1 \rangle| \leq \epsilon, \dots, |\langle x, y_n \rangle| \leq \epsilon.$$

- la topologie, invariante par translation, dont un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par les parties V_{y_1, \dots, y_n} où y_1, \dots, y_n sont dans F et où V_{y_1, \dots, y_n} est définie par les inégalités

$$\langle x, y_1 \rangle \leq 1, \dots, \langle x, y_n \rangle \leq 1 \quad [\text{ou } \Re \langle x, y_1 \rangle \leq 1, \dots, \Re \langle x, y_n \rangle \leq 1].$$

Elle est notée $\sigma(E, F)$.

En jargon anglo-américain on parle de *weak topology* et en langue allemande de *schwache Topologie*.

Cependant un usage courant veut qu'on se limite à la dualité entre E et son dual E' ; dans ce cas la topologie $\sigma(E, E')$ sur E est la *topologie affaiblie* ou *weak topology*; d'un autre côté la topologie $\sigma(E', E)$ sur E' est la *topologie faible* ou *weak* topology*. Nous ne choisissons pas ces conventions, préférant traiter la dualité de façon symétrique.

Voir les exercices sur le théorème de Hahn-Banach sur la dualité faible, sur la continuité faible d'une transposée, sur la non-métrisabilité de la topologie faible.

Un mot sur les distributions

On part pratiquement toujours de l'espace \mathcal{D} . Même si cet espace n'est pas incontournable, il est commode d'y référer. Sa légitimité tient au fait qu'il est dense dans tous les bons espaces, ou plutôt qu'il est en dualité séparante avec tout, ce qui permet de travailler dans le dual algébrique de \mathcal{D} . Sur l'une ou l'autre forme, cela vient de l'existence d'une unité approchée dans \mathcal{D} . Il faudrait peut-être commencer par noter ce fait avant d'aller plus loin si l'on tient vraiment à partir de là.

Cependant mieux vaut se garder de mettre sur \mathcal{D} , qui est une limite inductive de limites projectives, une quelconque structure. Sa topologie localement convexe est grotesque. A la rigueur on peut y caractériser sans trop de mal les parties bornées. Cependant son dual \mathcal{D}' , qui est l'espace des formes linéaires bornées, sera muni naturellement de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées. Or cette topologie n'est pas métrisable. Travailler avec la topologie naturelle, comme travailler avec la topologie faible $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ qui ne l'est pas non plus, n'est convenable qu'en parlant de suites généralisées ou de filtre; à défaut mieux vaut s'abstenir.

Une tradition assez répandue consiste à caractériser les formes T de l'espace \mathcal{D}' par la propriété suivante : pour toute partie compacte K , on peut trouver un ordre $n = n_K$ et une constante $C = C_K$ pour lesquels

$$|T(\phi)| \leq C(\|\phi\|_K + \dots + \|\phi^{(n)}\|_K)$$

si ϕ est à support dans K . Alors il ne coûte pas plus cher d'introduire les parties bornées de \mathcal{D}' : ce sont les parties B pour lesquelles on peut trouver des n_K et C_K qui valent pour toutes les T de B .

L'espace \mathcal{D}' dispose ainsi d'une structure naturelle, laquelle n'est pas de type dénombrable. Cependant cela a moins d'importance qu'avec une topologie.

La convergence naturelle des suites dans \mathcal{D}' est simple à décrire : une suite T_n tend vers zéro si l'on peut trouver une partie bornée B et une suite ϵ_n tendant vers 0 de nombres positifs de façon que $T_n \in \epsilon_n B$. De même caractérise-t-on les suites de Cauchy par $T_{n+p} - T_n \in \epsilon_n B$. Et on montre facilement que \mathcal{D}' est complet.

On noterait aussi que de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente, en application directe du théorème d'Ascoli.

Maintenant on peut identifier, grâce au théorème de Banach-Steinhaus, les suites convergentes de \mathcal{D} avec celles qui convergent faiblement, même si cela n'a pas une utilité flagrante.

Surtout c'est pour la structure naturelle de \mathcal{D}' qu'il faut montrer que la dérivation est continue, ou plutôt bornée ici. La démonstration est immédiate : si T varie dans la partie définie par les n_K et C_K , alors sa dérivée varie dans celle obtenue en remplaçant n_K par $n_K + 1$.

Quelques développements

Limites

Ce chapitre n'est qu'une suite répétitive de trivialisés destinée à mettre de l'ordre. La notion de limite est abordée très tôt dans l'enseignement français. On commence par les limites de suites en première scientifique, poursuit par les limites en un point en terminale. Cependant, c'est plutôt le symbole \lim , dont nous verrons d'ailleurs qu'il vaut mieux largement se passer, que l'on introduit à défaut du concept lui-même. En première année d'université, on est censé corriger le tir, insistant sur une définition rigoureuse des limites, dans l'esprit de l'ouvrage de Hardy par exemple. Ce n'est pas partout réalisé pourtant. Ensuite on considère un peu vite que toutes les notions ont été acquises.

Suites convergentes.

La définition la plus concise que l'on puisse donner d'une suite convergente est la suivante. Commençons par le cas d'une suite de nombres réels.

Définition 1. On dit que la suite (x_n) de nombres réels converge vers le nombre réel l , ou admet la limite réelle l , si, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des indices n pour lesquels $|x_n - l| \geq \epsilon$ est fini.

Autrement dit, un $\epsilon > 0$ étant donné, tous les x_n sauf un nombre fini sont distants de moins de ϵ de l .

Dans le cas d'un espace métrique X , en particulier dans le cas d'un espace normé, la définition est pratiquement la même.

Définition 1bis. On dit que la suite (x_n) de X vers l'élément l de X , ou admet la limite l dans X , si, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des indices n pour lesquels $d(l, x_n) \geq \epsilon$ est fini.

Elle s'interprète de la même façon.

Maintenant il est bien connu que la notion de limite est une notion topologique. Cela signifie qu'on peut l'exprimer à partir des seules parties ouvertes ou des seuls voisinages. Dans ce qui suit X peut être un espace métrique ou plus généralement un espace topologique.

Définition 1ter. On dit que la suite (x_n) de X vers l'élément l de X , ou admet la limite l dans X , si, pour tout voisinage V de l , l'ensemble des indices n pour lesquels x_n n'est pas dans V est fini.

Maintenant, dire qu'une partie de \mathbf{N} est finie revient à dire qu'on peut l'inclure dans un intervalle $[0, N]$. Dire que les seules exceptions à $|x_n - l| \geq \epsilon$ ou $d(l, x_n) \geq \epsilon$ sont dans cette partie revient à dire que x_n a la propriété dès que $n > N$. On peut donc transformer la définition comme suit.

Définition 2. On dit que la suite (x_n) de nombres réels converge vers le nombre réel l , ou admet la limite réelle l , si, étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver un rang N tel que $n > N$ implique $|x_n - l| < \epsilon$.

On peut encore terminer l'énoncé de la propriété en disant : on peut trouver un rang N tel que x_n soit dans l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[$ dès que $n > N$.

De même.

Définition 2bis. On dit que la suite (x_n) de X vers l'élément l de X , ou admet pour limite l dans X , si, étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver un rang N tel que $n > N$ implique $d(l, x_n) < \epsilon$.

On peut encore terminer l'énoncé de la propriété en disant : on peut trouver un rang N tel que x_n soit dans la boule $B(l, \epsilon)$ dès que $n > N$.

Ou bien ceci.

Définition 2ter. On dit que la suite (x_n) de X vers l'élément l de X , ou admet pour limite l dans X , si, étant donné voisinage V de x , on peut trouver un rang N tel que $n > N$ implique $x_n \in V$.

On peut encore terminer l'énoncé de la propriété en disant : on peut trouver un rang N tel que V contienne x_n dès que $n > N$.

Cette nouvelle famille de présentations est un peu moins concise, mais il est un peu plus facile de lui donner du sens, ce qui est malgré tout très important, d'une part bien sûr par principe et d'autre part pour se faire une image du concept.

Pour autant la tâche n'est pas si simple. Le mot "limite" vient du latin *limes* qui désigne d'abord le sentier qui passe entre deux champs, puis, par extension une bordure, un rempart, un chemin, voire une limite ou une frontière. Par exemple le *limes* germano-rhétique désignait la frontière nord-est de l'empire romain qui était soumise aux attaques "barbares". On peut comprendre le choix du mot dans le cas d'une suite (x_n) monotone, par exemple croissante. La limite l sépare les nombres réels en deux catégories (en plus de la limite elle-même) : les nombres $x < l$ ont la propriété d'être inférieurs à l'un des termes de la suite, même inférieurs à une infinité d'entre eux par conséquent, de finir par être dépassés en quelque sorte; les nombre $x > l$ ont celle d'être supérieurs à tous, de ne jamais être dépassés si l'on veut. La limite est ce sentier qui sépare les uns des autres.

Le cas d'une suite quelconque est bien plus mystérieux. Voici en effet comment traduire la propriété, dans l'esprit de l'ouvrage de Hardy cité.

Aussi petite que soit la précision $\epsilon > 0$ que l'on impose pour mesurer la proximité à l , on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite seront proches de l à la précision ϵ .

Cependant on se demande toujours pourquoi l'on cherche un rang N . D'ailleurs pourquoi faut-il considérer des suites? En réalité ce sont plutôt de séries que l'on a besoin, pour réaliser des sommes infinies comme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

par exemple. Dans ce cas la suite des sommes partielles est croissante, même strictement. La limite est cette valeur inaccessible de séparation. Comment s'y prendre avec des séries à termes quelconques, ou à valeurs vectorielles? Quand il y a convergence absolue, on peut toujours décomposer en différence de deux séries positives, travailler composante par composante en dimension finie. Restent les autres cas.

Là on peut penser à l'image suivante. Puisque la somme complète est peut-être inaccessible, au moins puis-je espérer l'approcher par une somme partielle en choisissant un rang convenable. Voilà d'où vient le fameux rang.

Maintenant on comprendra mieux quand on aura rattaché le concept de limite à un autre, qui est celui de la continuité.

Continuité en un point.

Commençons par le cas d'une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle I de la droite numérique.

Définition 3. On dit que la fonction f est continue au point a de I , si, étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que, pour x dans I , l'inégalité $|x - a| < \eta$ implique l'inégalité $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

On peut encore terminer l'énoncé de la propriété en disant : on peut trouver $\eta > 0$ tel que $f(I \cap]a, \eta]) \subset]f(a), \epsilon[$.

De la même, pour une fonction définie sur un espace métrique X et à valeurs dans un espace métrique Y , on écrira ceci.

Définition 3bis. On dit que la fonction f est continue au point a de X , si, étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que l'inégalité $d(a, x) < \eta$ implique l'inégalité $d(f(a), f(x)) < \epsilon$.

On peut encore terminer l'énoncé de la propriété en disant : on peut trouver $\eta > 0$ tel que $f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \epsilon)$.

Comme pour les limites de suite, on peut faire apparaître le fait que la continuité en un point est une propriété topologique en écrivant ceci, valable pour un espace métrique ou, plus généralement, un espace topologique.

Définition 3ter. On dit que la fonction f est continue au point a de X , si, pour tout voisinage W de $f(a)$, la partie $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a .

La traduction littérale de la fin aurait été : étant donné un voisinage W de $f(a)$, on peut trouver un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W$. Cependant cette dernière inclusion équivaut à $V \subset f^{-1}(W)$ car $x \in f^{-1}(W)$ équivaut à $f(x) \in W$, par définition de l'image réciproque. Or une partie qui contient un voisinage d'un point n'est jamais qu'un voisinage de ce point.

Comment faut-il interpréter la notion de continuité? Ce n'est pas si simple. Pour une fonction réelle monotone définie sur un intervalle, la continuité en a signifie que f "ne fait pas de saut" en a , ni à gauche ni à droite. Supposons f croissante par exemple. Cette absence de saut signifie précisément qu'on ne peut pas trouver $\epsilon > 0$ tel que $f(x) \geq f(a) + \epsilon$ pour tout $x > a$ ou que $f(x) \leq f(a) - \epsilon$ pour tout $x < a$. Supposons en effet la propriété vérifiée; on pourra trouver $b > a$, de la forme $a + \eta'$ où $\eta' > 0$ tel que $f(b) < f(a) + \epsilon$. La dernière relation vaut encore pour $a \leq x \leq b = a + \eta'$. On trouve de même $\eta'' > 0$ à gauche de a et on prend pour η le plus petit de η' et η'' .

Dans l'autre sens l'implication est valide sans hypothèse, mais dans le sens que nous avons considéré, la monotonie est essentielle. Par exemple, la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ transforme tout intervalle en intervalle; elle ne présente pas de saut. Pourtant elle n'est pas continue en 0.

Que signifie alors la continuité pour une fonction non monotone? Ou une fonction de plusieurs variables par exemple? Une image possible est la suivante : "petite cause, petit effet" : si je change un peu x , je ne change pas beaucoup $f(x)$. C'est une propriété de stabilité : si je me trompe un peu sur x , je ne commets pas une grosse erreur sur $f(x)$. Songer au cas de la fonction f de notre exemple en 0. Si je remplace 0 par un petit $x > 0$ par exemple, avec $\sin(1/x)$ je peux m'attendre à n'importe quelle valeur dans $[-1, 1]$, en particulier à -1 ou 1 , ce qui correspond à une erreur incoercible.

Reprenons les choses dans le sens positif. Pour une fonction continue, aussi petite soit la précision $\epsilon > 0$ que l'on impose pour la proximité de $f(x)$ à $f(a)$, on peut trouver un $\eta > 0$ tel que la proximité de x à a à la précision ϵ implique celle de $f(x)$ à $f(a)$ à la précision ϵ . Donc, une fois quantifiée l'erreur ϵ possible sur $f(x)$, je peux me permettre une marge sur x , peut-être extrêmement petite, beaucoup plus petite que ϵ éventuellement, mais non nulle, pour rester dans ce que je me suis autorisé pour $f(x)$.

Limite en un point.

Prenons le cas d'une fonction définie sur un intervalle $[-a, a]$ privé de 0 à valeur dans un espace quelconque, où a est > 0 . Sa limite en 0, si on peut lui en donner une, sera sa "vraie valeur", celle qui lui permettra d'être continue en 0.

Cependant on ne veut pas exclure le cas où f est déjà définie sur $[-a, a]$, pour pouvoir faire découler, dans l'autre sens la notion de continuité de celle de limite. La valeur limite proposée devra alors aussi tenir compte de celle déjà donnée.

Cela conduit à la définition suivante, que nous déclinons comme précédemment.

Définition 4. Soient une fonction réelle f définie sur une partie A de la droite et un point a adhérent à A . On dit que $f(x)$ tend vers la valeur l , ou admet la valeur limite l , quand x tend vers a en restant dans A , si, étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que, pour x dans A , l'inégalité $|x - a| < \eta$ implique l'inégalité $|f(x) - l| < \epsilon$.

On peut encore terminer l'énoncé de la propriété en disant : on peut trouver $\eta > 0$ tel que $f(I \cap]a, \eta]) \subset]l, \epsilon[$.

Définition 4bis. Soit une fonction f à valeurs dans l'espace métrique Y définie sur une partie A de l'espace métrique X et soit un point a adhérent à A . On dit que $f(x)$ tend vers la valeur l , ou admet la valeur limite l , quand x tend vers a en restant dans A , si, étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que, pour x dans A , l'inégalité $d(a, x) < \eta$ implique l'inégalité $d(l, f(x)) < \epsilon$.

On peut encore terminer l'énoncé de la propriété en disant : on peut trouver $\eta > 0$ tel que $f(B(a, \eta)) \subset B(l, \epsilon)$.

Définition 4ter. Soit une fonction f à valeurs dans l'espace topologique Y définie sur une partie A de l'espace topologique X et soit un point a adhérent à A . On dit que $f(x)$ tend vers la valeur l , ou admet la valeur limite l , quand x tend vers a en restant dans A , si, pour tout voisinage V de l , l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est la trace sur A d'un voisinage de a .

Comme pour la continuité la traduction littérale aurait été : on peut trouver un voisinage U de a tel que $f(A \cap U) \subset V$.

On notera qu'une limite l adhère nécessairement à $f(A)$.

Quand on ne précise pas "en restant dans A ", il est entendu que $A = X$. Maintenant on peut préciser "en restant dans A et différent de a "; cela signifie qu'il faut remplacer A par la partie B obtenue en retirant le point a . Cependant il convient alors que a adhère à B , ce qui signifie qu'il est un point d'accumulation de A .

Pourquoi impose-t-on que a soit adhérent à A ? Dans le cas contraire a serait un point isolé dans $A \cup \{a\}$, ce qui signifie que l'ensemble réduit à a serait ouvert dans cet espace, et on sait bien que la valeur en a pourrait être choisie arbitrairement avec l'assurance pour f d'y être continue. On impose donc cette condition pour espérer l'unicité de la limite.

Soient l et l' deux valeurs limites pour f . Considérons des voisinages respectifs V et V' de ces points; on peut trouver des voisinages U et U' de a tels que $f(A \cap U) \subset V$ et $f(A \cap U') \subset V'$; prenant leur intersection on peut même supposer $U = U'$. Alors $f(A \cap U) \subset V \cap V'$.

Si V et V' sont disjoints, alors A et U le sont; ainsi la partie réduite à a est un voisinage ce point dans $A \cup \{a\}$, ce qui veut dire que a est isolé. Cela conduit à la définition ci-dessous.

Définition. On dit que l'espace topologique X est séparé, ou qu'il vérifie la propriété de Hausdorff, si deux points distincts admettent des voisinages disjoints.

Proposition. Pour une fonction à valeurs dans un espace séparé, il y a unicité de la limite.

C'est ce que nous venons d'établir.

Quand l'espace Y est séparé et a dans A , la seule limite l possible est $f(a)$: c'est le seul point à adhérer à la partie réduite à $f(a)$. Par suite l'existence d'une limite équivaut à la continuité en a de la restriction de f en a .

La propriété est fautive si Y n'est pas séparé : considérer le cas où les seules parties ouvertes de Y sont \emptyset , Y et une partie V qui contient k sans contenir l , et prendre pour f la fonction de $\overline{\mathbf{N}}$ dans Y qui vaut l sauf en $a = \infty$ où elle vaut k .

Continuité.

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite *continue* si elle l'est en tout point de X . Les versions 4 et 4bis ne donnent pas lieu à une expression particulière de la continuité en tout point. En revanche la version 4ter se traduit par une énonciation nouvelle qu'on trouvera partout.

Proposition. Soit f une fonction définie sur l'espace topologique X et à valeurs dans l'espace topologique Y . Les propriétés qui suivent sont équivalentes :

- (i) La fonction f est continue.
- (ii) L'image réciproque par f de toute partie ouverte de Y est ouverte.
- (iii) L'image réciproque par f de toute partie fermée de Y est fermée.
- (iv) Pour toute partie A on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Composition.

Les limites et la continuité se composent toujours : on a l'énoncé immédiat suivant.

Proposition. Soient X, Y, Z sont des espaces topologiques et A, B des parties respectives de X, Y ; si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow Z$ admettent respectivement les limites l en un point a de \overline{A} et m en l , alors $g \circ f$ admet la limite m en a .

C'est notamment pour éviter les obstacles à la composition que l'on n'a pas exclu a priori le cas où a serait dans A .

On peut dans certains cas exprimer limites et continuité à l'aide de suites.

Proposition. On suppose l'espace X métrisable. La fonction f admet la limite l quand x tend vers a en restant dans A si et seulement si $f(x_n)$ tend vers l pour toute suite x_n de A qui tend vers a .

C'est classique : on raisonne par l'absurde.

Analyse en dimension finie : exponentielle de matrice

Dans toute la suite le corps de base est le corps \mathbf{C} celui des nombres complexes. On sait qu'une matrice carrée M d'ordre n peut être identifiée à un endomorphisme de \mathbf{C}^n . On lui associe précisément celui qui transforme les vecteurs de la base canonique en les vecteurs colonne de la matrice. Par conséquent, plutôt qu'une matrice carrée, on se donnera plus généralement un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbf{C} .

Nous pouvons énoncer. On note 1_E l'endomorphisme identique de E .

Théorème et définition. Il existe une unique application dérivable x de \mathbf{R} dans l'espace $L(E)$ des endomorphismes de E , dont les valeurs sont des polynômes en u et qui vérifie

$$\frac{dx}{dt} = u.x$$

et $x(0) = 1_E$. Sa valeur pour $t = 1$ est, par définition, l'exponentielle $\exp(u)$ de u .

Si nous connaissons le théorème de Cauchy-Lipschitz nous pouvons omettre la condition sur les valeurs de x pour l'unicité. Le fait que l'équation soit linéaire assure en plus l'existence d'une solution globale.

La forme indiquée permet de démontrer l'unicité de façon élémentaire. Si x et y sont deux solutions de l'équation complétée par la condition initiale, il vient

$$\frac{d}{dt}(x(t)y(-t)) = u.x.y - x.u.y = 0$$

puisque y (entre autres) commute avec u . Par suite $x(t)y(-t)$ est constant, égale à sa valeur en 0 qui est 1_E .

On obtient aussi le fait que les valeurs sont nécessairement dans le groupe $GL(E)$ des automorphismes de E .

De plus

$$x(t+u) = x(t)x(u)$$

parce que $x(u)^{-1}x(t+u)$ vérifie l'équation et la condition initiale. On a donc un homomorphisme du groupe additif \mathbf{R} dans le groupe $GL(E)$.

Admettons que l'on ait construit une solution x . On obtient

$$\frac{d}{dt}x(\tau t) = \tau u.x(\tau t)$$

de sorte que $x(\tau) = \exp(\tau u)$.

Si maintenant u et v sont des endomorphismes qui commutent, on vérifie que

$$\exp(u+v) = \exp(u).\exp(v) .$$

En effet $\exp(v)^{-1}.\exp(tu+v)$ vérifie l'équation et la condition initiale. Pour cette raison on emploie aussi la notation e^u pour $\exp u$.

Maintenant la fonction e^{tu} est de classe \mathcal{C}^∞ et le reste de Taylor donné par

$$\frac{u^k}{k!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} e^{tu} dt$$

est majoré par

$$\frac{\|u\|^k}{k!} \int_0^1 \|e^{tu}\| dt$$

si l'on a pris une norme sur E et la norme d'opérateur correspondante sur $L(E)$. Ce reste tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ de sorte que

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \dots + \frac{u^k}{k!} + \dots$$

dans $L(E)$.

C'est la construction de l'exponentielle qui va maintenant nous occuper.

C-algèbres.

Une algèbre possède une structure d'anneau avec une multiplication externe qui en fait un espace vectoriel. Nous ne considérerons que des algèbres unitaires, i.e. possédant un élément unité, lequel sera noté 1. Nous identifierons le scalaire s et l'élément $s.1$, ce qui revient à considérer le corps comme inclus dans l'algèbre. Une algèbre unitaire est ainsi simplement un anneau unitaire qui contient \mathbf{C} .

Nous considérons la sous-algèbre A engendrée par u dans l'algèbre $L(E)$ des endomorphismes de E . Elle est constituée des endomorphismes $p(u)$, où p parcourt les polynômes de $\mathbf{C}[X]$.

C'est dans cette algèbre que nous allons travailler. Elle est évidemment commutative et de dimension finie comme espace vectoriel. Le morphisme surjectif d'algèbres

$$\mathbf{C}[X] \rightarrow A$$

qui à X associe u a donc un noyau non nul, qui est un idéal de $\mathbf{C}[X]$, lequel est engendré (par la division euclidienne) par un polynôme unitaire non constant D . Ce dernier s'appelle le *polynôme minimal* de u .

L'homomorphisme

$$\mathbf{C}[X]/D \rightarrow A$$

obtenu par passage au quotient est un isomorphisme d'algèbres. Par conséquent nous pouvons commencer par oublier E et l'endomorphisme u et travailler dans l'algèbre $\mathbf{C}[X]/D$ des classes modulo D de polynômes.

Spectre.

Le spectre d'un élément a d'une algèbre est l'ensemble des scalaires s tels que $a - s$ ne soit pas inversible. En particulier le spectre d'un opérateur u de E est son spectre dans l'algèbre $L(E)$.

Par le théorème fondamental de l'algèbre, on écrit

$$D = \prod_{s \in S} (X - s)^{m_s}$$

où S est l'ensemble des racines de D et où m_s est la multiplicité de la racine s . Pour un élément s de S , le facteur $X - s$ apparaît comme un diviseur de 0 modulo D et il n'est donc pas inversible dans $\mathbf{C}[X]/D$. Inversement si s n'est pas dans S , alors $D(s) \neq 0$; comme $D - D(s) = (X - s)Q$ où Q est un polynôme, il vient $1 = (X - s) \cdot \frac{Q}{-D(s)}$ modulo D , de sorte que $X - s$ est inversible dans $\mathbf{C}[X]/D$. Ainsi l'ensemble des racines de S est-il exactement le spectre de X dans $\mathbf{C}[X]/D$.

Le spectre de l'élément X est donc un ensemble fini non vide. C'est le privilège de la dimension finie. Notre souci, à partir d'ici, est de disposer d'une propriété de décomposition qui permette d'isoler le contribution de chaque élément du spectre.

Le théorème chinois.

Ceux qui n'aiment pas spécialement les chinoiseries et les isomorphismes canoniques peuvent sauter directement au paragraphe suivant.

On a une application naturelle

$$\mathbf{C}[X]/D \rightarrow \prod_{s \in S} \mathbf{C}[X]/(X - s)^{m_s}$$

obtenue, à partir de l'application diagonale de $\mathbf{C}[X]$ dans $\mathbf{C}[X]^S$ qui à P associe la famille constante égale à P , en composant à droite avec les projections qui envoient le facteur $\mathbf{C}[X]$ de rang s dans $\mathbf{C}[X]/(X - s)^{m_s}$, puis en passant au quotient par D . C'est un isomorphisme parce que les polynômes $(X - s)^{m_s}$ sont premiers entre eux.

Ainsi a-t-on décomposé l'algèbre donnée en un produit d'algèbres. Dans ce produit apparaissent des éléments idempotents: on notera I_s celui dont la projection de rang s est 1 et dont les autres sont nulles. Clairement

$$1 = \sum_{s \in S} I_s$$

dans le produit.

Cherchons à expliciter l'élément I_s dans l'algèbre $\mathbf{C}[X]/D$. Nous cherchons P_s ayant les propriétés suivantes : il est congru à 1 modulo $(X - s)^{m_s}$ et à 0 modulo les autres facteurs $(X - r)^{m_r}$. La seconde condition signifie qu'il est divisible par le produit

$$D_s = \frac{D}{(X - s)^{m_s}} = \prod_{r \neq s} (X - r)^{m_r}$$

de ces autres facteurs, donc de la forme $P_s = Q_s D_s$. La première veut que $Q_s D_s = 1$ modulo $(X - s)^{m_s}$, autrement dit que Q_s inverse D_s modulo $(X - s)^{m_s}$. Or travailler modulo $(X - s)^{m_s}$ veut dire qu'on prend un développement limité en s d'ordre $m_s - 1$ (au moins). La réponse est donc

$$Q_s = \text{dl}_s\left(\frac{1}{D_s}\right)$$

où il est entendu que le développement limité dl_s en s est pris à l'ordre $m_s - 1$.

Finalement

$$P_s = dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right)D_s$$

et

$$1 = \sum_{s \in S} dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right)D_s .$$

La décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Le problème dont nous venons de parler se rencontre déjà à l'occasion de la décomposition en éléments simples d'une fraction comme $1/D$ — ou N/D plus généralement. Si l'on cherche à faire apparaître la partie singulière en s , on écrira

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{(X-s)^{m_s}} \frac{1}{D_s}$$

où D_s a été défini comme plus haut et on fera un développement limité de $1/D_s$ en s à l'ordre $m_s - 1$ au moins.

En fait on peut écrire de façon unique

$$\frac{1}{D} = \frac{Q}{(X-s)^{m_s}} + \frac{R}{D_s}$$

où Q, R sont des polynômes et où le degré de Q est strictement inférieur à m_s .

En multipliant par D la première égalité, on obtient

$$1 = Q.D_s + (X-s)^{m_s}R$$

et la recherche de Q est celle d'un inverse de D_s modulo $(X-s)^{m_s}$, que l'on trouve bien sûr avec le développement limité $dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right)$ à l'ordre $m_s - 1$ de $1/D_s$.

La formule de Taylor-Gauss.

Des calculs du théorème chinois ou des motivations provenant de la décomposition en éléments simples qui précèdent, nous ne retenons que la définition de D_s et l'idée de considérer le développement limité

$$dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right)$$

de $dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right)$ à l'ordre $m_s - 1$ en s . Nous avons

$$(1) \quad 1 = dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right)D_s \quad \text{mod} \quad (X-s)^{m_s}$$

puis

$$(2) \quad 1 = \sum_{s \in S} dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right)D_s \quad \text{dans} \quad \mathbf{C}[X]/D$$

que l'on transforme en

$$(1') \quad f = dl_s(f)dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right)D_s = dl_s\left(\frac{f}{D_s}\right)D_s \quad \text{mod} \quad (X-s)^{m_s}$$

et

$$(2') \quad f = \sum_{s \in S} dl_s(f)dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right)D_s = \sum_{s \in S} dl_s\left(\frac{f}{D_s}\right)D_s \quad \text{dans} \quad \mathbf{C}[X]/D$$

pour tout polynôme f plus généralement.

La relation (1) est claire. La relation (2) est vraie modulo tous les $(X-s)^{m_s}$ puisque D_r est divisible par ce facteur pour $r \neq s$, donc modulo D . Les relations (1') et (2') s'obtiennent en multipliant par f les précédentes, lesquelles apparaissent comme des cas particuliers.

On remarquera que l'ordre auquel il faut calculer le développement limité de $1/D_s$ est évident sur les formules (2) et (2') elles-mêmes : on néglige $(X-s)^{m_s}$ parce que $(X-s)^{m_s}D_s = D$ est nul dans $\mathbf{C}[X]/D$. Mais rien n'interdit d'aller au delà.

Le second membre de (1) définit pour chaque s un élément P_s et on vérifie que $P_s P_r$ est divisible par D , donc nul dans $\mathbf{C}[X]/D$ si $r \neq s$. Par suite $P_s = P_s \cdot 1 = P_s^2$ de sorte que (2) permet de retrouver une décomposition de 1 en éléments idempotents orthogonaux.

Cas d'un endomorphisme.

La même relation (2) fournit une décomposition de l'identité en projecteurs orthogonaux $p_s = P_s(u)$, appelés projecteurs spectraux, quand on l'applique à un endomorphisme u . Ainsi

$$1 = \sum_{s \in S} p_s .$$

Maintenant la relation (2'), avec $f = X$, appliquée encore à u donne la décomposition en parties semi-simple et nilpotente

$$u = \sum_{s \in S} s.p_s + n_s$$

où la partie nilpotente $n_s = N_s(u)$ s'obtient par

$$N_s = (X-s)dl_{m_s-2}\left(\frac{1}{D_s}\right)D_s$$

et où sa puissance $n_s^k = N_s^k(u)$ s'obtient par

$$N_s^k = (X-s)^k dl_{m_s-k-1}\left(\frac{1}{D_s}\right)D_s$$

plus généralement, avec $n_s^{m_s} = 0$ évidemment.

Calcul fonctionnel.

Dans la formule

$$(2') \quad f = \sum_{s \in S} dl_s(f) dl_s\left(\frac{1}{D_s}\right) D_s \quad \text{dans} \quad \mathbf{C}[X]/D$$

précédente, il suffit d'être capable de donner un sens à $dl_s(f)$ en tout point s du spectre, pour donner un sens au second membre. Précisément il suffit de se donner en chaque s un développement limité abstrait d'ordre $m_s - 1$; c'est ce qu'on appelle un *jet* d'ordre $m_s - 1$.

Quand on applique la formule à un endomorphisme u , on définit l'endomorphisme que nous noterons $f[u]$.

Exponentielle d'un endomorphisme.

C'est ici que le calcul fonctionnel précédent trouve sa place. On peut définir e^u comme $f[u]$ en prenant pour f , en chaque point s du spectre, le développement limité à l'ordre $m_s - 1$ en s tiré de la série formelle

$$\exp(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \dots + \frac{X^k}{k!} + \dots$$

et obtenu en la développant en $X - s$ selon

$$\exp(X) = \exp(s + X - s) = e^s + e^s \frac{X - s}{1!} + \dots + e^s \frac{(X - s)^k}{k!} + \dots$$

Il reste à voir que e^{tu} est solution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{dx}{dt} = u \circ x$$

avec la condition initiale

$$x(0) = 1_E .$$

On l'obtient aussi en dérivant en t le développement limité en s à l'ordre $m_s - 1$, ce qui revient à dériver une somme partielle de la série formelle $\exp(tX)$. Or la dérivée en t de cette dernière série vaut $X \cdot \exp(tX)$, de sorte que la dérivée en t de e^{tu} est $u \cdot e^{tu}$.

Si l'on veut absolument expliciter, on dérivera en t une somme

$$e^s + e^s \frac{tX - s}{1!} + \dots + e^s \frac{(tX - s)^k}{k!}$$

où k est assez grand.

Narration sur les projecteurs orthogonaux de rang 1

Le point de départ est le choix d'une distance sur l'espace projectif réel \mathbf{P}_n . Une fois \mathbf{R}^{n+1} muni de sa structure euclidienne on peut identifier une droite vectorielle au projecteur orthogonal sur elle-même, ce qui identifie \mathbf{P}_n au sous-espace de l'espace des opérateurs sur \mathbf{R}^{n+1} constitué des projecteurs orthogonaux de rang exactement 1.

On dispose donc d'une distance, celle qui dérive de la norme d'opérateur. Maintenant si l'on se donne des vecteurs x, y choisis unitaires, dans un espace euclidien général et si p_x, p_y sont les projecteurs orthogonaux sur les droites $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y$, que peut-on dire de

$$\|p_x - p_y\| ?$$

On remarque immédiatement que tout se passe dans un plan vectoriel contenant x et y . Si z est un point de l'espace, pour obtenir $p_x(z)$ aussi bien que $p_y(z)$, on peut commencer par projeter z orthogonalement sur ce plan, ce qui n'augmente pas la norme. On a donc affaire à un problème de géométrie plane.

Dans la suite on désignera par α l'angle aigu des droites $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y$. Ce n'est pas indispensable mais on peut toujours écarter le cas trivial où $\alpha = 0$ et étudier à part celui où α est droit, auquel cas $p_y - p_x$ est la symétrie par rapport à \mathbf{R}_x .

1. Avec la culture du collège.

Soit z un vecteur unitaire quelconque du plan et p, q ses projections orthogonales sur $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y$. Les points p, q sont par ailleurs sur le cercle de diamètre $0z$; soit C son centre. L'angle au centre pCq , qui est un angle de demi-droites, vaut le double de l'angle inscrit $p0q$, donc 2α . Ainsi la corde pq du petit cercle est-elle donnée par

$$\|p - q\| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha/2) = \sin \alpha .$$

Comme $\|x - y\| = 2 \sin \alpha/2$ et $\|x + y\| = 2 \cos(\alpha/2)$, il vient aussi

$$\|p - q\| = \frac{1}{2} \|x - y\| \|x + y\| .$$

Dans tous les cas c'est la norme d'opérateur cherchée.

2. Avec la culture du lycée.

Considérons une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) du plan telle que x et y soient symétriques par rapport à $\mathbf{R}_{\vec{i}}$. Les coordonnées de x, y sont données par

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} .$$

La projection du point z sur la droite du vecteur unitaire u étant $\langle u, z \rangle u$, on a

$$p_x(z) = (x \cos \theta - y \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} , \quad p_y(z) = (x \cos \theta + y \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

d'où

$$p_y(z) - p_x(z) = \begin{pmatrix} (x \cos \theta + y \sin \theta) \cos \theta - (x \cos \theta - y \sin \theta) \cos \theta \\ (x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \theta - (x \cos \theta - y \sin \theta)(-\sin \theta) \end{pmatrix}$$

ou encore

$$p_y(z) - p_x(z) = 2 \sin \theta \cos \theta \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} .$$

Ainsi $p_y - p_x$ est la similitude indirecte composée de la symétrie par rapport à la bissectrice principale de \vec{i}, \vec{j} et de l'homothétie de rapport $\sin(2\theta)$ qu'on peut toujours choisir positif.

3. Avec un peu plus de culture.

Soient s_x, s_y les symétries par rapport aux droites $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y$. On a

$$p_x = \frac{I + s_x}{2} \quad , \quad p_y = \frac{I + s_y}{2}$$

et donc

$$p_x - p_y = \frac{1}{2}(s_x - s_y) .$$

En particulier

$$\|p_x - p_y\| = \frac{1}{2}\|s_y s_x - I\|$$

en composant avec s_y qui est une isométrie. Or $r = s_y s_x$ est la rotation d'angle 2α . Si x est unitaire $r(x) - x$ vaut alors $2 \sin \alpha$.

4. Retour à la géométrie.

La distance que nous venons d'expliciter vérifie évidemment l'inégalité triangulaire. Mais en la définissant avec les formules obtenues sur la sphère, c'est moins évident.

Remarquons d'abord que $\sin \alpha$ s'interprète simplement : c'est le double de l'aire du triangle $0xy$. Nous notons $\delta(x, y)$ la distance en question . Remarquons tout de suite que tant que $x0y$ reste aigu, elle croît avec l'angle.

Remarquons également que l'inégalité triangulaire concerne trois points x, y, z . C'est un problème de géométrie sur la sphère \mathbf{S}_2 de l'espace euclidien de dimension 3.

En fait nous allons commencer par traiter le problème pour le cercle. ⁽¹⁾ Soient trois points x, y, z de ce dernier. Quitte à changer un vecteur en son opposé, on peut supposer $x0y$ et $y0z$ aigus. Si $x0z$ est lui-même aigu, il est facile de voir que

$$\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z) .$$

Si x, z sont de part et d'autre de y , cela résulte d'une inclusion de domaines, sinon $\delta(x, y)$ est inférieure à l'une des deux autres distances. Maintenant si $x0z$ est obtu, alors $\delta(x, z) \leq 1$ alors que la somme des deux autres termes est plus grande que 1.

Considérons maintenant trois points x, y, z de la sphère. On suppose toujours $x0y$ et $y0z$ aigus. Soit y' le symétrique de y par rapport au plan $0xz$. Nous considérons les boules de centres x, z de rayons $d(x, y), d(z, y)$. Elles se coupent entre elles et avec le plan $0yy'$ suivant un disque de diamètre yy' . Ce dernier, qui de rayon au plus 1, intersecte la sphère selon un petit arc du grand cercle yy' , dont on note m le milieu sur la sphère. Le fait de remplacer y par m n'augmente pas les angles $x0y$ et $y0z$. Les deux boules ont été introduites pour cela. Mais x, m et z sont sur un grand cercle. On est ainsi ramené au cas précédent.

⁽¹⁾ On peut aussi voir le cercle comme le groupe des angles : la distance est la moitié de l'image inverse de la distance ordinaire pour l'application $\phi \mapsto 2\phi$.

Equations différentielles ordinaires

Le cadre.

On se donne un espace normé E complet (par exemple de dimension finie), une partie U de $\mathbf{R} \times U$ ouverte (sauf mention contraire), et une application f de U dans E continue (avec d'autres propriétés s'il le faut).

Etant donné un intervalle I , on désigne par V_I la partie de l'espace normé $\mathcal{C}(I, E)$, équipé de la norme uniforme, qui est composée des fonctions continues x sur I à valeurs dans E telles que $\delta_x(t) = (t, x(t))$ reste dans U pour t dans I .

Une solution sur I de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

est alors une fonction x de V_I qui est dérivable et qui vérifie sur I la propriété indiquée. On parle aussi de trajectoire ou de courbe intégrale.

Si I est un segment, on notera que V_I est une partie ouverte de $\mathcal{C}(I, E)$; en effet, pour x dans V_I , l'image de I par δ_x est compacte dans U et sa distance au bord de U est minorée par un nombre $c > 0$. Si l'application y de $\mathcal{C}(I, E)$ vérifie alors $\|x - y\|_\infty < c$, il apparaît que $\|\delta_x(t) - \delta_y(t)\| < \epsilon$ pour tout t dans I , ce qui implique que $\delta_y(t)$ soit dans U pour tout t dans I , et donc que y est dans V_I .

Condition initiale.

On se donne encore un point (t_0, x_0) de U et on s'intéresse aux solutions sur un intervalle I contenant t_0 telles que $x(t_0) = x_0$.

Pour qu'une fonction x de V_I soit une telle solution, il faut et il suffit que x vérifie l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du$$

sur U .

La vérification est immédiate : si x vérifie l'équation intégrale, alors $x(t_0) = x_0$ et on peut dériver l'intégrale par rapport à sa borne supérieure pour obtenir $f(t, x(t))$; inversement si x vérifie l'équation différentielle avec la condition initiale, alors la dérivée dx/dt est continue, puisque valant $f(t, x(t))$, et on peut l'intégrer entre t_0 et t pour obtenir la relation intégrale considérée.

Cylindres de sécurité.

Un **cylindre de sécurité** est le produit $I \times B'(x_0; r)$ d'un segment I contenant t_0 et contenu dans $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ par une boule fermée $B'(x_0; r)$, produit inclus dans U et sur lequel la norme $\|f(t, x)\|$ est majorée par M , où

$$M\tau \leq r .$$

L'intérêt d'un cylindre de sécurité est qu'une solution ne peut en sortir que par les extrémités de I .

Une fonction x dérivable sur I à valeur dans E , qui vérifie $x(t_0) = x_0$ ainsi que l'équation en tout point t tel que $(t, x(t))$ soit dans U , est alors nécessairement dans V_I , de sorte que c'est une solution. Montrons, par exemple, que l'on sort à droite par l'extrémité de I . La borne supérieure θ des t de I pour lequel l'image par x de $[t_0, t]$ est dans la boule fermée $B'(x_0; r)$ est atteinte. Supposons par l'absurde que θ n'est pas une extrémité de I . On aurait alors $\|x(\theta) - x(t_0)\| = r$. Mais il viendrait $\|x(\theta) - x(t_0)\| < M\tau$ par l'inégalité des accroissements finis.

On peut toujours trouver un cylindre de sécurité $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times B'(x_0; r)$ centré en (t_0, x_0) où τ est > 0 . On commence par choisir un voisinage de (t_0, x_0) dans U de la forme $[t_0 - \tau', t_0 + \tau'] \times B'(x_0; r)$ sur lequel $\|f(t, x)\|$ est majorée par $M = \|f(t_0, x_0)\| + 1$. Ensuite on prend $\tau = \min(\tau', r/M)$.

Solutions approchées. C'est surtout pour la construction de solutions approchées que l'on a recours à un cylindre de sécurité.

Considérons un tel cylindre, de la forme

$$[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times B'(x_0; r) .$$

Nous allons voir que nous pouvons y développer le **schéma d'Euler**. Donnons-nous un pas $h > 0$. Nous allons construire une solution approchée x telle que $x(t_0) = x_0$ à droite; on ferait de même à gauche.

On définit à partir de t_0 et x_0 , pour $1 \leq k \leq \tau/h$, la suite $t_k = t_0 + kh$ et, par récurrence, la suite x_k et la solution approchée x sur $[t_k, t_k + h]$ en posant

$$x(t) = x_k + (t - t_k)f(t_k, x_k)$$

puis $x_{k+1} = x(t_{k+1})$.

Le point important est que le procédé permet de définir x sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$. C'est le raisonnement que nous avons fait précédemment avec la dérivée à droite ou à gauche au lieu de la dérivée.

Les solutions approchées ainsi construites sont dérivables à gauche et à droite et vérifient l'équation différentielle d'un côté, ici à droite, aux points t_k . Elles y sont tangentes de ce côté-là à une courbe intégrale exacte (quand il y en a).

Il ne faudrait pas croire qu'une solution approchée est une approximation affine par morceaux d'une courbe intégrale. Une telle solution saute de courbe intégrale en courbe intégrale, prenant la tangente au sens propre aux points t_k .

Maintenant on peut montrer, sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz que nous donnerons, qu'en choisissant une suite de pas tendant vers 0 comme $h_n = \tau/n$ la suite des solutions approchées converge localement vers une solution exacte.

Existence et unicité locales.

Nous fixons quelques points de terminologie.

On dit qu'il y a **existence locale** en (t_0, x_0) si l'on peut trouver un intervalle I contenant t_0 en son intérieur et une solution x sur I .

On dit qu'il y a **existence et unicité locales** en (t_0, x_0) si l'on peut trouver un intervalle I contenant t_0 en son intérieur tel que l'équation admette une solution x et une seule sur I .

Une solution sur I est dite **maximale** s'il n'est pas possible de la prolonger à un intervalle strictement plus grand sur lequel elle soit encore une solution. C'est un élément maximal dans l'ensemble des couples (I, x) où x est une solution sur I pour la relation d'ordre définie entre (I, x) et (J, y) par

$$I \subset J$$

et

$$y|_I = x$$

où $y|_I$ est la restriction de x à I .

Toute solution peut être prolongée en une solution maximale; c'est une conséquence du lemme de Zorn. Cependant on peut être plus précis dans certains cas.

Commençons par quelques remarques sur le **comportement des solutions**.

Pour qu'une solution x définie sur un intervalle $I = (a, b[$ ouvert en b puisse être prolongée sur $(a, b]$, il faut il suffit qu'elle admette une limite l en b telle que (b, l) soit dans U . C'est évidemment nécessaire. Maintenant c'est suffisant car la dérivée $dx/dt = f(t, x(t))$ admettra la limite (b, l) . Dans ce cas la fonction x admet comme dérivée en b cette limite et l'équation est vérifiée sur $(a, b]$.

Si, pour une telle solution x , le point $(t, x(t))$ reste dans une partie compacte de U quand t est au voisinage de b , alors la solution admet une limite l en b . En effet la dérivée dx/dt sera bornée en norme par le maximum de $\|f(t, x)\|$ sur cette partie compacte. Etant donnée une suite $b_n \rightarrow b$ de I , on montre, par l'inégalité des accroissements finis, que la suite $x(b_n)$ a une limite.

Revenons aux solutions maximales.

Dans le cas où U est ouvert et où il y a existence locale, une solution x définie sur un intervalle $(a, b]$ fermé en b peut toujours être prolongée au-delà de b : on choisit, sur un petit intervalle à droite, une solution y telle que $y(b) = x(b)$.

Les solutions maximales ne peuvent être définies que sur des intervalles ouverts et le point $(t, x(t))$ n'a pas de limite dans U aux extrémités.

En dimension finie, cas où nous verrons qu'il y a toujours existence locale, si x est une solution maximale sur I , la fonction $(t, x(t))$ doit nécessairement avoir des valeurs d'adhérence au bord de U ou à l'infini. En effet, si l'on avait

$$d((t, x(t)), U^c) \geq c \quad \text{et} \quad 1/\|(t, x(t))\| \geq c$$

pour $c > 0$, alors $(t, x(t))$ resterait dans une partie compacte de U . Alors x aurait une limite telle l que (b, l) soit dans U .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Il s'énonce ainsi : *si, au voisinage de (t_0, x_0) , la fonction continue f est lipschitzienne par rapport à la seconde variable, i.e. s'il existe un voisinage V de ce point et une constante $k \geq 0$ pour lesquels*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$$

pour (t, x) et (t, y) dans V , alors il y a existence et unicité locale en ce point.

C'est le cas notamment lorsque f est de classe \mathcal{C}^1 . En pratique on démontre ceci :
Lemme. Soient $I = [t_0 - \tau', t_0 + \tau'']$ et $\tau = \max(\tau', \tau'')$. On suppose f continue sur $I \times B'(x_0; r)$ et vérifiant

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$$

dans ce cylindre. Si l'on a

$$\tau k < 1 \quad \text{et} \quad r \geq \frac{\tau M}{1 - \tau k}$$

où

$$M = \sup_{t \in I} \|f(t, x_0)\|$$

alors il y a existence et unicité locales sur I .

Il est bien évident qu'on pourra réaliser les hypothèses en choisissant d'abord $r > 0$ assez petit, puis $\tau' = \tau'' = \tau$ assez petit. Pour démontrer le lemme on utilise la forme intégrale.

Si \underline{x}_0 désigne la fonction constante valant x_0 , on considère l'application F de la boule fermée $B'(\underline{x}_0; r)$ de l'espace $\mathcal{C}(I, E)$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}(I, E)$ lui-même, muni de la norme uniforme, qui est définie par

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du .$$

Démontrons le lemme. Les solutions vérifiant $x(t_0) = x_0$ sont exactement les points fixes de F . Cette application vérifie

$$\|F(x)(t) - F(y)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(u, x(u)) - f(u, y(u))\| du \right| \leq \tau k \|x - y\|_\infty .$$

Elle est contractante dès que $\tau k < 1$. Par ailleurs elle applique la boule dans elle-même. On vérifie que

$$\|F(\underline{x}_0)(t) - \underline{x}_0(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(u, x_0) - x_0\| du \right| \leq \tau M$$

d'où l'on déduit

$$\|F(\underline{x}_0) - \underline{x}_0\|_\infty \leq (1 - \tau k)r$$

sous les hypothèses du lemme. Alors, si x est dans la boule, on a

$$\|F(x) - \underline{x}_0\|_\infty \leq \|F(x) - F(\underline{x}_0)\|_\infty + \|F(\underline{x}_0) - \underline{x}_0\|_\infty \leq \tau k r + (1 - \tau k)r = r$$

et il en est de même de $F(x)$.

Pour finir, le fait que la boule $B'(\underline{x}_0; r)$ soit un espace métrique complet permet d'appliquer le théorème du point fixe de Picard.

Equations linéaires.

Si I est un intervalle quelconque, si A est une application continue de I dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes continus de E et B une application continue de I dans E , l'équation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B$$

est dite *linéaire*.

On notera que U est ici le produit $I \times E$, qui n'est pas nécessairement fermé. Pour être plus rigoureux, on aurait dû partir d'une partie ouverte U d'un tel produit pour poser le cadre général.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique au cas linéaire. Cependant on a davantage : il y a *existence globale*. Pour le voir on peut se ramener au cas où I est un segment. Une solution maximale sera alors définie partout.

Dans le lemme que nous avons établi, on prendrait $r = +\infty$, ce qui fait que seule reste la condition $\tau k < 1$. Il faut s'en débarrasser et on considère pour cela une itérée F^n de F où n est assez grand pour qu'elle soit contractante.

En effet on montre par récurrence que

$$\|F^n(x)(t) - F^n(y)(t)\| \leq k^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \|x - y\|_\infty .$$

C'est clair pour $n = 0$ et pour passer du rang au rang $n + 1$, on note que

$$\|F^{n+1}(x)(t) - F^{n+1}(y)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t k \cdot k^n \frac{|u - u_0|^n}{n!} \|x - y\|_\infty \right| = k^{n+1} \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \|x - y\|_\infty .$$

Alors

$$\|F^n(x) - F^n(y)\|_\infty \leq \frac{(\tau k)^n}{n!} \|x - y\|_\infty$$

où le facteur $(\tau k)^n/n!$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ comme terme général d'une série exponentielle.

Remarque. Pour une équation non linéaire, le fait que f soit définie sur $I \times E$ n'implique pas l'existence globale de solutions. Par exemple les solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

sont en

$$x(t) = -\frac{1}{t - a} .$$

Une telle solution explose pour $t = a$.

Le théorème de Cauchy-Arzelà.

Il s'énonce ainsi : *si E est de dimension finie et f continue, il y a existence locale.*

Pour le démontrer on se donne un cylindre de sécurité

$$I \times B'(x_0; r)$$

où $I = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ en x_0 ; on $\tau M \leq r$ et $\|f(t, x)\| \leq M$ sur le cylindre.

Soit x_n la solution approchée dans I issue du schéma d'Euler pour le pas τ/n . Les valeurs des x_n en t_0 sont les mêmes et la majoration uniforme des dérivées en fait une suite équicontinue. Par le théorème d'Ascoli, cette suite est incluse dans une partie compacte de $\mathcal{C}(I, E)$ et on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur I vers une fonction continue x .

Nous allons voir que

$$\left\| \frac{dx_n}{dt}(t) - f_n(t, x_n(t)) \right\| \leq \epsilon_n$$

où la suite ϵ_n tend vers 0. En effet, étant donné $\epsilon > 0$, par la continuité uniforme de f sur le cylindre, on peut choisir $\eta > 0$ tel que $|t - u| \leq \eta$ et $\|x - y\| \leq \eta$ impliquent

$$\|f(t, x) - f(u, y)\| \leq \epsilon .$$

Soit alors N tel que $\tau/N < \eta$ et $\tau M/N < \eta$. Pour $n \geq N$ on a

$$\frac{dx_n}{dt}(t) = f(u, x_n(u))$$

où $|t - u| \leq \tau/n$ et $\|x_n(t) - x_n(u)\| \leq \tau M/n$.

Il ne reste plus qu'à intégrer en t_0 et t cette inégalité, puis passer à la limite uniforme dans l'expression intégrale obtenue.

Remarque. Il peut ne pas y avoir unicité locale. Prenons l'exemple du ballon qui glisse sur l'arête d'un toit. Soit h l'altitude, vers le bas, à partir de l'arête. Par le théorème de l'énergie cinétique, on a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = gh .$$

Or une équation du type

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{h}$$

s'intègre, dans le demi-plan $h \geq 0$, en

$$h(t) = \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

pour $t \geq t_0$, ou bien en

$$h(t) = 0 .$$

Les courbes intégrales maximales suivent l'axe des t jusqu'en t_0 où elles empruntent une parabole. En $(t_0, 0)$ on n'a pas unicité locale; il y a une infinité de possibilités pour les t voisins.

Différentiabilité globale du flot.

Considérons un segment I et l'application Φ_I qui au point ξ de E et à la fonction x de V_I associe la fonction y de $\mathcal{C}(I, E)$ définie par

$$y(t) = x(t) - \xi - \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du$$

sur I .

Si f est de classe \mathcal{C}^1 dans U , la dérivée partielle en x de cette application est donnée par

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}.h\right)(t) = h(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, x(u))h(u)du$$

au point (x, ξ) .

Il est facile de voir que c'est une application linéaire continue sur $\mathcal{C}(I, E)$. On majore en effet l'intégrale du second membre par

$$Lk\|h\|_\infty$$

Si I est inclus dans $[-L, L]$ et si $\|\partial f/\partial x\|$ est majorée par k sur l'image par δ_x de I .

Maintenant on peut aussi voir que la fonction

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}.h$$

qui vaut

$$\int_{t_0}^t \left[f(u, (x+h)(u)) - f(u, x(u)) - \frac{\partial f}{\partial x}(u, x(u))h(u) \right] du$$

est tangente à zéro au point (x, ξ) . Etant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x+z) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq \epsilon$$

pour $\|z\| \leq \eta$ et t dans I : ici la compacité de I a été utile pour obtenir l'uniformité en t . Il en résulte

$$\left\| f(t, x+z) - f(t, x) - z \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq \epsilon \|z\|$$

pour $\|z\| \leq \eta$ et t dans I , par la formule des accroissements finis.

Maintenant la différentielle en x au point (x, ξ) est inversible, comme application linéaire continue, dès que l'on peut prendre $Lk \leq 1/2$, donc dès que I est un segment assez petit.

Espaces L^p

Les fonctions sont à valeurs complexes. Dans la suite on considère un nombre réel p vérifiant $1 \leq p \leq +\infty$; on lui associe l'exposant conjugué q défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

avec la convention $1/\infty = 0$.

Dans la suite on utilisera la mesure de Lebesgue dx . Cependant tout reste valable pour une mesure positive quelconque $d\mu(x)$.

Pour $p < +\infty$, l'espace L^p est l'espace des classes, pour l'égalité presque partout, de fonctions mesurables f de puissance p -ème sommable, c'est-à-dire telles $|f|^p$ soit intégrable, i.e. vérifiant

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$$

où figure une intégrale indépendante du choix de f dans sa classe.

Par ailleurs l'espace L^∞ est l'espace des classes, pour l'égalité presque partout, de fonctions mesurables f essentiellement bornées, i.e. pour lesquelles il existe une constante M vérifiant

$$f(x) \leq M$$

presque partout, propriété indépendante du choix de f dans sa classe; on note $\|f\|_\infty$ la borne essentielle de $|f|$, qui est la plus petite de ces constantes. Vérifions en effet que la borne inférieure de ces constantes est atteinte, pour une fonction mesurable f donnée, en considérant une suite M_n vérifiant $|f(x)| \leq M_n$ presque partout et qui converge vers M . Pour chaque n on choisit une partie N_n de mesure nulle en dehors de laquelle l'inégalité $|f(x)| \leq M_n$ a lieu. La réunion N des N_n est encore une de mesure nulle; Or, pour x en dehors de N , on peut passer à la limite pour obtenir $|f(x)| \leq M$.

Rappelons qu'une application f d'un espace mesurable (X, \mathcal{A}) dans un espace mesurable (X', \mathcal{A}') , où \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont des tribus, est dite mesurable si l'image réciproque par f de toute partie mesurable est mesurable, i.e. si l'image réciproque par f de toute partie A' de \mathcal{A}' est dans \mathcal{A} .

Dans le cas de \mathbf{R} ou \mathbf{C} , on a le choix entre plusieurs tribus. On peut considérer la tribu borélienne \mathcal{B} , qui est la tribu engendrée par les intervalles (pour \mathbf{R}) ou les rectangles ou les disques (pour \mathbf{C}); c'est aussi la tribu engendrée par les parties ouvertes ou compactes. Mais on peut aussi considérer la tribu de Lebesgue \mathcal{L} , qui est la tribu complétée de la tribu borélienne pour la mesure de Lebesgue : une partie L est dans \mathcal{L} s'il existe une partie B de \mathcal{B} une partie N de mesure nulle telles que L et B coïncident sur le complémentaire de N .

Lorsqu'on choisit la tribu borélienne au départ et à l'arrivée on définit les fonctions boréliennes. Lorsqu'on choisit la tribu de Lebesgue au départ et la tribu borélienne à l'arrivée on définit les fonctions mesurables au sens de Lebesgue.

Ce sont celles-là que nous considérons ici. C'est pour ce dernier choix qu'il y a le plus de fonctions mesurables, au point que l'on ne peut pas fabriquer de fonction non mesurable sans l'axiome du choix général.

Dans le cas d'une mesure générale, c'est-à-dire d'une mesure abstraite μ sur un espace mesurable (X, \mathcal{A}) , la mesurabilité au sens de Lebesgue se définit en complétant la tribu \mathcal{A} pour μ . Pour \mathbf{R} ou \mathbf{C} comme espace de départ, c'était la tribu borélienne qui jouait le rôle de \mathcal{A} .

La première inégalité de convexité s'énonce comme suit.

Théorème (inégalité de Hölder).

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

pour f, g mesurables.

Si le second membre est fini, le premier l'est aussi; en particulier le produit d'une fonction de L^p par une fonction de L^q est dans L^1 et vérifie

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Pour $1 < p < +\infty$, de l'inégalité de Hölder, on tire la suivante, laquelle vaut dans tous les cas.

Théorème (inégalité de Minkowski).

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

pour f, g mesurables.

Pour $p = 1$ l'inégalité s'établit en construisant l'intégrale; pour $p = +\infty$ elle est évidente.

L'inégalité de Minkowski montre que chaque $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur l'espace vectoriel, noté souvent \mathcal{L}^p , des fonctions mesurables f telles que $\|f\|_p < +\infty$. Cependant $\|f\|_p = 0$ implique seulement $f(x) = 0$ presque partout. C'est pour avoir une vraie norme que l'on considère des classes pour la relation d'équivalence qui est l'égalité presque partout. Cela revient à prendre le quotient par le sous-espace vectoriel des fonctions presque partout nulles : f et g sont équivalentes si $f - g$ est presque partout nulle.

Cependant la situation est beaucoup plus simple que dans le cas général du quotient d'un espace normé par un sous-espace fermé. Ici les propriétés, comme la future norme $\|\cdot\|_p$, passent directement aux classes, de sorte qu'il n'y a pas d'inconvénient à définir directement les L^p droits.

On notera surtout qu'on peut aussi définir L^p comme un espace de classes de fonctions définies presque partout, les fonctions f et g étant équivalentes si elles sont toutes deux définies et égales en dehors d'une partie de mesure nulle. En effet on peut toujours se ramener à une fonction partout définie sans changer la fonction f dans sa classe : là où f ne serait pas définie on lui donnerait, par exemple, la valeur 0.

Le théorème de Hölder admet une réciproque qui est parfois utile. Ici nous prenons le cas de la mesure de Lebesgue; il y aurait quelques simplifications pour une mesure bornée.

Proposition.

Soit f une fonction mesurable. S'il existe une constante $C \geq 0$ telle que fg soit intégrable et que $|\int fg| \leq C\|g\|_q$ pour toute fonction g mesurable, bornée, nulle en dehors d'un ensemble de mesure finie, alors f est dans L^p et $\|f\|_p \leq C$.

Nous commençons par faire la démonstration dans le cas $1 < p < +\infty$. Donnons-nous une fonction f ayant la propriété ci-dessus. Nous posons

$$g_n = 1_{[-n,n]} \cdot \min\left(1, \frac{1}{|f|^{p-1}}\right) \cdot \bar{f} |f|^{p-2}$$

en convenant que $g_n(x) = 0$ là où $f(x) = 0$. Alors

$$fg_n = 1_{[-n,n]} \cdot \min\left(1, \frac{1}{|f|^{p-1}}\right) \cdot |f|^p$$

presque partout et

$$|g_n|^q \leq 1_{[-n,n]} \cdot \min\left(1, \frac{1}{|f|^{p-1}}\right) \cdot |f|^p = fg_n$$

puisque que $a^q \leq a$ pour $0 \leq a \leq 1$ et $(p-1)q = p$.

Comme g_n est bornée et à support bornée, il vient

$$\int fg_n \leq C\|g_n\|_q = C\left(\int fg_n\right)^{1/q}$$

par hypothèse. d'où

$$\left(\int fg_n\right)^{1/p} \leq C.$$

Maintenant la suite croissante de fonctions positives fg_n a $|f|^p$ pour limite. Par convergence monotone, il vient $\|f\|_p \leq C$.

Pour $p = 1$, on pose simplement

$$g_n = 1_{[-n,n]} \cdot \frac{\bar{f}}{|f|}$$

en convenant que $g_n(x) = 0$ là où $f(x) = 0$. On a

$$\int fg_n \leq C\|g_n\|_\infty \leq C$$

puisque $\|g\|_\infty \leq 1$; par suite $\|f\|_1 \leq C$ comme précédemment, par convergence monotone.

Pour $p = +\infty$, on choisit $C' > C$, on désigne par A l'ensemble des x tels que $|f(x)| \geq C'$ et on pose

$$g_n = 1_{A \cap [-n,n]} \cdot \frac{\bar{f}}{|f|}.$$

On a

$$C' \cdot \text{mes}(A \cap [-n,n]) \leq \int fg_n \leq C \cdot \text{mes}(A \cap [-n,n])$$

puisque $\|g\|_1 \leq \text{mes}(A \cap [-n,n])$; par suite $\text{mes}(A \cap [-n,n]) = 0$, puis $\text{mes}A = 0$, d'où $\|f\|_\infty \leq C'$ et enfin $\|f\|_\infty \leq C$.

N.B. Dans le cas de \mathbf{R}^n , on peut considérer une fonction de l'espace L^1_{loc} des fonctions dites localement intégrables et qui sont intégrables sur toute partie bornée, espace qui contient tous les L^p . Il suffit alors de demander $|\int fg| \leq C\|g\|_q$ pour toute g de l'espace des fonctions bornées à support borné, espace inclus dans tous les L^p ; l'intégrabilité de fg est alors acquise.

La complétion de L^p

L'intérêt principal de l'intégrale de Lebesgue pour l'analyse mathématique réside dans le théorème suivant.

Théorème.

Les espaces L^p sont complets.

Nous nous intéressons au cas $p < +\infty$ car le cas de L^∞ est facile. Maintenant la démonstration procède en plusieurs étapes.

Lemme 1. Pour qu'un espace normé E soit complet, il faut et il suffit que toute série absolument convergente de E y soit convergente.

Rappelons que, dans un espace normé, la série (u_n) est dite absolument convergente, si la série des normes $(\|u_n\|)$ est convergente. Pour une série de fonctions cela n'a rien à voir avec la convergence simple absolue. Si la norme est la norme uniforme c'est exactement la convergence normale.

La condition nécessaire est classique et nous n'en aurons pas besoin. Considérons donc la condition suffisante. Supposons donc que toute série absolument convergente de E y converge. Donnons-nous alors une suite de Cauchy (x_n) .

a) Nous construisons une suite extraite $(x_{\phi(p)})$ telle que

$$\|x_{\phi(p)} - x_n\| \leq 2^{-p}$$

pour tout $n \geq p$. Précisément nous procédons par récurrence sur l'ensemble des prédécesseurs en supposant la fonction strictement croissante ϕ construite sur $[0, q[$ avec la propriété demandée pour tout $p < q$. Etant donné $\epsilon = 2^{-q}$, nous choisissons N tel que

$$\|x_m - x_n\| \leq 2^{-q}$$

pour tous $m, n \geq N$. Nous prenons alors $\phi(q) = N$ si $q = 0$ et $\phi(q) = \max(N, \phi(q-1) + 1)$ si $q \geq 1$. La propriété est vérifiée au rang q .

b) En particulier la série de terme général

$$u_p = x_{\phi(p+1)} - x_{\phi(p)}$$

vérifie $\|u_p\| \leq 2^{-p}$; elle est absolument convergente et admet une somme S . Dans la relation

$$x_{\phi(p)} - x_0 = u_{p-1} + \dots + u_0$$

le second membre a S pour limite, de sorte que $x_{\phi(p)}$ a $l = x_0 + S$ pour limite.

c) Nous allons voir que la suite (x_n) elle-même tend vers l . Etant donné $\epsilon > 0$, on choisit N tel que

$$\|x_m - x_n\| \leq \epsilon$$

pour tous $m, n \geq N$.

Soit p tel que $2^{-p} \leq \epsilon$. Il vient $\|x_{\phi(p)} - x_n\| \leq \epsilon$ et donc

$$\|x_{\phi(p)} - x_n\| \leq \epsilon$$

pour $q \geq p$. Passons à la limite quand $q \rightarrow \infty$. On obtient

$$\|l - x_n\| \leq \epsilon$$

pour $n \geq N$. Ainsi s'achève la preuve du lemme.

Lemme 2 (sous-additivité dénombrable de la norme). Soit h_n sur suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\left\| \sum h_n \right\|_p \leq \sum \|h_n\|_p .$$

Ici on a pris des fonctions positives pour que leur somme soit toujours définie, éventuellement infinie.

L'inégalité de Minkowski s'écrit

$$\int \left(\sum_{n=0}^N h_n(x) \right)^p dx = \left\| \sum_{n=0}^N h_n \right\|_p^p \leq \left(\sum_{n=0}^N \|h_n\|_p \right)^p \leq \left(\sum \|h_n\|_p \right)^p .$$

En passant à la limite croissante de fonctions positives, il vient

$$\int \left(\sum h_n(x) \right)^p dx \leq \left(\sum \|h_n\|_p \right)^p$$

et la propriété attendue suit.

Démonstration du théorème. Voyons maintenant comment établir la complétion. Soit (u_n) une série absolument convergente de L^p , qui vérifie donc $\sum \|u_n\| < +\infty$. Pour chaque n , on choisit un représentant partout défini dans la classe de u_n , que l'on note de la même façon.

Le lemme 2 donne

$$\left\| \sum |u_n| \right\|_p \leq \sum \|u_n\|_p < +\infty .$$

La fonction $\sum |u_n|^p$ est intégrable, donc presque partout finie. On a $\sum |u_n(x)| < +\infty$ presque partout. En dehors d'une partie A de mesure nulle, la série $(u_n(x))$ converge absolument. Soit $S(x)$ sa somme, qui est presque partout définie. Considérons sa classe, que nous notons encore S .

Il reste à voir que S est dans L^p et que la série y admet S pour somme. Or

$$\int \left| S(x) - \sum_{n=0}^N u_n(x) \right|^p dx = \int \left| \sum_{n>N} u_n(x) \right|^p dx \leq \sum_{n>N} \|u_n\|_p^p$$

où l'égalité de gauche s'applique à des fonctions presque partout définies. Enfin le membre le plus à droite tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$.

Dualité des espaces L^p

Dans toute la suite la mesure de Lebesgue peut être remplacée par une mesure quelconque.

Les espaces L^p et L^q sont en dualité, sans restriction sur $p \geq 1$, par l'application qui à f dans L^p et g dans L^q associe

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx$$

dont la validité est fournie par l'inégalité de Hölder. On a de plus

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Une telle dualité définit une application linéaire naturelle

$$L^q \rightarrow (L^p)'$$

où $(L^p)'$ est le dual normé de L^p , espace des formes linéaires continues sur L^p muni de la norme d'opérateur. C'est celle qui à g dans L^q associe la forme linéaire continue $\langle \cdot, g \rangle$ sur L^p donnée par

$$f \rightarrow \langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx .$$

Cette forme a une norme d'opérateur majorée par $\|g\|_q$. L'application naturelle diminue donc la norme (au sens large). En fait elle la conserve, ce qui montre qu'elle est injective : c'est la propriété réciproque de l'inégalité de Hölder.

La question est de savoir si cette application naturelle est un isomorphisme, autrement dit si elle est surjective. Là il y a des restrictions sur p .

Théorème.

Pour $1 < p < +\infty$, la dualité entre L^p et L^q identifie L^p au dual de L^q .

La démonstration procède en plusieurs étapes.

Lemme 1. Pour $1 < p < +\infty$, l'espace L^p est uniformément convexe dans le sens suivant : étant donné $\eta > 0$, on peut trouver une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|f - g\|^p \leq (C + \eta) \frac{\|f\|^p + \|g\|^p}{2} - C \left\| \frac{f + g}{2} \right\|^p$$

pour tous f, g dans L^p .

a) On commence par montrer que

$$\left| \frac{x + y}{2} \right|^p < \frac{|x|^p + |y|^p}{2}$$

si x, y sont des nombres réels distincts.

Supposons d'abord $x, y \geq 0$. La fonction définie sur $[0, +\infty[$ qui à x associe x^p est strictement convexe car sa dérivée px^{p-1} est strictement croissante. Il en résulte

$$\left(\frac{x + y}{2} \right)^p < \frac{x^p + y^p}{2}$$

pour $x \neq y$.

Maintenant

$$\left| \frac{x+y}{2} \right|^p \leq \left(\frac{|x|+|y|}{2} \right)^p$$

et l'égalité $|x+y| = |x|+|y|$ n'a lieu que si x et y sont de même signe, au sens large. L'inégalité demandée suit.

b) On va en déduire qu'étant donné $\eta > 0$, on peut trouver un nombre $C \geq 0$ tel que

$$|x-y|^p \leq (C+\eta) \frac{|x|^p+|y|^p}{2} - C \left| \frac{x+y}{2} \right|^p.$$

On se donne donc $\eta > 0$. La propriété est évidente si $x=y=0$ de sorte qu'on peut supposer que $(x,y) \neq (0,0)$. Par ailleurs la propriété est homogène. On se ramène à l'établir pour $(|x|^p+|y|^p)^{1/p} = 1$, soit $|x|^p+|y|^p = 1$. Dans ce cas il s'agit d'établir Il s'agit de voir que

$$|x-y|^p \leq C \left[\frac{|x|^p+|y|^p}{2} - \left| \frac{x+y}{2} \right|^p \right] + \frac{\eta}{2}$$

pour C convenable. Le grand crochet de droite est positif ou nul d'après ce qu'on vient de voir. Donc la propriété est vraie si $|x-y|^p \leq \eta/2$.

Il s'agit alors d'établir

$$\frac{|x-y|^p}{\frac{|x|^p+|y|^p}{2} - \left| \frac{x+y}{2} \right|^p} \leq C$$

dans le cas contraire.

Maintenant les relations $|x|^p+|y|^p = 1$ et $|x-y|^p \geq \eta/2$ définissent une partie de \mathbf{R}^2 qui est fermée, et bornée comme incluse dans $[-1,1]^2$, donc compacte. Et la fonction définie par le premier membre de la relation ci-dessus est continue puisque son dénominateur ne s'y annule pas, vu qu'on y a $x \neq y$. Le théorème de la borne supérieure fournit l'existence de C .

Voir l'exercice sur *l'uniforme convexité* pour cette partie.

c) Il ne reste plus qu'à remplacer x par $f(x)$ et y par $g(y)$ et à intégrer.

Lemme 2. Ici nous omettons les indices pour la norme. Etant donnés une partie convexe fermée non vide et un élément f dans L^p , il existe un unique élément g de C qui réalise le minimum de la distance de f à C , i.e. telle que $\|h\| = d$ si $h = g - f$ et $d = d(f, C)$.

L'unicité est facile et nous n'en aurons pas besoin. Voyons l'existence et considérons une suite (g_n) de C , où $g_n = f + h_n$, telle que $\|h_n\|^p \leq d^p + \frac{1}{n}$. Si l'on peut montrer que la suite (h_n) admet une limite h , alors (g_n) aura pour limite un élément $g = f + h$ de la partie fermée C et on aura $\|h\| \leq d$; cela établira l'existence.

Puisque L^p est complet, on va vérifier le critère de Cauchy. Donnons-nous $\epsilon > 0$. Choisissons $\eta = \min(1, (\epsilon/d)^p/2)$, puis une constante C tirée de la propriété d'uniforme convexité. Nous avons

$$\|h_n - h_{n+m}\|^p \leq (C+\eta) \frac{\|h_n\|^p + \|h_{n+m}\|^p}{2} - C \left\| \frac{h_n + h_{n+m}}{2} \right\|^p.$$

Or la partie convexe C , qui contient $f + h_n$ et $f + h_{n+m}$, contient aussi le milieu $f + (h_n + h_{n+m})/2$. Par suite

$$\|h_n - h_{n+m}\|^p \leq (C + \eta)(d^p + \frac{1}{n}) - Cd^p = \frac{C + \eta}{n} + \eta d^p \leq \frac{C + 1}{n} + \frac{\epsilon^p}{2} .$$

Choisissons $N \geq 2\frac{C+1}{\epsilon^p}$. On a $\|h_n - h_{n+m}\|^p \leq \epsilon^p$ et donc $\|h_n - h_{n+m}\| \leq \epsilon$ dès que $n \geq N$.

Lemme 3. Si h, k sont des fonctions de L^p , où $1 < p < +\infty$, la fonction

$$\int |h(x) + tk(x)|^p dx$$

est dérivable en t sur \mathbf{R} et admet

$$\int p|h(x) + tk(x)|^{p-2} \Re(\overline{h(x) + tk(x)} k(x)) dx$$

pour dérivée.

Nous allons établir cette dérivée sur tout intervalle $] -A, A[$ où A est ≥ 0 .

D'abord la dérivée sous l'intégrale existe et vaut

$$p|h(x) + tk(x)|^{p-2} \Re(\overline{h(x) + tk(x)} k(x)) .$$

En effet l'application $z \rightarrow |z|^p$ est continûment différentiable sur \mathbf{R}^2 et que sa différentielle est donnée par

$$d((z\bar{z})^{p/2}) = \frac{p}{2}|z|^{p-2} d(z\bar{z}) = \frac{p}{2}|z|^{p-2} (\bar{z}dz + z d\bar{z}) = p|z|^{p-2} \Re(\bar{z}dz)$$

en dehors de 0. De plus cette différentielle tend vers 0 en 0 où l'on voit directement que la fonction est tangente à zéro. Il n'y a plus qu'à composer à l'application

$$t \rightarrow h(x) + tk(x) .$$

Ensuite cette dérivée est dominée par

$$p(|g(x)| + A|k(x)|)^{p-1} |k(x)|$$

pour t dans $] -A, A[$. Cette dernière fonction est dans L^1 comme produit d'une fonction de L^q par une fonction de L^p . La dérivée est donc établie.

Lemme 4. Avec les notations du lemme 2, la fonction

$$\tilde{h} = p\bar{h} \cdot |h|^{p-2} .$$

est dans L^q . De plus, si $f + h + k$ est un élément de C , on a

$$\int \Re(\tilde{h}k) \geq 0 .$$

On convient que $\tilde{h}(x) = 0$ là où $h(x) = 0$. L'appartenance de \tilde{h} à L^p est évidente sachant que $|\tilde{h}| = |h|^{p-1}$ et que $(p-1)q = p$. Par ailleurs

$$\|h + tk\|^p \geq \|h\|^p$$

pour tout t dans $[0, 1]$ puisque $f + h$ réalise le minimum de la distance à C .

Or, d'après le lemme 3, la dérivée à droite en 0 est

$$\int \Re(\tilde{h}(x)k(x))dx$$

et cette dernière est donc positive.

Fin de la démonstration. Soit ϕ une forme linéaire continue sur L^p ; nous voulons voir qu'elle provient d'une fonction de L^q . Si $\phi = 0$ il n'y a rien à démontrer et nous écartons ce cas. Le noyau de ϕ est alors un hyperplan fermé H . Considérons un élément f en dehors de cet hyperplan et un élément $g = f + h$ qui réalise le minimum de la distance de f à H . La fonction \tilde{h} de L^q donnée par le lemme 3 vérifie

$$\int \Re(\tilde{h}k) \geq 0$$

pour tout élément $g + k$ de H . Cependant, comme H est un sous-espace vectoriel, lorsque $g + k$ parcourt H il est de même pour k . Cela vaut encore pour ik , comme pour $-k$, de sorte que

$$\int \tilde{h}k = 0$$

pour tout k dans H . La forme linéaire sur L^p définie par \tilde{h} s'annule donc sur H . En h elle prend la valeur

$$\int \tilde{h}h = p \int |h|^p$$

qui est strictement positive. Il reste à ajuster λ de façon que la forme associée ψ à $\lambda\tilde{h}$ prenne en h la valeur $\phi(h)$. Comme H et h engendrent L^p , les formes ϕ et ψ coïncident partout. La démonstration est achevée.

Plan pour l'Analyse de Fourier

On a essayé de traiter, dans le plus grand parallélisme possible, les séries de Fourier et la transformation du même nom. Certains passages seront ainsi intentionnellement répétés, parfois à l'identique, parfois avec quelques corrections, d'un chapitre sur l'autre. Les parenthèses indiquent des paragraphes qu'on aurait pu insérer.

Séries de Fourier

Fonctions sur le tore

Un problème historique

Coefficients de Fourier

Symétries etc.

Fonctions de base

Convolution sur le tore

Caractérisation dans $L^1(\mathbf{T})$

Riemann-Lebesgue

Dérivation

Espace $L^2(\mathbf{T})$

Densité des polynômes
trigonométriques

Convergence dans $L^2(\mathbf{T})$

Isomorphisme $l^2(\mathbf{Z}) \rightarrow L^2(\mathbf{T})$

Le théorème de Weierstrass

Un noyau

Convergence absolue

L'espace $H^1(\mathbf{T})$

Influence des discontinuités

Le phénomène de Gibbs

Retour sur la plaque

Transformation de Fourier

Fonctions sur la droite

(La diffusion de la chaleur)

Intégrales de Fourier

Symétries

Exemples

Convolution sur la droite

Caractérisation dans $L^1(\mathbf{R})$

Transposition

Riemann-Lebesgue

Dérivation

Espace \mathcal{S} de Schwartz

Espace $L^2(\mathbf{R})$

Densité des fonctions de \mathcal{S}

Isomorphisme $L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$

Convergence absolue

L'espace $H^1(\mathbf{R})$

Influence des discontinuités

Le phénomène de Gibbs

(Retour sur le fil)

Séries de Fourier Introduction et théorie L^1

Nous nous intéressons ici à des fonctions périodiques, précisément T -périodiques, pour une même période $T > 0$ donnée; autrement dit nous considérons des fonctions vérifiant $f(t + T) = f(t)$, au moins pour presque tout t ; la pulsation correspondante est $\omega = 2\pi/T$.

N.B. En fait on considèrera la relation ci-dessus comme une égalité partout lorsque f est continue et seulement presque partout dans d'autres cas. Cela n'introduit pas d'ambiguïté. En effet, pour des fonctions continues, une égalité presque partout vaut partout : un ensemble négligeable ne peut contenir aucun intervalle non nul; par suite son complémentaire est toujours dense; or une égalité sur une partie dense se prolonge par continuité à l'espace entier.

N.B. Nous parlons de fonctions T -périodiques. Nous pourrions aussi bien parler de fonctions de période T , dans le sens qu'elles admettent la période T . Il faut bien comprendre que cela ne signifie pas que T est *la (plus petite) période* : la fonction $\sin(2t)$ est 2π -périodique ou de période 2π ; la fonction constante 0 aussi.

Dans la suite nous parlerons généralement de fonctions périodiques sans préciser. Pour simplifier les formules, nous supposerons souvent dans les vérifications que la période est 1, et par conséquent que la pulsation est 2π .

Fonctions sur le tore.

Un fait important est que les fonctions périodiques sont en réalité des fonctions sur un espace *compact*. C'est une situation beaucoup plus simple qu'avec la droite réelle. Les conditions de support n'ont plus lieu d'être. A titre d'exemple, mais en dehors de nos préoccupations, on noterait que la convolution des distributions périodiques ne souffre pas d'exception alors que celle des distributions sur la droite exige une condition sur les supports. Pour cette raison, considérer d'abord les fonctions périodiques serait une bonne façon d'attaquer l'analyse mathématique.

Nous indiquons deux façons, différentes seulement en apparence, de faire apparaître un espace de définition qui soit compact.

Prenons par exemple les fonctions 1-périodiques. Une façon de voir ces fonctions est de les considérer comme des fonctions sur le *tore*, i.e. le groupe additif $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$: en effet une telle fonction prend la même valeur sur tous les éléments d'une classe $t + \mathbf{Z}$ modulo \mathbf{Z} ; elle définit une fonction sur le quotient qui est l'ensemble de ces classes.

Nous parlerons aussi bien d'une fonction *sur le tore* que d'une fonction périodique. Dans le cas général d'une fonction T -périodique, le tore sera $\mathbf{R}/T\mathbf{Z}$.

Voici une variante pour ceux qui n'aiment pas les espaces quotients. Prenons cette fois les fonctions 2π -périodiques. Une telle fonction définit une fonction sur le groupe multiplicatif \mathbf{U} des nombres complexes de module 1 : on pose $\tilde{f}(e^{it}) = f(t)$, en remarquant que la valeur ne dépend pas de la façon de représenter le nombre complexe e^{it} . Dans le cas général d'une fonction T -périodique, on définira $\tilde{f}(e^{i\omega t})$.

On passe d'une représentation à l'autre par l'isomorphisme de \mathbf{T} sur \mathbf{U} qui provient de l'application qui à x associe $e^{i\omega x}$.

Pour une fonction 1-périodique, le symbole

$$\int_{\mathbf{T}}$$

désignera l'intégrale sur n'importe quel intervalle de période $[\alpha, 1 + \alpha]$; le résultat ne dépend évidemment pas de l'intervalle choisi. On utilisera les normes $\| \cdot \|_p$ relatives à cette intégrale.

Dans le cas d'une période T générale, le symbole intégral $\int_{\mathbf{T}}$ désignera

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{T+\alpha}$$

qui est la moyenne sur une période. On y adaptera les normes $\| \cdot \|_p$.

N.B. Lorsque que la fonction est donnée par une formule explicite sur un intervalle de période, mieux vaut ne pas changer cet intervalle dans les calculs, sauf si l'on est prêt à expliciter les valeurs sur un autre intervalle; la négligence entraîne beaucoup d'erreurs dans ce domaine.

Un problème historique.

Nous allons considérer un problème d'équilibre des températures, celui qui a conduit Joseph Fourier à l'introduction des séries qui portent son nom.

Considérons, dans le plan rapporté à deux axes de coordonnées x et y , une plaque rectangulaire $[-l/2, l/2] \times [0, h]$. Nous supposons le côté porté par l'axe des x soumis en permanence à la température 100° C de l'eau bouillante et les autres côtés à la température 0° C de la glace fondante, prise comme origine des températures. Comment la température s'équilibre-t-elle à l'intérieur de la plaque; laquelle est supposée conduire la chaleur bien entendu?

Pour écrire l'équation d'équilibre, nous allons discrétiser la situation et imaginer que la plaque est constituée des points d'un quadrillage de maille ϵ . La température θ en un point (x, y) est influencée par celle des quatre points voisins qui sont $(x + \epsilon, y)$, $(x - \epsilon, y)$, $(x, y + \epsilon)$ et $(x, y - \epsilon)$. La différence de température entre deux points, tels que (x, y) et $(x + \epsilon, y)$ par exemple, crée un flux de chaleur du second vers le premier proportionnel à la différence des températures $\theta(x + \epsilon, y) - \theta(x, y)$. L'équilibre en (x, y) est réalisé si les flux de chaleur vers le point (x, y) s'annulent mutuellement, ce qui donne

$$\theta(x + \epsilon, y) + \theta(x - \epsilon, y) + \theta(x, y + \epsilon) + \theta(x, y - \epsilon) - 4\theta(x, y) = 0 .$$

Il est facile de simuler (sur ordinateur) le phénomène de progression vers l'équilibre en s'inspirant de ce qui précède. Une autre approche consiste à considérer la version infinitésimale du problème. En écrivant le développement de Taylor de θ à l'ordre 2, on obtient

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

ce qui est l'équation de Laplace.

Nous remplacerons le segment $[-l/2, l/2]$ par le segment $[0, l]$, pour mieux exprimer la symétrie. Surtout, dans un premier temps, pour éviter une délicate question de discontinuité qui n'avait pas troublé Fourier, nous allons changer un peu les conditions aux limites et supposer la température du côté chauffé définie par une fonction du type $f(x) = x$ si $x \leq l/2$ et $f(x) = l - x$ si $x \geq l/2$.

Nous allons d'abord chercher des solutions de l'équation de Laplace du type

$$\theta(x, y) = u(x)v(y)$$

en ne retenant des conditions aux limites que celles qui concernent les trois côtés froids. L'équation donne

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = -\frac{v''(y)}{v(y)}$$

là où θ , donc u et v , ne s'annule pas. Comme le premier membre ne dépend pas de y et que le second ne dépend pas de x , l'un et l'autre ont une valeur constante k . Considérons l'équation

$$u''(x) = ku(x)$$

et intégrons-y la condition que θ doit être nulle sur les côtés verticaux, ce qui signifie que $u(0) = u(l) = 0$. Pour quelles valeurs de k peut-il y avoir des solutions non identiquement nulles?

Pour $k > 0$ on obtient des combinaisons de $e^{\sqrt{k}x}$ et $e^{-\sqrt{k}x}$; la condition s'exprime par un système de Cramer qui n'admet pas d'autre solution que 0. Pour $k = 0$ on a une solution affine et la résultat est le même.

Il reste à considérer le cas où $k = -\lambda^2$. La solution est trigonométrique et la condition implique que ce soit, à un facteur près, un sinus $\sin(\lambda x)$ où $\lambda = n\pi/l$, donc du type

$$u_n(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)$$

où n est un nombre entier que l'on peut prendre > 0 .

Pour $\lambda = n\pi/l$, l'autre équation donne

$$v_n''(y) = \lambda^2 v_n(y)$$

et, compte-tenu de la condition $v_n(h) = 0$ se résoud en

$$v_n(y) = \sinh\left(n\frac{\pi}{l}(h - y)\right)$$

à un facteur près.

Jusqu'ici nous n'avons pas considéré la condition sur le côté de l'axe des x . Il n'y a aucune raison qu'on puisse la vérifier, sauf dans le cas où la donnée f est elle-même sinusoïdale. Cependant l'équation de Laplace et les autres conditions sont de nature linéaire. Une combinaison de solutions sera encore une solution. Par conséquent on peut chercher à exprimer f comme une combinaison des u_n , voire une combinaison infinie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)$$

ce qui fait écrire donc f comme la somme d'une série de sinus.

Une série de sinus du type ci-dessus définit une fonction impaire de période $2l$. Si nous prolongeons f , d'abord par imparité sur $[-l, 0]$ puis par périodicité, la relation s'étend à toute la droite.

Un problème plus général, comprend le cas des fonctions impaires, celui des fonctions paires (comme dans le véritable exemple de Fourier qui considérait $[-l/2, l/2]$ au lieu de $[0, l]$), et les autres. Nous remplacerons les fonctions sinus et cosinus par des exponentielles imaginaires et chercherons à décomposer une fonction périodique quelconque.

Coefficients de Fourier.

C'est maintenant le problème de décomposer une fonction f , qui est par exemple 1-périodique, en une série

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}$$

que nous considérons.

Si la sommation en n sur \mathbf{Z} correspond à une *synthèse* des fonctions $e^{2\pi i n x}$, la recherche des c_n pour une fonction périodique f donnée est l'*analyse* correspondante.

Un cas particulier est celui où la série c_n est absolument convergente, auquel cas la série de droite plus haut converge normalement. En sommant terme à terme sur une période, il vient

$$c_n = \int_{\mathbf{T}} e^{-2\pi i n t} f(t) dt$$

puisque

$$\int_{\mathbf{T}} e^{-2\pi i n t} e^{2\pi i p t} dt = \int_{\mathbf{T}} e^{2\pi i (p-n)t} dt$$

où le symbole de Kronecker δ_{np} vaut 1 si $p = n$ et 0 sinon.

De façon générale, dès que la fonction 1-périodique f est intégrable sur une période, c'est-à-dire dès qu'elle définit un élément de l'espace $L^1(\mathbf{T})$ des (classes pour l'égalité pp des) fonctions 1-périodiques intégrables sur une période, on peut définir son coefficient de Fourier $c_n(f)$, ou c_n quand il n'y a pas de confusion à craindre, de cette façon.

N.B. C'est aussi l'espace des fonctions f qui sont 1-périodiques et localement intégrables, i.e. telles que chaque point admette un intervalle non nul centré en ce point sur lequel f soit intégrable. Comme un segment de période peut alors être recouvert par un nombre fini de tels intervalles, la fonction f y est aussi intégrable. Cependant on ne voit pas l'intérêt de l'intégrabilité locale, ce que fait J.-M. Bony dans son cours à l'X.

Pour une période T générale, on prendrait

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega n x}$$

et

$$c_n = \int_{\mathbf{T}} e^{-i\omega n t} f(t) dt .$$

Par ailleurs une autre façon d'écrire la décomposition est

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)$$

sachant que l'on passe facilement des c_n aux a_n et b_n et inversement et que

$$a_n = \int_{\mathbf{T}} \cos(n\omega t) f(t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \int_{\mathbf{T}} \sin(n\omega t) f(t) dt$$

pour $n \geq 0$ et pour $n > 0$.

N.B. Il y a deux façons d'envisager la convergence de "la" série de Fourier. On peut considérer les sommes partielles quelconques $\sum_{n=-q}^p$ où p, q tendent vers l'infini de façon indépendante. De cette façon, ce n'est pas la convergence d'une série mais deux que cela met en jeu : celle pour $n \geq 0$ et celle pour $n < 0$ par exemple.

On peut, à l'inverse, considérer uniquement les sommes partielles symétriques $\sum_{n=-p}^p$. Cela revient alors à considérer la convergence de la seule série trigonométrique, laquelle est une vraie série.

On trouve très souvent dans les ouvrages les énoncés exprimés pour les sommes symétriques ou, ce qui revient au même, la série trigonométrique. A une exception près, nous verrons que la restriction est inutile.

Fonctions de base.

Les séries de Fourier apparaissent comme des combinaisons linéaires infinies des fonctions e_n définies par

$$e_n(t) = e^{in\omega t}$$

pour n dans \mathbf{Z} . Les combinaisons linéaires **finies** de ces fonctions sont les **polynômes trigonométriques**. Le calcul fait dans le cas absolument convergent montre que pour un polynôme trigonométrique $f = \sum \gamma_n e_n$ où les γ_n sont nuls sauf un nombre fini, ces γ_n sont les coefficients de Fourier de f , de sorte que f est la somme de sa série de Fourier.

Transposition.

Voici un énoncé qui étend un peu la stratégie d'identification qui nous a conduit à la formule des c_n . Dans le cadre des séries de Fourier, son utilité est relativement faible.

Proposition. Soient f est une fonction 1-périodique intégrable et $(d_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une série de $l^1(\mathbf{Z})$. Alors

$$\langle (c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}, (d_n)_{n \in \mathbf{Z}} \rangle = \langle f, \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{2\pi i n x} \rangle$$

dans le sens que

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \overline{c_n(f)} \cdot d_n = \int_0^1 \overline{f(x)} \cdot \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n e^{2\pi i n x} dx .$$

N.B. Dans la série on multiplie le terme général d'une série de $l^1(\mathbf{Z})$ par un terme général borné; dans l'intégrale on multiplie une fonction bornée par une fonction intégrable.

En remplaçant f par \bar{f} et n par $-n$, il s'agit de voir que

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) \cdot d_n = \int_0^1 f(x) \cdot \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n e^{-2\pi i n x} dx$$

et il suffit pour cela d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries.

Lorsque l'on prend pour f la fonction $e^{2\pi inx}$, on retrouve le fait que d_n est le coefficient de Fourier de la somme $\sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n e^{-2\pi inx}$.

Symétrie, conjugaison, translation, changement d'échelle.

Dans tout ce qui suit de ce paragraphe les vérifications sont immédiates.

Si l'on remplace la fonction f par la fonction \check{f} définie par

$$\check{f}(x) = f(-x)$$

l'effet sur les coefficients de Fourier est semblable; on a

$$c_n(\check{f}) = c_{-n}(f) .$$

Par ailleurs les coefficients de la fonctions conjuguée \bar{f} s'obtiennent en conjuguant et symétrisant, soit :

$$c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)} .$$

En particulier si la fonction f est paire, les coefficients sont symétriques. Si elle est réelle et paire, ils sont réels et symétriques : on a une série de cosinus avec des a_n réels.

De même si la fonction f est impaire, les coefficients sont antisymétriques. Si elle est réelle et impaire, ils sont imaginaires purs et antisymétriques : on a une série de sinus avec des b_n imaginaires purs.

Si l'on translate la fonction f de a pour obtenir la fonction $g = \tau_a f$ définie par

$$\tau_a f(x) = f(x - a) ,$$

alors le coefficient c_n est multiplié par $e^{-i\omega an}$; ainsi

$$c_n(g) = e^{-i\omega an} c_n(f) .$$

Dans l'autre sens, si l'on multiplie la fonction f par $e^{-i\omega px}$, où p est un nombre entier relatif, pour obtenir la fonction g définie par $g(x) = e^{-i\omega px} f(x)$, alors les coefficients sont translatés de p , ce qui donne

$$c_n(g) = c_{n-p}(f) .$$

Supposons maintenant que l'on opère sur x un changement d'échelle, pour obtenir

$$g(x) = f(kx)$$

où k est un nombre entier relatif non nul, ce qui fait que g admet aussi la période T donnée pour f . Alors les coefficients $c_n(g)$ pour lesquels n n'est pas multiple de k sont nuls, et

$$c_{kn}(g) = \frac{1}{|k|} c_n(f) .$$

En particulier si une fonction f admet aussi une période plus petite que la période considérée, une partie de ses coefficients seront nuls.

Convolution.

Si f et g sont dans $L^1(\mathbf{T})$ on a

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$$

où le produit de convolution est défini par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{T}} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbf{T}} f(x-t)g(t)dt$$

pour presque tout x .

Le produit de convolution est caractérisé par la propriété suivante : on a

$$\int_{\mathbf{T}} (f * g)(x)\phi(x)dx = \int \int_{\mathbf{T} \times \mathbf{T}} f(t)g(u)\phi(t+u)dtdu$$

pour toute fonction ϕ périodique mesurable bornée; on peut aussi se restreindre aux fonctions ϕ périodiques de classe C^∞ .

Rappelons comment on établit cela. Soit ϕ une fonction périodique mesurable bornée. La fonction

$$f(t)g(u)\phi(t+u)$$

est intégrable sur $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ puisque

$$\int \int_{\mathbf{T} \times \mathbf{T}} |f(t)||g(u)||\phi(t+u)|dtdu \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1$$

où le second membre est fini. Effectuons le changement de variable qui fait passer de (t, u) à (t, x) où $x = t + u$, pour lequel le déterminant jacobien vaut 1. La fonction

$$f(t)g(x-t)\phi(x)$$

est alors intégrable sur $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$. Par Fubini, d'abord l'intégrale en t existe pour presque tout x , ce qui fournit, en prenant $\phi = 1$, l'existence presque partout de $f * g$; ensuite, prenant ϕ mesurable bornée, on a la propriété mentionnée.

Par ailleurs, en prenant de nouveau $\phi = 1$, on a

$$\left| \int_{\mathbf{T}} (f * g)(x)dx \right| \leq \int \int_{\mathbf{T} \times \mathbf{T}} |f(t)g(u)|dtdu$$

de sorte que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Maintenant la propriété appliquée à la fonction particulière $e_p(x) = e^{in\omega x}$, où $p = -n$, donne le résultat cherché.

Le fait que la propriété mentionnée soit caractéristique quand on prend des fonctions ϕ mesurables bornées est facile; il faut voir que si la fonction h intégrable sur le tore vérifie $\int_{\mathbf{T}} h(x)\phi(x)dx = 0$ pour toute fonction ϕ mesurable bornée, alors elle est nulle : on posera $\phi(x) = \overline{h(x)}/h(x)$ si $h(x) \neq 0$ et $\phi(x) = 0$ sinon. De là résulterait le fait que le produit

de convolution est commutatif puisque la propriété mentionnée fait jouer à f, g des rôles symétriques; cependant la vérification directe est simple.

Remarque. Que la propriété soit caractéristique pour des ϕ de classe \mathcal{C}^∞ est plus délicat et n'est pas indispensable à la suite. Il faut voir qu'une fonction intégrable f sur le tore est caractérisée par les $\int_{\mathbf{T}} f(x)\phi(x)dx$ lorsque ϕ parcourt les fonctions \mathcal{C}^∞ sur le tore, c'est-à-dire par la distribution qu'elle définit. Nous allons voir dans le paragraphe qui suit que l'on peut même se restreindre aux fonctions ϕ du type e_p .

Caractérisation des fonctions de $L^1(\mathbf{T})$.

Nous montrons ici qu'une fonction f de $L^1(\mathbf{T})$ est caractérisée par ses coefficients de Fourier $c_n(f)$, autrement dit que si $c_n(f) = 0$ pour tout n dans \mathbf{Z} , alors $f = 0$ presque partout. Ce n'est pas indispensable à la suite. De plus, pour une fonction de $L^2(\mathbf{T})$, la caractérisation sera une conséquence de la densité des polynômes trigonométriques.

Nous utilisons ici la convolution sur le tore et une unité approchée ϕ_n faite de combinaisons linéaires des e_p , comme celle qui sera introduite pour établir la densité évoquée. Nous y renvoyons pour les détails.

Prenons le cas de la période 1. D'abord, si f est dans $L^1(\mathbf{T})$, le produit de convolution $f * \phi_n$ est une combinaison linéaire des $f * e_p$ où

$$(f * e_p)(x) = \int_0^1 f(t)e^{2\pi ip(x-t)} dt = c_p(f)e^{2\pi ipx}$$

de sorte que $f * \phi_n$ est une combinaison linéaire des fonctions $c_p(f)e_p$. Si les coefficients de Fourier de f sont nuls, les fonctions $f * \phi_n$ sont donc nulles.

Ensuite on va montrer que la suite $f * \phi_n$ converge vers f dans $L^1(\mathbf{T})$, ce qui achèvera la démonstration. Pour le voir, on écrit

$$(f * \phi_n)(x) - f(x) = \int_0^1 \phi_n(t)(f(x-t) - f(x))dt .$$

Par Fubini on majore $\phi_n * f - f$ en norme $\| \cdot \|_1$ par

$$\int_0^1 \int_0^1 \phi_n(t)|f(x-t) - f(x)|dtdx \leq 2\|f\|_1 \int_{\alpha \leq |t| \leq 1/2} \phi_n(t)dt + \sup_{|t| \leq \alpha} \int_0^1 |f(x-t) - f(x)|dx$$

où $0 < \alpha \leq 1/2$. La difficulté est de montrer que l'intégrale $\int_0^1 |f(x-t) - f(x)|dx$ tend vers 0 quand t tend vers 0. Cela fait, on choisira d'abord α assez petit, puis N assez grand et l'on considérera les $n \geq N$.

Pour établir la limite cherchée, le plus simple est de commencer par le cas où f est continue : c'est la continuité sous l'intégrale. Maintenant on se ramène au cas d'une fonction continue à l'aide du lemme énoncé à propos du théorème de Riemann-Lebesgue, appliqué à une suite $t_n \rightarrow 0$. On a en effet

$$\left| \int_0^1 |f(x-t_n) - f(x)|dx \right| \leq 2\|f\|_1 .$$

Maintenant il faut connaître a priori la densité des fonctions continues dans L^1 , ce dont on discutera aussi à propos du théorème de Riemann-Lebesgue.

Riemann-Lebesgue.

Le théorème, dit de Riemann-Lebesgue, n'est pas indispensable à la suite. De plus, pour une fonction de $L^2(\mathbf{T})$, la propriété sera immédiate. Cependant c'est un bon sujet qui développe des techniques utiles. Le théorème s'énonce ainsi.

Proposition. Si f est dans $L^1(\mathbf{T})$, c'est-à-dire intégrable sur le tore, alors la suite c_n tend vers zéro quand $n \rightarrow \pm\infty$.

On commence par faire la démonstration pour une fonction d'un sous-espace dense D de $L^1(\mathbf{T})$ en s'appuyant sur le fait évident que

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_1$$

et la propriété qui suit.

Lemme. Soient E, F des espaces normés (u_n) une suite de $L(E, F)$ bornée en norme d'opérateur, i.e. vérifiant $\|u_n\| \leq C$ pour tout n , où C est une constante > 0 . Si la suite u_n converge simplement vers 0 sur une partie dense D de E , alors c'est aussi vrai sur tout E .

Remarque. On a des énoncés semblables pour une limite non nulle ou pour la propriété de Cauchy.

Soit en effet x dans E . Etant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver d'abord y dans D tel que $\|x - y\| \leq \epsilon/2C$, puis N tel que $\|u_n(y)\| \leq \epsilon/2$ pour $n \geq N$. Alors, pour $n \geq N$, on a aussi

$$\|u_n(x)\| \leq \|u_n(x - y)\| + \|u_n(y)\| \leq C\|x - y\| + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

et la propriété est démontrée.

Dans notre exemple, on a plusieurs possibilités pour le choix de D . On prendra $T = 1$ pour simplifier.

On peut choisir les fonctions **en escalier**, ce qui revient à faire la démonstration pour la fonction indicatrice f d'un intervalle $[a, b]$ inclus dans $[0, 1]$. On a

$$c_n = \int_a^b e^{-2\pi int} dt = -\frac{e^{-2\pi int}}{2\pi in} \Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{e^{2\pi ina}}{2\pi in} - \frac{e^{2\pi inb}}{2\pi in}$$

pour $n \neq 0$ et l'on majore $|c_n|$ par $1/\pi|n|$.

Dans ce cas la densité peut résulter, par exemple, de la définition de l'intégrale; nous reviendrons sur ce point.

On peut choisir les fonctions **continues et affines par morceaux**. Comme on le verra en détail plus loin, pour une telle fonction f , on a

$$c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int} dt = \frac{1}{2\pi in} \int_0^1 f'(t)e^{-2\pi int} dt$$

en intégrant par parties, et on majore $|c_n|$ par $M/2\pi|n|$ où M est la plus grande pente en valeur absolue.

Il est facile d'approcher uniformément, donc aussi dans $L^1(\mathbf{T})$, une fonction f continue par une fonction g qui est en plus affine par morceaux, en utilisant la continuité uniforme : on considère un pas $h = 1/n$ assez petit et on raccorde de façon affine les valeurs aux points $x_k = kh$ pour $k = 0, \dots, n$.

Précisément, étant donné $\epsilon > 0$, on choisit $h = 1/n$ assez petit pour que $|x - y| \leq h$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. si alors x est un point de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, donc de la forme $x = (1 - t)x_k + tx_{k+1}$, de sorte que $g(x) = (1 - t)f(x_k) + tf(x_{k+1})$. On a

$$|f(x) - f(x_k)| \leq \epsilon, \quad |f(x) - f(x_{k+1})| \leq \epsilon,$$

d'où

$$|f(x) - g(x)| = |(1 - t)[f(x) - f(x_k)] + t[f(x) - f(x_{k+1})]| \leq \epsilon.$$

Ensuite l'approximation, dans $L^1(\mathbf{T})$, d'une fonction de cet espace par une fonction continue relève de la construction de l'intégrale.

Voyons comment opérer à partir de la construction la plus répandue de l'intégrale, qui passe par celle des fonctions mesurables qui sont étagées, i.e qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. On se ramène d'abord à approcher une telle fonction, puis à la fonction indicatrice 1_A d'une partie mesurable A . Étant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver une partie compacte K et une partie ouverte U telles que $\text{mes}(U \cap K^c) \leq \epsilon$. Soit alors ϕ une fonction continue à valeurs dans $[0, 1]$ égale à 1 sur K et nulle en dehors de U , comme le théorème de Tietze-Urysohn nous en fournit. On a

$$\int |1_A - \phi| \leq \text{mes}(U \cap K^c) \leq \epsilon$$

et la démonstration est achevée.

Références. La caractérisation de la mesurabilité de A que nous avons donnée est utilisée comme définition dans l'ouvrage de J. Faraut. On la trouve dans celui de W. Rudin (RCA p 50) avec une partie fermée plutôt que compacte, ce qui ne change rien en général, encore moins quand les parties fermées sont compactes; il en fait une utilisation semblable (RCA p 56).

On peut aussi choisir des fonctions de **classe** \mathcal{C}^1 et régulariser les fonctions continues par convolution. On considère une fonction continûment dérivable positive ϕ_1 nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$ et d'intégrale 1, comme $\phi(x) = \alpha(4 - x^2)^2$ ou $\phi(x) = \beta \cos^2(\pi x)$ où les constantes α, β ont été ajustées pour que l'intégrale vale 1 et où l'on a prolongé ces fonctions par 0 hors de $[-1/2, 1/2]$. Ensuite on définit ϕ_n par

$$\phi_n(x) = n\phi(nx)$$

pour $n \geq 1$, puis on rend cette fonction 1-périodique. On note que $\int_{\alpha \leq |t| \leq 1/2} \phi_n(t) dt = \int_{n\alpha \leq |u|} \phi(u) du$ pour $0 < \alpha \leq 1/2$. On obtiene une unité approchée sur le tore et on renvoie à la densité des polynômes trigonométriques pour les détails.

Dérivation.

Proposition . Si une fonction périodique f est d'une part **continue** et d'autre part **de classe \mathcal{C}^1 par morceaux**, alors on peut dériver sa série de Fourier terme à terme en

$$c_n(f') = in\omega c_n(f) .$$

N.B. Dans ce cadre, on dit qu'une fonction est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux si l'on peut décomposer un intervalle de période en un nombre fini de sous-intervalles sur lesquels, après avoir prolongé la fonction aux extrémités gauche ou droite par sa limite à droite ou à gauche, dont on suppose l'existence, l'on obtient une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un segment. Autrement dit on autorise des sauts entre les sous-intervalles.

Il est plus facile de définir directement une fonction continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, où, comme dans l'énoncé, le "par morceaux" s'applique seulement à la "classe \mathcal{C}^1 ". Pour une telle fonction, on peut décomposer un segment de période en un nombre fini de segments sur lesquels la fonction est de classe \mathcal{C}^1 .

N.B. La fonction n'est évidemment pas supposée dérivable, la dérivée f' n'étant pas définie a priori aux points de la subdivision considérée.

Remarque. Dans tous les cas la fonction est dérivable au sens des distributions. Si elle présente un saut, sa dérivée va comprendre un terme impulsionnel. On vérifie aisément que l'impulsion de Dirac périodisée dans la période 1, qui porte le nom de *Peigne*, a tous ses coefficients de Fourier égaux à 1. On vérifie par ailleurs qu'un saut d'amplitude 1 vers le haut produit un terme en $1/2\pi in$ pour $n \neq 0$: voir l'exemple pour le phénomène de Gibbs donné plus loin. En cas de sauts formule de dérivation reste valable, à condition de dériver f au sens des distributions.

N.B. En restant élémentaire, il est bon de retenir qu'un saut produit un terme de l'ordre de $1/n$, qui s'oppose à la convergence absolue. Cela permet de vérifier l'exactitude des calculs.

Passons à la démonstration. Soit f une fonction 1-périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux; par intégration par parties il vient

$$\int_0^1 f'(t)e^{-2\pi int} dt = 2\pi in\omega \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int} dt$$

puisque par continuité et périodicité les termes tout intégrés disparaissent.

On applique en effet l'intégration par parties sur les intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ d'une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$. Les termes tous intégrés sont du type

$$f(t)e^{-2\pi int} \Big|_{t=a_k+0}^{t=a_{k+1}-0} .$$

Par exemple la valeur en $a_k + 0$ est détruite par celle en $a_k - 0$ du terme tout intégré précédent, sauf si $k = 0$, auquel cas la valeur en $0 + 0$ est détruite par celle en $1 - 0$, qui est aussi celle en $0 - 0$.

Remarque. si f est de classe \mathcal{C}^k , la propriété de dérivation terme à terme, jointe à $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$, montre que $c_n = O(1/n^k)$. En particulier si f est de classe \mathcal{C}^∞ , la suite des c_n converge rapidement vers 0.

Séries de Fourier Théorie L^2 et conséquences

A partir de maintenant, nous nous demandons si la série de Fourier va représenter la fonction dont elle est tirée. En fait la réponse est toujours positive, même si nous ne le vérifierons que dans le cas L^2 . Cependant il reste à préciser en quel sens la série converge vers la fonction. La réponse dépendant de la nature de cette dernière.

Un trait dominant de l'Analyse mathématique moderne est de ne considérer que la convergence dans un espace fonctionnel : convergence normale ou uniforme, dans L^2 , au sens des distributions, le dernier cas étant en dehors de notre objectif. Etablir la convergence en un point particulier, surtout s'il s'agit de la convergence des sommes symétriques, n'est pas l'objectif principal. Nous verrons même qu'il s'agit en fait d'une autre question que celle de savoir si la série représente la fonction. Pourtant tout le monde en parle ou presque : le théorème de Dirichlet est le plus cité de ceux sur les séries de Fourier.

En plus on ne peut pas tirer beaucoup d'une convergence simple. Par exemple si une série de Fourier converge partout vers 0, peut-on dire que tous les c_n sont nuls? La réponse est oui, mais c'est difficile, insensible à l'attaque par des outils conceptuels et cela ne sert à rien.

Fonctions périodiques de carré sommable.

Soit $L^2(\mathbf{T})$ l'espace vectoriel des (classes pour l'égalité presque partout de) fonctions à valeurs complexes périodiques, mesurables, de carré intégrable sur une période, muni du produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{T}} \overline{f(t)} g(t) dt$$

et de la norme associée, appelée norme de la convergence en moyenne quadratique,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

C'est un **espace de Hilbert**.

Les coefficients de Fourier de la fonction f de $L^2(\mathbf{T})$ s'interprètent comme les produits hermitiens

$$c_n = \langle e_n, f \rangle$$

de e_n avec f .

N.B. L'espace $L^2(\mathbf{T})$ est inclus dans $L^1(\mathbf{T})$; plus précisément

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2$$

par Cauchy-Schwartz. La définition intégrale des c_n vaut pour une fonction de $L^1(\mathbf{T})$ quelconque, mais son interprétation comme produit hermitien ne vaut en revanche que pour une fonction de $L^2(\mathbf{T})$.

Dans l'espace $L^2(\mathbf{T})$, les fonctions e_n considérées plus avant constituent, lorsque n parcourt \mathbf{Z} , un système orthonormal; autrement dit

$$\langle e_n, e_p \rangle = \delta_{n,p}$$

pour tous les nombres entiers relatifs n, p , avec la notation de Kronecker.

Nous allons voir que *les sommes partielles (finies mais quelconques) de la série de Fourier s'interprètent comme des projections.*

Si J est une partie finie de \mathbf{Z} , la projection orthogonale d'une fonction f de $L^2(\mathbf{T})$ sur le sous-espace vectoriel engendré par les e_n où n parcourt J , est l'unique u_J pour lequel $f - u_J$ est orthogonal au sous-espace mentionné, i.e. $\langle e_n, u_J \rangle = \langle e_n, f \rangle$ pour n dans J ; il est donné par

$$u_J = \sum_{n \in J} \langle e_n, f \rangle e_n = \sum_{n \in J} c_n(f) e_n$$

précisément.

On montre d'abord l'unicité de u_J en supposant le problème résolu avec

$$u_J = \sum_{n \in J} \gamma_n e_n ,$$

la condition d'orthogonalité

$$0 = \langle e_p, f - u_J \rangle = \langle e_p, f \rangle - \gamma_p$$

donnant $\gamma_p = \langle e_p, f \rangle = c_p(f)$. On établit l'existence en montrant que l'expression obtenue convient.

Par Pythagore il vient alors

$$\|u_J\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f - u_J\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

soit

$$\sum_{n \in J} |\langle e_n, f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$$

d'où, en prenant la borne supérieure sur J , l'inégalité, dite de **Bessel**

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\langle e_n, f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt$$

en explicitant.

N.B. Il n'est pas nécessaire d'invoquer le théorème de projection sur une partie convexe fermée générale d'un espace de Hilbert.

Densité des polynômes trigonométriques.

Le point crucial de la théorie est le fait que tout élément de $L^2(\mathbf{T})$ peut être approché par un polynôme trigonométrique, que nous avons défini comme une combinaison linéaire (finie bien entendu) des fonctions de base e_n .

Il revient au même de dire que la famille (e_n) engendre un sous-espace vectoriel dense, ce qu'on traduit en disant qu'elle est **totale**.

Avant d'établir cette densité, nous allons en tirer des conséquences.

Version élémentaire : convergence en moyenne quadratique.

Nous allons commencer par présenter de façon concrète la propriété suivante : une fonction de $L^2(\mathbf{T})$ est somme dans cet espace de sa série de Fourier.

Soit donc f une fonction de $L^2(\mathbf{T})$. On se donne $\epsilon > 0$. On vient de dire qu'il existe un polynôme trigonométrique $g = \sum_{n \in J} \gamma_n e_n$ tel que $\|f - g\|_2 \leq \epsilon$. Si l'on choisit N de façon que $J \subset [-N, N]$, alors pour tous $p, q \geq N$, par comparaison d'un côté de l'angle droit à l'hypoténuse dans le triangle rectangle de sommets f, g et la projection

$$h = \sum_{n=-q}^p c_n(f) e_n$$

de f sur le sous-espace engendré par e^{-q}, \dots, e_p , il vient

$$\|f - h\|_2 = \left\| f - \sum_{n=-q}^p c_n(f) e_n \right\|_2 \leq \epsilon .$$

Ainsi avons-nous

$$\lim_{p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=-q}^p c_n(f) e_n \right\|_2 = 0$$

ou encore en explicitant

$$\lim_{p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \left| f(t) - \sum_{n=-q}^p c_n(f) e^{i\omega n t} \right|^2 dt = 0 .$$

Cette relation exprime la **convergence en moyenne quadratique** de la série de Fourier vers f . C'est en ce sens que la série de Fourier représente ici la fonction. On notera qu'il n'est pas besoin de prendre des sommes symétriques.

De plus, par continuité de la norme, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt$$

ce qui constitue l'égalité de **Parseval**.

En effet

$$\|h\|_2^2 = \sum_{n=-q}^p |c_n(f)|^2$$

a pour limite $\|f\|_2^2$ quand p, q tendent vers l'infini. On peut expliciter la continuité de la norme en écrivant

$$\|h\|_2 \geq \|f\|_2 - \|f - h\|_2 \geq \|f\|_2 - \epsilon$$

d'où

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \right)^{1/2} \geq \|f\|_2$$

en passant à la limite quand p, q tendent vers l'infini.

En particulier une fonction de $L^2(\mathbf{T})$ dont tous les coefficients de Fourier sont nuls est nulle (presque partout).

Version savante : isomorphisme de l^2 sur L^2 .

On peut formuler autrement la densité considérée en disant que la famille (e_n) , où n parcourt \mathbf{Z} , dont nous avons vu qu'elle était orthonormée, constitue une **base hilbertienne**.

Établissons en effet ce qui est un cas particulier d'une propriété générale des bases hilbertiennes : l'application qui à la famille (c_n) associe la fonction

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e_n$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert

$$l^2(\mathbf{Z}) \rightarrow L^2(\mathbf{T})$$

dont l'isomorphisme inverse

$$L^2(\mathbf{T}) \rightarrow l^2(\mathbf{Z})$$

associe à la fonction f la famille (c_n) donnée par

$$c_n = \langle e_n, f \rangle .$$

Ici l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ est celui des familles indexées par \mathbf{Z} de nombres complexes vérifiant

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

muni du produit hermitien

$$\langle (c_n), (d_n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} d_n .$$

Par ailleurs un isomorphisme d'espace de Hilbert est une application linéaire qui conserve le produit hermitien qui admet un inverse du même type; en fait la bijectivité suffit.

Commençons par définir la première application, qui sera évidemment linéaire, sur une famille (c_n) de $l^2(\mathbf{Z})$. Nous devons juste établir la convergence de la série de fonctions considérée dans $L^2(\mathbf{T})$. Pour cela on utilise le critère de Cauchy, ce qui suppose que l'on sait déjà que l'espace $L^2(\mathbf{T})$ est **complet** : c'est le théorème de Riesz-Fisher. On a

$$\left\| \sum_{n=p}^q c_n e^{2\pi i n t} \right\|_2^2 = \sum_{n=p}^q |c_n|^2 .$$

Étant donné $\epsilon > 0$ on peut rendre le membre de droite inférieur à ϵ pour $p, q \geq N$ ou $p, q \leq -N$, si N est choisi assez grand. Il en est donc de même du membre de droite.

Pour définir la seconde application, qui sera aussi linéaire de façon évidente, sur une fonction f de $L^2(\mathbf{T})$, il suffit de remarquer que

$$\sum_{n=-q}^p |\langle e_n, f \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

ce qu'on a déjà rencontré comme l'inégalité de Bessel; en prenant la limite quand p, q tendent vers l'infini, on voit que la famille $\langle e_n, f \rangle$ est dans $l^2(\mathbf{Z})$.

Quand on compose les deux applications, dans un ordre ou dans l'autre, à partir d'une suite à support fini ou d'un polynôme trigonométrique, on revient sur l'élément dont on est parti. En même temps, sur ces éléments particuliers, le produit hermitien est conservé.

Le fait que les deux applications conservent le produit hermitien et qu'en les composant l'on obtienne l'application identique de $l^2(\mathbf{Z})$ ou $L^2(\mathbf{T})$ résulte de la densité des suites à support fini dans $l^2(\mathbf{Z})$, laquelle est immédiate, et de la **densité des polynômes trigonométriques** dans $L^2(\mathbf{T})$, laquelle est le point crucial de la théorie.

N.B. On résistera à la tentation de parler de bases hilbertiennes en dehors du cadre hilbertien, qui est celui des espaces complets. En effet l'on ne parle de base que pour disposer de l'isomorphisme avec un $l^2(I)$ où I est un ensemble d'indices. C'est comme pour les espaces vectoriels : une base définit un isomorphisme de $K^{(I)}$ sur E .

N.B. La complétion de $l^2(\mathbf{Z})$ n'a pas été utilisée ici. Elle découle de celle de $L^2(\mathbf{T})$ comme elle découlerait de l'existence d'un espace hilbertien séparable. Cependant l'avantage est ridicule car la complétion de l^2 se montre très facilement alors que celle de $L^2(\mathbf{T})$, qui est une forme du théorème de Riesz-Fisher est bien plus délicate. N'oublions pas qu'elle suppose construite l'intégrale de Lebesgue.

L'exemple du théorème d'approximation de Weierstraß.

Nous allons prendre pour modèle la démonstration la plus naturelle que l'on donne du théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß, à savoir celle par convolution.

a) On définit, pour $n \geq 1$, une fonction ϕ_n sur la droite en posant

$$\phi_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\int_{-1/2}^{1/2} (1-u^2)^n du}$$

pour t dans $[-1, 1]$ et 0 en dehors.

On dit que cette suite réalise une unité approchée sur la droite, pour résumer les propriétés suivantes :

- (i) les ϕ_n sont intégrables positives;
- (ii) $\int \phi_n(t) dt = 1$;
- (iii) pour tout $\alpha > 0$, la suite $\int_{|t| \geq \alpha} \phi_n(t) dt$ tend vers 0.

Vérifions en effet (iii). D'une part on majore le numérateur par

$$\int_{|t| \geq \alpha} (1-t^2)^n dt = 2 \int_{\alpha}^1 (1-t^2)^n dt \geq 2(1-\alpha^2)^n$$

tend vers 0 comme une suite géométrique.

D'autre part on minore le dénominateur par

$$\int (1-t^2)^n dt = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq \int_0^1 (1-t^2)^n \cdot 2t dt = -\frac{1}{n+1} (1-t^2) \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1}$$

qui tend vers 0 comme l'inverse d'une suite arithmétique. C'est le numérateur qui l'emporte.

b) Nous allons approcher uniformément sur $[-1/2, 1/2]$ par une suite de polynômes la fonction continue f à support dans $[-1/2, 1/2]$, en considérant la suite $f * \phi_n$.

Si x est dans $[-1/2, 1/2]$, comme

$$(f * \phi_n)(x) = \int \phi_n(x-t)f(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_n(x-t)f(t)dt$$

où $x-t$ prend des valeurs dans $[-1, 1]$, en développant l'expression polynômiale de ϕ_n et en l'intégrant en t , on définit un polynôme en x qui coïncide avec $f * \phi_n$ sur $[-1/2, 1/2]$.

Par ailleurs

$$(f * \phi_n)(x) - f(x) = \int \phi_n(t)(f(x-t) - f(x))dt = \int_{-1}^1 \phi_n(t)(f(x-t) - f(x))dt$$

se décompose en

$$\int_{\alpha \leq |t| \leq 1} \phi_n(t)(f(x-t) - f(x))dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \phi_n(t)(f(x-t) - f(x))dt .$$

Etant donné $\epsilon > 0$ on commence par choisir $\alpha > 0$ assez petit pour que $|t| \leq \alpha$ implique $|f(x-t) - f(x)| \leq \epsilon/2$ grâce à la continuité uniforme de f . Ensuite on choisit N tel que $n \geq N$ implique $\int_{\alpha \leq |t| \leq 1} \phi_n(t) \leq \epsilon/2M$ où M majore $|f|$. Alors pour $n \geq N$ il vient $|(f * \phi_n)(x) - f(x)| \leq \epsilon$ et cela achève la démonstration.

c) Maintenant si f est continue sur $[a, b]$, on la ramène sur $[-1/4, 1/4]$ par une transformation affine en la variable et on la prolonge en une fonction continue à support dans $[-1/2, 1/2]$.

Approximation des fonctions de $L^2(\mathbf{T})$ par des polynômes trigonométriques.

Nous adaptons la démonstration précédente au cas d'une fonction f continue et 1-périodique ainsi qu'aux polynômes trigonométriques.

a) On définit, pour $n \geq 1$, une fonction ϕ_n sur le tore en posant

$$\phi_n(t) = \frac{\cos^{2n}(\pi t)}{\int_{\mathbf{T}} \cos^{2n}(\pi u) du} .$$

Cette suite réalise une unité approchée sur la droite, dans le sens que :

- (i) les ϕ_n sont dans $L^1(\mathbf{T})$ et positives;
- (ii) $\int_{\mathbf{T}} \phi_n(t) dt = 1$;
- (iii) pour tout α dans $]0, 1/2[$, la suite $\int_{\alpha \leq |t| \leq 1/2} \phi_n(t) dt$ tend vers 0.

Vérifions en effet (iii). D'une part on majore le numérateur par

$$\int_{\alpha \leq |t| \leq 1/2} \cos^{2n}(\pi t) dt = 2 \int_{\alpha}^{1/2} \cos^{2n}(\pi t) dt \leq \cos^{2n}(\pi \alpha)$$

qui tend vers 0 comme une suite géométrique.

D'autre part on minore le dénominateur par

$$\int_{\mathbf{T}} \cos^{2n}(\pi u) du = 2 \int_0^{1/2} \cos^{2n}(\pi u) du \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \cos^{2n}(\pi u) \cdot \pi \sin(\pi u) du$$

où l'intégrale de droite vaut encore

$$-\frac{1}{2n+1} \cos^{2n+1}(\pi u) \Big|_{u=0}^{u=1/2} = \frac{1}{2n+1}$$

qui aussi vers 0, mais comme l'inverse d'une suite arithmétique. La conclusion suit. C'est le numérateur qui l'emporte.

b) Nous allons commencer par approcher uniformément par une suite de polynômes trigonométriques la fonction continue et 1-périodique f , en considérant la suite $f * \phi_n$.

Comme

$$(f * \phi_n)(x) = \int_{\mathbf{T}} \phi_n(x-t) f(t) dt,$$

en explicitant l'expression de ϕ_n dans laquelle

$$\cos^2(\pi u) = \frac{2 + e^{2i\pi u} + e^{-2i\pi u}}{4}$$

et en l'intégrant en t , on obtient facilement un polynôme trigonométrique en x .

Par ailleurs

$$(f * \phi_n)(x) - f(x) = \int_{\mathbf{T}} (f(x-t) - f(x)) dt$$

se décompose en

$$\int_{\alpha \leq |t| \leq 1/2} \phi_n(t) (f(x-t) - f(x)) dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \phi_n(t) (f(x-t) - f(x)) dt.$$

Etant donné $\epsilon > 0$ on commence par choisir $\alpha > 0$ assez petit pour que $|t| \leq \alpha$ implique $|f(x-t) - f(x)| \leq \epsilon/2$ grâce à la continuité uniforme de f . Ensuite on choisit N tel que $n \geq N$ implique $\int_{\alpha \leq |t| \leq 1/2} \phi_n(t) \leq \epsilon/2M$ où M majore $|f|$. Alors pour $n \geq N$ il vient $|(f * \phi_n)(x) - f(x)| \leq \epsilon$ et cela achève la démonstration.

Remarque. Pour établir cette approximation, nous avons utilisé un noyau particulier. D'autres noyaux peuvent être utilisés comme unité approchée, par exemple celui de Fejér, voire celui de Poisson. En revanche le noyau de Dirichlet ne convient pas : d'abord il n'est pas positif.

On rappelle que le noyau de Dirichlet est

$$D_n = e_{-n} + \cdots + 1 + \cdots + e_n = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

en période 2π et que celui de Fejér est

$$F_n = \frac{D_0 + \cdots + D_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$$

en période 2π .

Ainsi $D_n * f$ est la somme partielle symétrique d'ordre n et la convergence de $F_n * f$ correspond à la convergence de cette somme au sens des moyennes de Cesaro.

Remarque. La densité des polynômes trigonométriques dans l'espace des fonctions continues sur le tore n'est qu'un cas particulier du théorème de Stone-Weierstraß. Certains y voient une application de ce dernier, comme J.-M. Bony dans l'une des démonstrations proposées dans son cours à l'Ecole polytechnique, parce qu'il n'a pas voulu se placer sur le tore.

Remarque. De l'approximation par les polynômes trigonométriques on peut déduire l'approximation par des polynômes ordinaires. Etant donnée une fonction f continue sur $[a, b]$, on commence par la prolonger en une fonction continue sur la droite à support dans un segment $[c, d]$, puis on la périodise pour une période $T \geq d - c$ de façon à ne pas brouiller ses valeurs. On approche cette dernière fonction par des polynômes trigonométriques et il ne reste plus qu'à approcher les $e^{in\omega t}$ en développant chacun en une série entière normalement convergente sur tout compact.

Références. On trouve assez rarement la densité des polynômes trigonométriques établie directement. C'est ce que fait Rudin (voir pp 88-92) avec essentiellement le même noyau que nous. C'est ce que fait aussi Faraut avec le noyau de Fejér. C'est en partie ce que font Zuily et Queffélec avec le noyau de Fejér également.

Souvent on la déduit du théorème de Dirichlet, ou, comme le fait J.-M. Bony d'un énoncé qui dit qu'une fonction régulière est représentée par sa série de Fourier. C'est dommage, car la méthode de régularisation qui donne directement la densité a une portée universelle.

c) Maintenant pour approcher une fonction de L^2 par une fonction continue, on commence par tronquer f pour en faire une fonction bornée qui l'approche: on remplace f par $\min(1, M/|f|) \cdot f$, c'est-à-dire $f(x)$ par $Mf(x)/|f(x)|$ là où $|f(x)| \geq M$, pour M assez grand. Ensuite on approche cette dernière par des fonctions continues dans L^1 en respectant la même borne M , et les tronquant au besoin de la même façon. On conclut sachant que

$$\|f - g\|_2^2 = \int |f(t) - g(t)|^2 dt \leq M \int |f(t) - g(t)| dt = 2M \|f - g\|_1$$

si $|f|, |g|$ sont bornées par M .

Convergence absolue ou normale.

On tire de la convergence dans $L^2(\mathbf{T})$ une convergence beaucoup plus explicite quand la fonction f est suffisamment régulière.

Proposition . Si une fonction périodique f est **continue** ainsi que **de classe \mathcal{C}^1 par morceaux**, alors sa série de Fourier est **absolument** (et **normalement convergente**) vers f .

N.B. Dans le cas particulier des séries de Fourier, la convergence absolue en 0 se traduit par

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)| < +\infty .$$

Autrement dit elle signifie que la famille des $c_n(f)$ est dans l^1 . Elle implique alors la convergence normale, et en particulier la convergence absolue partout.

Soit f une fonction 1-périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux; nous avons vu que

$$c_n(f') = 2\pi i n c_n(f) .$$

On tire alors de Cauchy-Schwarz, qui exprime l'inclusion de $l^2.l^2$ dans l^1 , et de l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n \neq 0} |c_n(f)| = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2\pi n} |c_n(f')| \leq \sum_{n > 0} \left(\frac{1}{2\pi^2 n^2} \right)^{1/2} \sum_{n \neq 0} \left(|c_n(f')|^2 \right)^{1/2} \leq C \|f'\|_2^2 < \infty .$$

Dans ce cas la série de Fourier de f est absolument ou normalement convergente.

Soit g la somme de cette série. Clairement $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout n entier relatif de sorte que $f = g$ dans $L^2(\mathbf{T})$, i.e. presque partout, donc partout puisque f et g sont des fonctions continues. Ainsi f est partout la somme de sa série de Fourier.

N.B. Sous les hypothèses de l'énoncé, le fait que la série de Fourier soit absolument convergente n'utilise que l'inégalité de Bessel et n'a donc pas besoin de la densité des polynômes trigonométriques.

Cependant pour savoir que la somme représentait la fonction nous avons utilisé la convergence de la série vers la fonction dans $L^2(\mathbf{T})$, laquelle repose sur la densité en question.

Maintenant il y a une autre façon de montrer que la somme

$$g = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e_n$$

coïncide avec f . Nous avons vu, au moment d'introduire les coefficients de Fourier, que $c_n(g) = c_n(f)$ dans un tel cas. Il suffit donc de savoir qu'une fonction dont tous les coefficients de Fourier sont nuls est elle-même nulle. Nous avons indiqué cette propriété pour une fonction h intégrable quelconque sur le tore, en utilisant l'approximation de l'unité (ϕ_n) constituée de polynômes trigonométriques qui nous sert à établir la densité. Cependant, pour une fonction continue comme $h = f - g$, c'est plus simple; il suffit de savoir $h * \phi_n$ converge, uniformément, vers h , propriété dont nous nous sommes explicitement servis pour établir la densité mais qui n'a pas besoin de la considération de l'espace $L^2(\mathbf{T})$.

L'espace H^1 du tore.

Le cadre simple et naturel de la convergence absolue des séries de Fourier est celui de l'espace $H^1(\mathbf{T})$. L'énoncé suivant le définit.

Proposition. Soit f une fonction périodique. Les propriétés qui suivent ci-dessous sont équivalentes.

- (i) La fonction f est dans $L^2(\mathbf{T})$ et il existe une fonction g de $L^2(\mathbf{T})$ telle que

$$\int_{\mathbf{T}} g(t)\phi(t)dt = - \int_{\mathbf{T}} f(t)\phi'(t)dt$$

pour toute fonction ϕ indéfiniment dérivable et 1-périodique.

- (ii) Quitte à la changer dans sa classe, la fonction f est continue et il existe une fonction g de $L^2(\mathbf{T})$ telle que

$$\int_0^x g(t)dt = f(x) - f(0)$$

pour tout x .

- (iii) La fonction f est dans $L^2(\mathbf{T})$ et la famille des $nc_n(f)$ est dans $l^2(\mathbf{Z})$.

Voyons d'abord, pour $T = 1$, l'équivalence des propriétés. D'abord (i) implique (iii) : il suffit d'appliquer la propriété à la fonction $\phi = e_{-n}$, pour obtenir

$$c_n(g) = \int_{\mathbf{T}} e^{-2\pi int} g(t)dt = 2\pi inc_n(f)$$

et l'on sait que $c_n(g)$ est dans $l^2(\mathbf{Z})$ par Bessel-Parseval.

Ensuite (ii) implique (i). On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\phi'(x)dx &= \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[0,x]}(t)g(t)dt \right) \phi'(x)dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_t^1 1_{[t,1]}(x)\phi'(x) \right) g(t)dt = - \int_0^1 \phi(t)g(t)dt \end{aligned}$$

où l'on a omis $f(0)$ et $\phi(1)$ sachant que $\int_0^1 \phi'(t)dt = \int_0^1 g(x)dx = 0$ puisque $\phi(1) = \phi(0)$ et $f(1) = f(0)$, et où l'intégrabilité de $f(x)g'(t)$ vient de ce que $L^2([0,1]) \subset L^1[0,1]$ comme on l'a vu.

Enfin (iii) implique (ii). On définit g comme la fonction de $L^2(\mathbf{T})$ dont les coefficients de Fourier sont donnés par les $2\pi inc_n(f)$. On peut interpréter l'intégrale de g sur $[0, x]$ comme le produit hermitien de $1_{[0,x]}$ avec g . Par l'isomorphisme hilbertien avec $l^2(\mathbf{Z})$ il vaut aussi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{\gamma_n} \cdot 2\pi inc_n(f)$$

où

$$\gamma_n = \int_0^x e^{-2\pi int} dt = \frac{1 - e^{-2\pi inx}}{2\pi in} .$$

Finalement on obtient $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{2\pi inx} - 1)c_n$, qui vaut $f(x) - f(0)$ si l'on choisit pour f le représentant continu, donné par l'intégrale ou la somme normalement convergente de la série.

N.B. Les propriétés (i) et (iii) ne concernent que la classe de f . En revanche, pour écrire (ii) et donner un sens à $f(0)$ il faut préciser que f est l'unique fonction continue de sa classe.

N.B. Pour montrer que (iii) implique (i) on écrirait la décomposition

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{2\pi int}$$

de ϕ en série de Fourier rapidement convergente, où $\sum |n\gamma_n| < +\infty$ et

$$\phi'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi in\gamma_n e^{2\pi int}$$

en particulier, et l'on intégrerait terme à terme les séries.

Remarque. La propriété (i) signifie que g est la dérivée de f au sens des distributions. Une fonction de H^1 est une fonction de $L^2(\mathbf{T})$ dont la dérivée (au sens des distributions) est dans $L^2(\mathbf{T})$. On notera qu'une telle fonction est continue; cependant, en dimension plus grande, la continuité exige davantage de dérivées.

L'implication de (ii) vers (i) vaut pour une fonction f localement intégrable; la dérivation au sens des distributions inverse l'intégration.

En résumé :

Proposition. les fonctions de l'espace H^1 du tore ont une série de Fourier absolument convergente que l'on peut dériver terme à terme une fois (au sens des distributions).

Les fonctions périodiques continues et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sont évidemment dans H^1 ; on notera que la continuité évite les termes impulsionnels dans la dérivée au sens des distributions.

L'espace H^1 du tore contient d'autres fonctions, comme la fonction 1-périodique $f_\alpha(x) = |\sin(\pi x)|^\alpha$ pour $\alpha > 1/2$, dont la dérivée, qui vaut $\pi\alpha(\sin(\pi x))^{\alpha-1} \cos(\pi x)$ sur $[0, 1]$, est dans $L^2(\mathbf{T})$. Par ailleurs il n'est pas nécessaire pour une fonction d'être dans l'espace H^1 du tore pour avoir une série de Fourier absolument convergente. C'est le cas pour la fonction f_α ci-dessus dès que $\alpha > 0$. En fait f_α serait dans H^β pour un $\beta > 1/2$, où H^β est défini avec $(1/\Gamma(\alpha)) \int_0^x (x-t)^{\beta-1} g(t) dt$ dans (ii) et $n^\beta c_n(f)$ dans (iii), mais ce serait compliqué.

Traitement d'un exemple. On a directement

$$\int_0^1 [\sin(\pi x)]^\alpha e^{-2\pi inx} dx = \frac{1}{2\pi in} \int_0^1 \frac{\pi\alpha \cos(\pi x)}{[\sin(\pi x)]^{\alpha-1}} e^{-2\pi inx} dx$$

en intégrant par parties, le terme tout intégré, qui vaut $-[\sin(\pi x)]^\alpha e^{-2\pi inx}/2\pi in$, étant nul aux extrémités. Maintenant on peut couper l'intégrale de droite en deux.

L'un vaudra

$$\int_{0 \leq |x| \leq 1/n} \frac{\pi \alpha \cos(\pi x)}{|\sin(\pi x)|^{\alpha-1}} e^{-2\pi i n x} dx .$$

On le majore en

$$2 \int_0^{1/n} \frac{\cos(\pi x)}{[\sin(\pi x)]^{\alpha-1}} dx = \frac{2}{\pi} [\sin(\pi x)]^\alpha (1/n) = O(1/n^\alpha) .$$

L'autre vaudra

$$\pi \alpha \int_{1/n}^{1-1/n} \frac{\cos(\pi x)}{[\sin(\pi x)]^{\alpha-1}} e^{-2\pi i n x} dx$$

où l'intégrale est intégrée par parties en

$$\frac{in}{\pi(n^2 - 1/4)} \left[\frac{1}{|\sin(\pi x)|^{\alpha-1}} \phi(x) \right]_{x=1/n}^{x=1-1/n} - \int_{1/n}^{1-1/n} \frac{\pi(\alpha-1) \cos(\pi x)}{|\sin(\pi x)|^{\alpha-2}} \phi(x) dx$$

si l'on a posé

$$\phi(x) = \cos(\pi x) e^{-2\pi i n x} = \frac{1}{2} (e^{(-2\pi i n + i\pi)x} + e^{(-2\pi i n - i\pi)x}) .$$

Chacun des termes du crochet est un $O(n^{\alpha-1})$. Pour la nouvelle intégrale, on majore $|\phi|$ par 1 et on intègre en $1/[\sin(\pi x)]^{1-\alpha}$ entre $1/n$ et $1 - 1/n$.

Ainsi $c_n(f_\alpha) = O(1/n^{1+\alpha})$. La série de Fourier converge absolument (et normalement).

Références. Zuily et Queffelec montrent la propriété de convergence absolue de la série de Fourier pour une fonction höldérienne d'ordre $> 1/2$, ce qui optimal en un sens mais plus difficile et moins pratique que l'appartenance à l'espace H^1 , c'est-à-dire l'appartenance de la dérivée à $L^2(\mathbf{T})$.

Pat ailleurs ils montrent que $\sum |c_n(f)|^p < +\infty$ pour une fonction f lipschitzienne et $p > 2/3$. Il est facile de voir que c'est aussi le cas pour une fonction de H^1 , mais l'intérêt en est faible.

Influence des discontinuités.

Nous allons établir la propriété suivante.

Proposition. Soit f une fonction périodique de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Les deux suites de sommes partielles de sa série de Fourier convergent uniformément sur tout segment ne contenant aucun point de discontinuité.

N.B. Il ne s'agit pas de considérer un segment sur lequel la restriction de la fonction serait continue : une extrémité pourrait être un point de discontinuité. Il s'agit bien de ne pas s'approcher des ces points.

N.B. Ici la somme partielle $\sum_{n=-q}^p$ converge uniformément quand $p, q \rightarrow \infty$; autrement dit les deux sommes partielles $\sum_{n=0}^p$ et $\sum_{n=-q}^0$ ont cette propriété. L'énoncé est presque toujours donné pour les sommes symétriques, mais la restriction est inutile.

Pour établir la proposition on se ramène, par décomposition en une somme, au cas où la fonction ne présente qu'un saut par période et où ce dernier est en 0. Considérons donc une fonction f continûment dérivable par morceaux, 2π -périodique pour simplifier les formules, discontinue seulement aux points $2k\pi$; on pose $c_n = c_n(f)$.

La fonction g définie par $g(x) = (1 - \cos x)f(x)$ est alors continue; sa série de Fourier est normalement convergente. Or, avec les formules données en début de chapitre, on a tire de

$$1 - \cos x = 1 - \frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2}e^{-ix}$$

la relation

$$c_n(g) = c_n - \frac{1}{2}c_{n-1} - \frac{1}{2}c_{n+1} .$$

Si nous calculons

$$\sum_{n=-q}^p c_n(g)e^{inx} = \sum_{n=-q}^p \left(c_n - \frac{1}{2}c_{n-1} - \frac{1}{2}c_{n+1} \right) e^{inx}$$

nous allons trouver des relations comme

$$\begin{array}{rcll} c_{n+1}(g)e^{i(n+1)x} & = & c_{n+1}e^{i(n+1)x} & -\frac{1}{2}c_n e^{i(n+1)x} & -\frac{1}{2}c_{n+2}e^{i(n+1)x} \\ c_{n-1}(g)e^{inx} & = & c_n e^{inx} & -\frac{1}{2}c_{n-1}e^{inx} & -\frac{1}{2}c_{n+1}e^{inx} \\ c_{n-1}(g)e^{i(n-1)x} & = & c_{n-1}e^{i(n-1)x} & -\frac{1}{2}c_{n-2}e^{i(n-1)x} & -\frac{1}{2}c_n e^{i(n-1)x} \end{array} .$$

En regroupant les termes où figure c_n , il vient

$$c_n e^{inx} \left(1 - \frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2}e^{-ix} \right) .$$

En sommant de $-q$ à p on obtient ainsi

$$\left(1 - \frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2}e^{-ix} \right) \sum_{n=-q}^p c_n e^{inx} = (1 - \cos x) \sum_{n=-q}^p c_n e^{inx}$$

à quatre terme près. D'abord il manque les termes

$$-\frac{1}{2}c_{-q-1}e^{-iqx} - \frac{1}{2}c_{p+1}e^{ipx} .$$

Ensuite on trouve en trop les termes

$$-\frac{1}{2}c_{-q}e^{i(-q-1)x} - \frac{1}{2}c_p e^{i(p+1)x} .$$

Pour faire plus simple, dans le cas de $\mathcal{L}^2(\mathbf{T})$, on note que la somme $\sum_{n=-q}^p c_n(g)e^{inx}$ est la projection orthogonale de

$$\left(1 - \frac{1}{2}e^{ix} - \frac{1}{2}e^{-ix} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

sur le sous-espace engendré par e_{-q}, \dots, e_p .

De toute façon, on obtient que $\sum_{n=-q}^p c_n(g)e^{inx}$ diffère de $(1 - \cos x) \sum_{n=-q}^p c_n e^{inx}$ par

$$\frac{1}{2}c_{-q}e^{i(-q-1)x} + \frac{1}{2}c_p e^{i(p+1)x} - \frac{1}{2}e^{-iqx}c_{-q-1} - \frac{1}{2}c_{p+1}e^{ipx} .$$

Comme $c_n \rightarrow 0$ par Riemann-Lebesgue ou Bessel-Parseval, chacun des quatre termes correcteurs de droite converge uniformément vers zéro. Alors $(1 - \cos x) \sum_{n=-p}^q c_n e^{inx}$ converge uniformément lorsque p ou $q \rightarrow \infty$. En divisant, on obtient encore la convergence uniforme sur tout segment où $1 - \cos x$ est minoré, du type $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ où $0 < \epsilon \leq \pi$.

Remarque. La méthode s'appliquerait sans modification à une discontinuité plus complexe qu'un saut. Il suffit en réalité que la fonction g considérée soit dans H^1 .

Que se passe-t-il maintenant aux **points de discontinuité**? Là nous devons considérer des sommes symétriques, et c'est le seul endroit où ce soit vraiment nécessaire. On se ramène encore au cas où il n'y a qu'un saut par période. En retirant une fonction qui ne présente pas de saut, il suffit en réalité de faire l'étude pour une fonction particulière, telle que celle définie par

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - x$$

entre 0 et 2π . Par imparité la série de Fourier s'annule en $x = 0$ où elle prend donc la valeur

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

si $f(x+0)$ (resp. $f(x-0)$) désigne la limite à droite (resp. à gauche) en ce point. C'est une trivialité.

Il est un peu moins simple de préciser ce qui se passe autour d'un point de discontinuité. Là on n'a pas de toute convergence uniforme des sommes symétriques, à cause du phénomène dont nous allons parler.

Cependant il ne faut pas voir l'étude des sommes symétriques comme lié à la problématique de la représentation d'une fonction par sa série. Avec la théorie L^2 , on peut considérer la chose comme largement acquise — elle le serait complètement si l'on pouvait considérer les distributions périodiques. Une fonction peut être représentée par son *spectre de Fourier*, qui la donne de ses coefficients c_n . Mais pour cela il faut *tous* les prendre. Ne considérer que ceux entre $-p$ et p revient à *tronquer* le spectre. Quels sont les effets de cette troncature? Ils peuvent être dommageables pour une fonction peu régulière.

On notera que sommer de $-p$ à p , ce qui revient à convoler avec le noyau de Dirichlet, est une troncature brutale. D'autres troncatures, celle avec le noyau de Fejér ou celle dont nous sommes servis pour l'approximation sont beaucoup plus douces.

Le phénomène de Gibbs.

On considère la fonction 1-périodique h définie par

$$h(t) = \frac{1}{2} - x$$

pour $0 < x < 1$. La somme partielle symétrique d'ordre N de sa série de Fourier est donnée par

$$h_N(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi nt)}{\pi n}$$

comme un calcul immédiat le montre.

Par ailleurs la dérivée est donnée par

$$h'_N(t) = \frac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)} - 1$$

comme on le voit en linéarisant

$$2 \sin(\pi t) [\cos(2\pi t) + \dots + \cos(2N\pi t)] .$$

Elle s'annule une première fois à partir de 0 en $1/2(N+1)$, de sorte que le premier maximum local de h_N vaut

$$\int_0^{1/2(N+1)} \left[\frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} - 1 \right] dt .$$

La limite quand $N \rightarrow \infty$ de cette valeur est

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du$$

dont une valeur approchée par défaut est

$$1 - \frac{\pi^2}{24}$$

laquelle est supérieure à 0,6. Une estimation plus précise montrerait que ce premier saut dépasse toujours de 18% environ le demi-saut en 0. Cela interdit toute convergence uniforme sur un intervalle $]0, \alpha[$.

La diffusion de la chaleur.

L'équation de diffusion de la chaleur qui régit l'évolution de la température s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

si l'on en oublie les coefficients.

On considère une barre, représentée par le segment $[0, L]$, dont les extrémités sont à une température imposée et dont la distribution de température à l'instant $t = 0$ est donnée par une fonction h . La méthode indiquée pour la plaque s'applique dans un tel exemple, qui fournit un très bon exemple d'application de la théorie des séries de Fourier.

Référence. Cet exemple est entièrement traité dans l'ouvrage de Zuily et Queffelec. On y établit notamment l'unicité, compte tenu des conditions aux limites, à l'aide d'une intégrale d'énergie, puis l'existence sous la forme d'une série de fonctions.

On fera attention à la présence d'un lapsus dans les hypothèses. La fonction h est supposée continue sur $[0, 1]$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. Or, pour une telle fonction, on sait peu de choses de la convergence du développement en série de Fourier, si ce n'est bien sûr la convergence dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{T})$. Contrairement à ce qu'affirment les auteurs, une telle fonction n'est pas de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et ne donne pas naissance, une fois prolongée par imparité, à une fonction de ce type (voir fig 1). Il n'y a aucune chance pour que la série de Fourier converge absolument en général.

Retour sur l'exemple de la plaque.

Nous reprenons l'exemple de la plaque avec la donnée de Fourier d'une température constante sur le côté de l'axe des x . En prolongeant par imparité (puis périodicité) nous obtenons une fonction discontinue dont la série de Fourier converge donc mal. Il est difficile de préciser en quoi va consister une solution.

Une façon de voir les choses est de considérer pour chaque y la distribution de température θ_y en x sur le segment qui a cette ordonnée et d'écrire l'équation sous la forme

$$\frac{d^2}{dy^2}\theta_y = -\frac{d^2}{dx^2}\theta_y .$$

Ici les dérivées sont droites : à droite on trouve la dérivée seconde de la distribution θ_y , vue comme un opérateur (linéaire) qui lui est appliqué à gauche le symbole d'une équation différentielle ordinaire du second ordre. En fait on travaillera plutôt sur des distributions $2l$ -périodiques en x , i.e. des distributions sur un tore. La relation ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{d^2}{dy^2} \int_{\mathbf{T}} \theta_y(x) \phi(x) dx = - \int_{\mathbf{T}} \theta_y \phi''(x) dx$$

où les intégrales sur le Tore sont à interpréter, plus correctement, comme l'effet sur la fonction test ϕ , laquelle est indéfiniment dérivable et 1-périodique.

Transformation de Fourier Théorie L^1 et conséquences

Nous reprenons pour la transformation de Fourier le plan que nous avons adopté pour les séries. La différence est que les fonctions considérées ne sont plus supposées périodiques.

Nous nous passerons d'introduction. Bien sûr il serait aussi possible d'utiliser un problème de diffusion de la chaleur à cette fin. A défaut on pourrait partir de la formule des coefficients de Fourier et y laisser la période tendre vers l'infini. Nous nous contenterons de l'analogie avec les séries. En l'absence de périodicité on considère toutes les fonctions $e_{\xi}(x) = e^{2\pi i \xi x}$ pour ξ réel et des sommes continues, donc des intégrales, au lieu des sommes discrètes, ou séries.

Le symbole intégral \int sans précision est là pour

$$\int_{-\infty}^{+\infty}$$

dans ce chapitre.

Intégrales de Fourier.

Si f est une fonction **intégrable** sur la droite réelle, i.e. si elle définit un élément de l'espace $L^1(\mathbf{R})$ des (classes pour l'égalité presque partout de) fonctions intégrables, nous définissons sa **transformée de Fourier directe** $\mathcal{F}f$ par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx$$

pour tout ξ réel. De façon analogue, si g est dans $L^1(\mathbf{R})$, nous définissons sa **transformée de Fourier inverse** $\overline{\mathcal{F}}(g)$ par

$$\overline{\mathcal{F}}g(x) = \int e^{2\pi i \xi x} g(\xi) d\xi$$

pour tout x réel.

Remarques.

Il est d'usage en physique de ne pas donner le même nom aux variables pour une fonction et sa transformée; par exemple on prendra d'un côté x , qui sera la variable de l'espace *direct* et de l'autre ξ , qui sera la variable de l'espace *des phases*.

Le nom de transformée inverse sera justifié par un théorème que nous établirons plus loin. C'est la transformation inverse qui correspond à la *synthèse*, qui est la sommation $\sum c_n e^{in\omega x}$ pour les séries. La transformation directe correspond à l'*analyse*, qui est le calcul des coefficients par $\int_{\mathbf{T}} e^{-in\omega t} f(t) dt$ pour les séries. Comme pour les séries, on fait d'abord l'analyse avant de faire la synthèse. C'est aussi l'analogie avec les séries qui explique le signe "moins" dans la définition de $\mathcal{F}f$.

Cependant, suivant les ouvrages on peut aussi bien trouver le signe “plus” dans l’exposant pour la transformée directe, avec toujours le signe opposé pour l’autre. Le facteur 2π de l’argument peut figurer ou non. Lorsqu’on l’omet, on place souvent le facteur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ devant les intégrales.

L’avantage de la droite sur le tore est qu’il y a, au signe dans l’exposant près, une parfaite symétrie entre la transformée directe et la transformée inverse. Nous n’énoncerons donc les propriétés que pour une seule. En revanche une difficulté majeure vient de ce que les

$$e^{\pm 2\pi i \xi x}$$

ne sont ni dans $L^1(\mathbf{R})$ ni surtout dans $L^2(\mathbf{R})$. Les intégrales de Fourier sont des combinaisons continues, par exemple dans $L^2(\mathbf{R})$, de ces exponentielles alors que les exponentielles en question ne sont pas dans l’espace. Il s’agit de combinaisons exogènes.

Une autre difficulté est liée à la nécessité fréquente de faire intervenir des conditions de support. Pour faire ressortir la différence avec les cas des séries, nous utiliserons le style *penché* dans ce cas.

Revenons aux intégrales de Fourier. Une propriété immédiate est la suivante :

Si f est dans $L^1(\mathbf{R})$, sa transformée de Fourier est continue et vérifie

$$\|\mathcal{F}f\|_{\infty} \leq \|f\|_1 .$$

D’abord la majoration est évidente. Ensuite la continuité résulte du théorème de continuité sous l’intégrale, sachant que

$$|e^{2\pi i \xi x} f(x)| \leq |f(x)|$$

où la fonction de droite est intégrable.

Symétrie, conjugaison, translation, changement d’échelle.

Dans tout ce qui suit les vérifications sont immédiates; attention seulement aux bornes (non apparentes) dans les changements de variable!

Si l’on remplace la fonction f par la fonction \check{f} définie par

$$\check{f}(x) = f(-x)$$

l’effet est semblable sur la transformée de Fourier; on a

$$\mathcal{F}\check{f} = (\check{\mathcal{F}}f) .$$

Par ailleurs la transformée de la fonction conjuguée \bar{f} s’obtient en conjuguant et symétrisant $\mathcal{F}f$, soit:

$$\mathcal{F}\bar{f} = \overline{\check{\mathcal{F}}f} .$$

En particulier si la fonction f est paire, sa transformée est paire. Si elle est réelle et paire sa transformée est réelle est paire.

De même si la fonction f est impaire, sa transformée est impaire. Si elle est réelle et impaire sa transformée est imaginaire pure et impaire.

Si l'on translate la fonction f de a pour obtenir la fonction $g = \tau_a f$ définie par

$$\tau_a f(x) = f(x - a) ,$$

alors la transformée est multipliée par la fonction $e^{-2\pi i a \xi}$; ainsi

$$\mathcal{F}g(\xi) = e^{-2\pi i a \xi} \mathcal{F}f(\xi) .$$

Dans l'autre sens, si l'on multiplie la fonction f par $e^{2\pi i a x}$ pour obtenir la fonction g définie par $g(x) = e^{2\pi i a x} f(x)$, alors la transformée est translatée de a , ce qui donne

$$\mathcal{F}g(\xi) = \tau_a(\mathcal{F}f)(\xi) = \mathcal{F}f(\xi - a) .$$

Compte-tenu du signe qui sépare la transformée directe de ce qu'on montrera être son inverse, on pourra dire qu'il y a échange entre la translation de a en x et la multiplication par $e^{-2\pi i a \xi}$.

Supposons maintenant que l'on opère sur x un changement d'échelle, pour obtenir la fonction g définie par

$$g(x) = f(kx)$$

où k est une constante réelle non nulle. Il vient alors

$$\mathcal{F}g(\xi) = \frac{1}{|k|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{k}\right) .$$

Cette dernière relation est intéressante. Pour $k > 1$, le graphe de g est plus concentré autour de l'origine que celui de f ; sur les transformées de Fourier c'est l'inverse qui se passe : le graphe de $\mathcal{F}g$ est plus étalé que celui de $\mathcal{F}f$. Si les fonctions représentent des densités de probabilités, cela veut dire qu'augmenter la précision dans l'espace direct diminue la précision dans l'espace des phases. C'est une façon d'exprimer le principe d'incertitude d'Heisenberg.

Transposition.

Enonçons une propriété facile qui se révélera très utile.

Proposition. Si f, g sont des fonctions intégrables alors

$$\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \langle f, \overline{\mathcal{F}g} \rangle$$

dans le sens que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}f(\xi)} g(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \mathcal{F}g(x) dx .$$

N.B. Sous les intégrales figurent des produits dans lesquels l'une des fonctions est intégrable et l'autre est bornée, ce qui assure l'intégrabilité du produit.

En remplaçant g par \bar{g} et conjuguant tout, la relation s'écrit plus simplement

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathcal{F}g(x) dx .$$

Elle se prouve aussitôt par Fubini, puisque la fonction

$$e^{-2\pi i \xi x} f(x) g(\xi)$$

est intégrable, vu que

$$\int \int |e^{-2\pi i \xi x} f(x) g(\xi)| dx d\xi = \int \int |f(x)| |g(\xi)| dx d\xi = \int |f(x)| dx \int |g(\xi)| d\xi < +\infty .$$

Il suffit d'intégrer en x puis ξ d'un côté et en ξ puis x de l'autre.

Exemples.

Nous aurons besoin de fonctions particulières pour remplacer les polynômes dans le cadre de la transformation de Fourier les séries trigonométriques qui avaient joué un rôle essentiel dans la théorie des séries de Fourier.

Une première famille de fonctions pour lesquelles on peut étudier la transformation est celle des noyaux de Cauchy. Pour $a > 0$, définissons des fonctions θ_a et $\hat{\theta}_a$ par

$$\theta_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

et

$$\hat{\theta}_a(\xi) = e^{-2\pi a |\xi|} .$$

On peut vérifier par un calcul élémentaire que $\mathcal{F}\theta_a = \overline{\mathcal{F}\theta_a} = \hat{\theta}_a$ et c'est un petit exercice de montrer que $\mathcal{F}\hat{\theta}_a = \overline{\mathcal{F}\hat{\theta}_a} = \theta_a$: le plus simple est d'utiliser le théorème des résidus.

Voici une autre famille, faite de fonctions gaussiennes. Toujours pour $a > 0$, posons

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi}{a} x^2}$$

et

$$\hat{\psi}_a(\xi) = e^{-\pi a \xi^2} .$$

On vérifie encore que $\mathcal{F}\psi_a = \overline{\mathcal{F}\psi_a} = \hat{\psi}_a$ et inversement. Ici on peut aussi utiliser le théorème des résidus; on peut aussi dériver en ξ sous l'intégrale.

Dans ces deux exemples les transformations \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ sont inverses l'une de l'autre. Cela vaut aussi pour leurs translatées en vertu du paragraphe précédent.

Convolution.

Si f et g sont dans $L^1(\mathbf{T})$ on a

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

où le produit de convolution est défini par

$$(f * g)(x) = \int f(t) g(x - t) dt = \int f(x - t) g(t) dt$$

pour presque tout x .

Le produit de convolution est caractérisé par la propriété suivante : on a

$$\int (f * g)(x)\phi(x)dx = \int \int f(t)g(u)\phi(t + u)dtdu$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée. On peut aussi se restreindre aux fonctions d'une classe \mathcal{S} que nous introduirons.

Rappelons comment on établit cela. Soit ϕ une fonction mesurable bornée. La fonction

$$f(t)g(u)\phi(t + u)$$

est intégrable sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ puisque

$$\int \int |f(t)||g(u)||\phi(t + u)|dtdu \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1$$

où le second membre est fini. Effectuons le changement de variable qui fait passer de (t, u) à (t, x) où $x = t + u$, pour lequel le déterminant jacobien vaut 1. La fonction

$$f(t)g(x - t)\phi(x)$$

est alors intégrable sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Par Fubini, d'abord l'intégrale en t existe pour presque tout x , ce qui fournit, en prenant $\phi = 1$, l'existence presque partout de $f * g$; ensuite, prenant ϕ mesurable bornée, on a la propriété mentionnée.

Par ailleurs, en prenant de nouveau $\phi = 1$, on a

$$\left| \int (f * g)(x)dx \right| \leq \int \int |f(t)g(u)|dtdu$$

de sorte que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Maintenant la propriété appliquée à la fonction particulière $e_\eta(x) = e^{2\pi i \eta x}$, où $\eta = -\xi$, donne le résultat cherché.

Le fait que la propriété mentionnée soit caractéristique quand on prend des fonctions ϕ mesurables bornées est facile; il faut voir que si la fonction h intégrable vérifie $\int h(x)\phi(x)dx = 0$ pour toute fonction ϕ mesurable bornée, alors elle est nulle : on posera $\phi(x) = \overline{h(x)}/h(x)$ si $h(x) \neq 0$ et $\phi(x) = 0$ sinon. De là résulte le fait que le produit de convolution est commutatif puisque la propriété mentionnée fait jouer à f, g des rôles symétriques; cependant la vérification directe est simple.

Remarque. Maintenant la propriété reste caractéristique pour des fonctions ϕ d'une classe de fonctions régulières adaptée à l'analyse de Fourier sur la droite, la classe \mathbf{S} dont nous parlerons plus loin. Il faut voir qu'une fonction intégrable f est caractérisée par les $\int f(x)\phi(x)dx$ lorsque ϕ parcourt \mathcal{S} , c'est-à-dire par la distribution tempérée qu'elle définit. Nous allons voir dans le paragraphe qui suit que l'on peut même se restreindre aux translatées des fonctions gaussiennes ψ_a données plus haut en exemple.

Caractérisation des fonctions intégrables.

Nous montrons ici qu'une fonction f de $L^1(\mathbf{R})$ est caractérisée par les intégrales de convolution $(f * \psi_a)(x)$, autrement dit que si $(f * \psi_a)(x) = 0$ pour tout x et tout $a > 0$, alors $f = 0$ presque partout.

Nous utilisons ici la convolution sur la droite ainsi que l'unité approchée particulière $\phi_n = \psi_{1/n}$ constituée de fonctions gaussiennes.

D'abord, si f est dans $L^1(\mathbf{R})$, le produit de convolution $f * \phi_n$ sera nul si les $(f * \psi_a)(x)$ sont tous nuls.

Ensuite on va montrer que la suite $f * \phi_n$ converge vers f dans $L^1(\mathbf{R})$. Pour le voir, on écrit

$$(f * \phi_n)(x) - f(x) = \int_0^1 \phi_n(t)(f(x-t) - f(x))dt .$$

Par Fubini on majore $f * \phi_n - f$ en norme $\| \cdot \|_1$ par

$$\iint \phi_n(t)|f(x-t) - f(x)|dtdx \leq 2\|f\|_1 \int_{\alpha \leq |t|} \phi_n(t)dt + \sup_{|t| \leq \alpha} \int |f(x-t) - f(x)|dx$$

où $\alpha > 0$. La difficulté est de montrer que l'intégrale $\int |f(x-t) - f(x)|dx$ tend vers 0 quand t tend vers 0. Cela fait, on choisira d'abord α assez petit, puis N assez grand et l'on considèrera les $n \geq N$.

Pour établir la limite cherchée, le plus simple est de commencer par le cas où f est continue à *support compact* : c'est la continuité sous l'intégrale de $-A-1$ à $A+1$ pour $|t| \leq 1$.

Maintenant on se ramène au cas d'une fonction continue à *support compact* à l'aide du lemme précédent, appliqué à une suite $t_n \rightarrow 0$, puisque

$$\int |f(x-t_n) - f(x)|dx \leq 2\|f\|_1$$

à condition de connaître a priori la densité des fonctions continues à *support compact* dans L^1 , ce dont discutera à propos du théorème de Riemann-Lebesgue.

En application de la propriété de transposition, nous pouvons établir l'énoncé suivant.

Proposition (réciprocité L^1). Soit f une fonction intégrable dont la transformée de Fourier $g = \mathcal{F}f$ est aussi intégrable; alors $f = \overline{\mathcal{F}g}$.

En effet, pour une gaussienne translatée ϕ , on a

$$\langle \overline{\mathcal{F}g}, \phi \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}\phi \rangle = \langle f, \overline{\mathcal{F}\mathcal{F}\phi} \rangle = \langle f, \phi \rangle .$$

D'après la caractérisation obtenue précédemment on a $f = \overline{\mathcal{F}g}$.

Riemann-Lebesgue.

Le théorème, dit de Riemann-Lebesgue, s'énonce ainsi.

Proposition. Si f est dans L^1 , alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ tend vers zéro en $\pm\infty$.

On commence par faire la démonstration pour une fonction d'un sous-espace dense D de $L^1(\mathbf{T})$ en s'appuyant sur le fait déjà vu que

$$|(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq \|f\|_1$$

et la propriété qui suit.

Lemme. Soient E, F des espaces normés (u_n) une suite de $L(E, F)$ bornée en norme d'opérateur, i.e. vérifiant $\|u_n\| \leq C$ pour tout n , où C est une constante > 0 . Si la suite u_n converge simplement vers 0 sur une partie dense D de E , alors c'est aussi vrai sur tout E .

Remarque. On a des énoncés semblables pour une limite non nulle ou pour la propriété de Cauchy.

Soit en effet x dans E . Etant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver d'abord y dans D tel que $\|x - y\| \leq \epsilon/2C$, puis N tel que $\|u_n(y)\| \leq \epsilon/2$ pour $n \geq N$. Alors, pour $n \geq N$, on a aussi

$$\|u_n(x)\| \leq \|u_n(x - y)\| + \|u_n(y)\| \leq C\|x - y\| + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

et la propriété est démontrée.

Dans notre exemple, on a plusieurs possibilités pour le choix de D .

On peut choisir les fonctions **en escalier** à *support compact*, ce qui revient à faire la démonstration pour la fonction indicatrice f d'un intervalle $[a, b]$. On a

$$\mathcal{F}(\xi) = \int_a^b e^{-2\pi i \xi x} dx = -\frac{e^{-2\pi i \xi t}}{2\pi i \xi} \Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{e^{2\pi i \xi a}}{2\pi i \xi} - \frac{e^{2\pi i \xi b}}{2\pi i \xi}$$

pour $\xi \neq 0$ et l'on majore $|\mathcal{F}(\xi)|$ par $1/\pi|\xi|$.

Dans ce cas la densité peut résulter, par exemple, de la définition de l'intégrale; nous reviendrons sur ce point.

On peut choisir les fonctions **continues affines par morceaux** à *support compact*. Comme on le verra en détail plus loin, pour une telle fonction f , on a

$$\mathcal{F}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{2\pi i \xi} \int f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

en intégrant par parties, et on majore $|\mathcal{F}(\xi)|$ par $M/2\pi|n|$ où M est la plus grande pente en valeur absolue.

Il est facile d'approcher uniformément, donc aussi dans $L^1(\mathbf{R})$, une fonction f continue à *support inclus dans* $[a, b]$ par une fonction g qui est en plus affine par morceaux, en utilisant la continuité uniforme : on considère un pas $h = (b - a)/n$ assez petit et on raccorde de façon affine les valeurs aux points $x_k = kh$ pour $k = 0, \dots, n$.

Précisément, étant donné $\epsilon > 0$, on choisit $h = (b - a)/n$ assez petit pour que $|x - y| \leq h$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. si alors x est un point de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, donc de la forme $x = (1 - t)x_k + tx_{k+1}$, de sorte que $g(x) = (1 - t)f(x_k) + tf(x_{k+1})$. On a

$$|f(x) - f(x_k)| \leq \epsilon, \quad |f(x) - f(x_{k+1})| \leq \epsilon,$$

d'où

$$|f(x) - g(x)| = |(1 - t)[f(x) - f(x_k)] + t[f(x) - f(x_{k+1})]| \leq \epsilon.$$

Ensuite l'approximation, dans $L^1(\mathbf{R})$, d'une fonction de cet espace par une fonction continue à *support compact* relève de la construction de l'intégrale.

Voyons comment opérer à partir de la construction la plus répandue de l'intégrale, qui passe par celle des fonctions mesurables qui sont étagées, i.e qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. On se ramène d'abord à approcher une telle fonction, puis à la fonction indicatrice 1_A d'une partie mesurable A . Ensuite on approche A par un $A \cap]-N, N[$, ce qui nous ramène au cas où A est inclus dans $]-N, N[$. Etant donné $\epsilon > 0$, on peut trouver une partie compacte K et une partie ouverte U incluse dans $]-N, N[$ telles que $\text{mes}(U \cap K^c) \leq \epsilon/2N$. Soit alors ϕ une fonction continue à valeurs dans $[0, 1]$ égale à 1 sur K et nulle en dehors de U , comme le théorème de Tietze-Urysohn nous en fournit. On a

$$\int |1_A - \phi| \leq 2N \text{mes}(U \cap K^c) \leq \epsilon$$

et la démonstration est achevée.

On peut aussi choisir des fonctions de **classe** \mathcal{C}^1 à *support compact* et régulariser les fonctions continues par convolution. On considère une fonction continûment dérivable positive ϕ_1 nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$ et d'intégrale 1, comme $\phi(x) = \alpha(4 - x^2)^2$ ou $\phi(x) = \beta \cos^2(\pi x)$ où les constantes α, β ont été ajustées pour que l'intégrale vale 1 et où l'on a prolongé ces fonctions par 0 hors de $[-1/2, 1/2]$. Ensuite on définit ϕ_n par

$$\phi_n(x) = n\phi(nx)$$

pour $n \geq 1$. On note que $\int_{\alpha \leq |t|} \phi_n(t) dt = \int_{n\alpha \leq |u|} \phi(u) du$ pour $\alpha > 0$. On obtient une unité approchée sur la droite.

Dérivation.

L'énoncé suivant correspond à la dérivation terme à terme des séries de Fourier.

Proposition. Soit f une fonction d'une part continue et d'autre part de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, telle que f et f' soient intégrables; alors

$$\mathcal{F}f'(\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F}f(\xi) .$$

N.B. Dans ce cadre on dit qu'une fonction est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux si l'on peut décomposer tout segment en un nombre fini de sous-intervalles sur lesquels, après avoir prolongé la fonction aux extrémités gauche ou droite par sa limite à droite ou à gauche, dont on suppose l'existence, l'on obtient une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un segment. Autrement dit on autorise des sauts entre les sous-intervalles.

Pour le voir il suffit d'intégrer par parties, ce qui donne

$$\int_{-A}^A e^{-2\pi i \xi x} f'(x) dx = e^{-2\pi i \xi x} f(x) \Big|_{x=-A}^{x=A} + 2\pi i \xi \int_{-A}^A e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx$$

car l'hypothèse de continuité permettant de supprimer les termes tout intégrés aux points de discontinuité éventuels de f' .

On applique en effet l'intégration par parties sur les intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ d'une subdivision $-A = a_0 < a_1 < \dots < a_n = A$ du segment $[-A, A]$. Les termes tous intégrés sont du type

$$f(t) e^{-2\pi i \xi x} \Big|_{x=a_k+0}^{x=a_{k+1}-0} .$$

Par exemple la valeur en $a_k + 0$ est détruite par celle en $a_k - 0$ du terme tout intégré précédent, sauf si $k = 0$.

Maintenant il reste à voir que le terme tout intégré tend vers 0 en $\pm\infty$, ce qui résultera de ce que $|f(x)|$ y tend déjà vers 0. Pour une fonction intégrale générale, cette propriété serait fausse (voir fig 2).

Cependant l'intégrabilité de f' assurant l'existence pour f d'une limite en $-\infty$ et $+\infty$, puisque

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt .$$

Maintenant ces limites sont nulles puisque f est intégrable et qu'une fonction admettant une limite non nulle en $-\infty$ ou en $+\infty$ ne peut l'être : par exemple on considère $|f|$ et on minore $\int_A^{+\infty} |f(x)|dx$ lorsque $|f(x)| \geq \epsilon > 0$ pour $x \geq A$ (voir fig 3).

Ainsi le terme tout intégré tend-il vers 0 et le résultat suit-il.

N.B. Il ne faudrait pas croire qu'une fonction intégrable tende toujours vers 0 en $\pm\infty$. Penser à une succession de pointes de même hauteur dans la suite des bases soit une série convergente.

Dans l'autre sens, nous avons l'énoncé suivant.

Proposition. Si f et xf sont intégrables, alors $\mathcal{F}f$ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$(\mathcal{F}f)'(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x f) .$$

C'est une application directe des théorèmes de dérivation et de continuité sous le signe intégrale appliquées à

$$\int e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx$$

compte tenu de la condition de domination de la dérivée en ξ sous l'intégrale donnée par

$$|-2\pi i x e^{2\pi i \xi x} f(x)| \leq 2\pi |x f(x)|$$

où la fonction de droite est intégrable par hypothèse.

En résumé, lorsqu'on aura montré que la transformation inverse mérite son nom et sous réserve de satisfaction des hypothèses adéquates, on pourra dire qu'il y a échange entre la dérivation en x et la multiplication par $2\pi i \xi$.

Remarque. si f est de classe \mathcal{C}^k , ses dérivées jusqu'à l'ordre k étant intégrables, la propriété de dérivation, jointe à $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$, montre que $\mathcal{F}f = O(1/|\xi|^k)$ en $\pm\infty$. En particulier si f est de classe \mathcal{C}^∞ , toutes ses dérivées étant intégrables, la fonction $\mathcal{F}f$ converge rapidement vers 0 en $\pm\infty$.

L'espace \mathcal{S} de Schwartz.

Dans le cas du tore, les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ suffisent à y caractériser les fonctions. Dans le cas de la droite on introduit une condition de décroissance qui se révèle plus souple qu'une condition de support. On montrerait d'ailleurs qu'il n'existe pas de fonction à support compact dont la transformée de Fourier soit à support compact, autre que 0.

On désigne par \mathcal{S} l'espace, dit **espace de Schwartz**, des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur la droite dont toutes les dérivées décroissent plus vite à l'infini que les $1/|x|^p$ avec p entier quelconque. Autrement dit une fonction ϕ de classe \mathcal{C}^∞ est dans l'espace \mathcal{S} si pour tous les entiers naturels n et p on a

$$D^n \phi = O\left(\frac{1}{|x|^p}\right)$$

ou si l'on préfère

$$x^p D^n \phi = O(1)$$

quand $x \rightarrow \pm\infty$, où D est l'opérateur de dérivation et où $D^n \phi = \phi^{(n)}$. On peut aussi remplacer les O par des o , vu que p est arbitraire.

Les fonctions gaussiennes ψ_a données précédemment, ainsi que leur translatées, sont évidemment des fonctions de l'espace \mathcal{S} .

Clairement \mathcal{S} est stable par dérivation. Sachant que

$$D^n(x\phi) = D^{n-1}\phi + xD^n\phi,$$

il l'est aussi par multiplication par un polynôme.

Evidemment \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de celui des fonctions; il est aussi stable par multiplication.

Les fonctions de \mathcal{S} sont intégrables puisqu'elles sont continues et des $O(1/x^2)$ en $\pm\infty$. On peut donc considérer leurs intégrales de Fourier. Comme

$$\xi^p D^n \mathcal{F}\phi(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^p} \mathcal{F}(D^p((2\pi i\xi)^n \phi)),$$

la transformation de Fourier laisse \mathcal{S} stable. En effet, dans le membre de droite, la transformation de Fourier est appliquée à une fonction de \mathcal{S} , donc intégrable et elle produit une fonction bornée.

La propriété de réciprocity L^1 que nous avons établie montre alors que les transformations de Fourier directe et inverse induisent des endomorphismes de \mathcal{S} qui sont **réciproques** l'une de l'autre.

La relation de transposition donne par ailleurs

$$\langle \mathcal{F}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \overline{\mathcal{F}\psi} \rangle$$

pour ϕ, ψ dans \mathcal{S} . Les endomorphismes induits sont **adjoints** l'un de l'autre.

Ce sont donc des opérateurs **unitaires**, i.e. qui conservent le produit hermitien; en effet

$$\langle \mathcal{F}\phi, \mathcal{F}\psi \rangle = \langle \phi, \overline{\mathcal{F}\mathcal{F}\psi} \rangle = \langle \phi, \psi \rangle.$$

Remarque. Pour une fonction f intégrable, la relation de transposition donne également

$$(*) \quad \langle \mathcal{F}f, \phi \rangle = \langle f, \overline{\mathcal{F}\phi} \rangle$$

où ϕ parcourt \mathcal{S} . Elle **caractérise la transformation de Fourier** dans L^1 à partir de la seule transformation de Fourier dans \mathcal{S} . Cela vaut aussi pour la transformation inverse.

Remarquons qu'une fonction h , pour laquelle $h\phi$ est intégrable pour toute fonction ϕ de \mathcal{S} , est caractérisée (comme classe pour l'égalité presque partout) par la donnée des

$$\langle h, \phi \rangle = \int \overline{h}(x)\phi(x)dx$$

où ϕ parcourt \mathcal{S} . Il s'agit de voir que si ces intégrales sont nulles, alors $h = 0$ presque partout. Pour cela il suffit de le voir pour $e^{-x^2}h(x)$ qui aura les mêmes propriétés. Or cette fonction est intégrable.

Nous utiliserons désormais la propriété (*) pour valider ce que nous pourrions proposer comme extension éventuelle de la transformée de Fourier d'une fonction ayant la propriété requise pour h ci-dessus.

En particulier la transformée de Fourier $g = \mathcal{F}f$ d'une fonction intégrable f vérifie

$$\langle \overline{\mathcal{F}g}, \phi \rangle = \langle g, \mathcal{F}\phi \rangle$$

comme on le voit à partir de (*). Cela signifie que f mérite d'être la transformée de Fourier inverse de g , même s'il n'est pas en général possible de l'écrire comme une intégrale.

Notre démarche implique en fait le **principe de réciprocité**. La réciprocité sera vraie dans tous les cas; cependant la transformation de Fourier pourra ne pas être définie par une intégrale.

Transformation de Fourier Théorie L^2 et conséquences

A partir de maintenant, nous nous demandons si transformation de Fourier inverse est bien la réciproque de la transformation de Fourier directe. En fait la réponse est toujours positive. Cependant il faudra donner un sens à cette réciprocity. Le cadre de l'espace L^2 se révélera très satisfaisant.

La difficulté est que, dans le cas de la droite, il n'y a pas d'inclusion entre les espaces L^1 et L^2 , ni dans un sens ni dans l'autre. Les intégrales qui ont servi dans le cas L^1 ne pourront plus l'être dans le cas L^2 . Dans l'autre sens le procédé abstrait qui servira dans le cas L^2 ne sera pas applicable au cas L^1 .

Nous allons être contraints, pour garantir la compatibilité des définitions, de caractériser les transformées à l'aide des fonctions de l'espace \mathcal{S} . Sans le dire, nous travaillerons dans le cadre des distributions tempérées.

Comme pour les séries, nous ne nous intéresserons pas à la réciprocity ponctuelle, surtout avec des intégrales aux bornes symétriques. La question de ces intégrales sera considérée, mais en dehors du problème de la réciprocity.

Fonctions de carré sommable.

Soit $L^2(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des (classes pour l'égalité presque partout de) fonctions à valeurs complexes mesurables, de carré intégrable, sur la droite, muni du produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = \int \overline{f(t)}g(t)dt$$

et de la norme associée, appelée norme de la convergence en moyenne quadratique,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

C'est un **espace de Hilbert**.

Densité dans $L^2(\mathbf{R})$ des fonctions de \mathcal{S} .

On peut approcher les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ par des fonctions continues à support compact. On commence par tronquer f pour en faire une fonction bornée à support borné qui l'approche: on remplace f par $1_{[-M, M]} \cdot \inf(1, M/|f|) \cdot f$, c'est-à-dire $f(x)$ par 0 si $|x| \geq M$ et sinon par $Mf(x)/|f(x)|$ là où $|f(x)| > M$, pour M assez grand. Ensuite on approche cette dernière fonctions dans L^1 par des fonctions continues à support compact en respectant la même borne M , et les tronquant de la même façon au besoin. On conclut en sachant

$$\|f - g\|_2^2 = \int |f(x) - g(x)|^2 dx \leq 2M \int |f(x) - g(x)| dx = 2M \|f - g\|_1$$

si f, g sont bornées par M .

Maintenant pour une fonction continue à support compact, si ϕ_n est une unité approchée, la convergence de $f * \phi_n$ vers f a lieu à la fois dans L^1 et en norme uniforme. Alors

$$\int |f * \phi_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \|f * \phi_n - f\|_\infty \int |f * \phi_n(x) - f(x)| dx$$

tend vers 0. La convergence a lieu dans $L^2(\mathbf{R})$.

On conclut en remarquant qu'on peut trouver une unité approchée composée de fonction de \mathcal{S} et que si f est continue à support et ϕ dans \mathcal{S} , alors $f * \phi$ est aussi dans \mathcal{S} .

En effet

$$(f * \phi)(x) = \int f(t)\phi(x-t)dt$$

se dérive sous le signe somme en

$$(f * \phi)(x) = \int f(t)\phi'(x-t)dt .$$

Si le support de f est dans $[-A, A]$, on intègre sur ce segment une fonction continue admettant une dérivée partielle continue en x . L'argument se répète et $f * \phi$ est indéfiniment dérivable.

Par ailleurs on a une majoration du type

$$(|u| + A)^n |\phi(u)| \leq C_n$$

pour tout n entier ≥ 0 . Il en résulte la majoration

$$|x^n (f * \phi)(x)| \leq \int_{-A}^A |f(t)x^n \phi(x-t)|dt \leq C_n \int |f(t)|dt$$

qui vaut aussi pour toutes les dérivées de $f * \phi$.

Remarque. On peut montrer directement que si f est dans L^p et si (ϕ_n) est une unité approchée, alors $f * \phi_n$ converge vers f dans L^p . Il y a une petite différence avec L^1 ; on majorera $|f * \phi_n - f|^p$ par

$$\left| \int |(f(x-t) - f(x))\phi_n(t)dt|^p \leq \int |f(x-t) - f(x)|^p \phi_n(t)dt .$$

Pour cela on utilise l'inégalité de Hölder pour la mesure positive de densité ϕ_n , sachant que

$$\int 1^q \phi_n(t)dt = \int \phi_n(t)dt = 1 .$$

Le reste fonctionne comme pour L^1 ; on passe par $\|\tau_t f - f\|_p$ dont on montre que sa limite est nulle quand $t \rightarrow 0$ en commençant par traiter le cas des fonctions continues à support compact.

Prolongement et isomorphisme $L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$.

Nous utilisons la densité de \mathcal{S} dans L^2 pour prolonger la transformation de Fourier, laquelle a été définie jusqu'ici par des intégrales.

Théorème. Les transformations de Fourier directe et inverse définies sur $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ se prolongent en des isomorphismes hermitiens adjoints et inverses de $L^2(\mathbf{R})$. Ainsi une fonction de $L^2(\mathbf{R})$ a une transformée de Fourier dans $L^2(\mathbf{R})$ et une fonction dont la transformée de Fourier est dans $L^2(\mathbf{R})$ est elle-même dans $L^2(\mathbf{R})$. En particulier la conservation du produit hermitien se traduit par la formule de **Plancherel** qu'on écrit

$$\int \overline{\mathcal{F}f(\xi)} \mathcal{F}g(\xi) d\xi = \int \overline{f(x)} g(x) dx$$

ou

$$\int |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi = \int |f(x)|^2 dx .$$

Les transformations de Fourier directe et inverse induisent des endomorphismes de \mathcal{S} qui sont adjoints et inverses et qui conservent donc le produit hermitien. Par suite l'isométrie

$$\mathcal{S} \rightarrow L^2(\mathbf{R})$$

définie par \mathcal{F} ou $\overline{\mathcal{F}}$ se prolonge par continuité à $L^2(\mathbf{R})$ qui est complet. On obtient ainsi des applications linéaires

$$L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$$

que l'on notera provisoirement U et \overline{U} , qui sont encore adjointes et inverses l'une de l'autre et qui conservent le produit hermitien.

En particulier

$$\langle Uf, \phi \rangle = \langle f, \overline{U}\phi \rangle \quad \text{et} \quad \langle \overline{U}f, \phi \rangle = \langle f, U\phi \rangle$$

pour f dans $L^2(\mathbf{R})$ et ϕ dans \mathcal{S} . Cela montre la compatibilité avec les expressions intégrales qui ont été données pour une fonction de $L^1(\mathbf{R})$, expressions lues dans un sens ou dans l'autre. Autrement dit, si f est dans L^2 , on a $U(f) = g$ aussi bien lorsque $g = \mathcal{F}f$ que lorsque $f = \overline{\mathcal{F}}g$. La même chose vaut bien sûr pour \overline{U} .

Compte tenu de cette compatibilité, nous noterons donc désormais \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ les deux prolongements U et \overline{U} . Les propriétés énoncées découlent directement de ce qu'on vient de dire.

Intégrabilité d'une transformée de Fourier.

On tire de la réciprocity L^2 une information beaucoup plus explicite quand la fonction f est suffisamment régulière.

Proposition . Si une fonction f est **continue** ainsi que **de classe \mathcal{C}^1 par morceaux**, et si f, f' sont de carré intégrable, alors la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ de f est **intégrable** et $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$.

En effet il résulte aussitôt des hypothèses que $\mathcal{F}f$ et $i\xi\mathcal{F}f$ sont dans L^2 , donc aussi $g = (1 + i\xi)\mathcal{F}f$. Alors f est le produit

$$\frac{1}{1 + i\xi} \cdot g$$

de deux fonctions de L^2 . Par Cauchy-Schwarz, c'est une fonction intégrable.

Nous allons maintenant nous placer dans un cadre ne nécessitant pas une hypothèse aussi forte de dérivabilité sur f .

L'espace H^1 de la droite.

Le cadre simple et naturel pour l'intégrabilité de la transformée de Fourier est l'espace $H^1(\mathbf{R})$. L'énoncé suivant le définit.

Proposition. Soit f une fonction sur la droite. Les propriétés qui suivent ci-dessous sont équivalentes.

(i) La fonction f est dans $L^2(\mathbf{R})$ et il existe une fonction g de $L^2(\mathbf{R})$ telle que

$$\int g(t)\phi(t)dt = - \int f(t)\phi'(t)dt$$

pour toute fonction ϕ de \mathcal{S} .

(ii) La fonction f est continue et il existe une fonction g de $L^2(\mathbf{R})$ telle que

$$\int_0^x g(t)dt = f(x) - f(0)$$

pour tout x .

(iii) La fonction $(1 + \xi^2)^{1/2}\mathcal{F}f(\xi)$ est dans $L^2(\mathbf{R})$.

Voyons d'abord l'équivalence des propriétés. D'abord (i) implique (iii). En effet, par Plancherel, on a

$$\langle \bar{g}, \phi \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}g}, \mathcal{F}\phi \rangle$$

et

$$\langle \bar{f}, \phi' \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}g}, \mathcal{F}\phi' \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}g}, 2\pi i \xi \mathcal{F}\phi(\xi) \rangle .$$

Par suite

$$\langle \overline{\mathcal{F}f - 2\pi i \xi \mathcal{F}g}, \mathcal{F}\phi(\xi) \rangle = 0 .$$

et $\mathcal{F}f = 2\pi i \xi \mathcal{F}g$ puisque $\mathcal{F}\phi$ parcourt \mathbf{S} . Ainsi $\xi \mathcal{F}g(\xi)$ est dans $L^2(\mathbf{R})$, donc aussi $(1 + i\xi)\mathcal{F}g(\xi)$, d'où le résultat cherché.

Ensuite (ii) implique (i). On notera que ϕ et ϕ' sont dans $L^2(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned} \int f(x)\phi'(x)dx &= \int \left(\int (1_{[0,+\infty[} - 1_{[x,+\infty[})(t)g(t)dt \right) \phi'(x)dx \\ &= \int \left(\int -1_{]-\infty,t]}(x)\phi'(x) \right) g(t)dt = - \int \phi(t)g(t)dt \end{aligned}$$

où l'on a omis $1_{[0,+\infty[}(t)$ dans l'intégrale en x , sachant que $\int \phi'(t)dt = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = 0$.

Enfin (iii) implique (ii). L'hypothèse est que $\mathcal{F}f$ et que $\xi \mathcal{F}f(\xi)$ sont dans $L^2(\mathbf{R})$. Alors déjà f est dans $L^2(\mathbf{R})$. On désigne par g la fonction de $L^2(\mathbf{R})$ qui est la transformée de Fourier inverse de $2\pi i \xi \mathcal{F}f(\xi)$. Pour $x \geq 0$ on interprète l'intégrale du (ii) comme un produit scalaire avec $1_{[0,x]}$. représente $f(x) - f(0)$, qui est alors une fonction continue.

N.B. Pour montrer que (iii) implique (i) on écrirait

$$\phi(t) = \int e^{2\pi i x t} \overline{\mathcal{F}\phi}(x) dx$$

et

$$\phi'(t) = 2\pi i t \int e^{2\pi i x t} \overline{\mathcal{F}\phi}(x) dx$$

et on appliquerait Fubini.

Remarque. La propriété (i) signifie que g est la dérivée de f au sens des distributions. Une fonction de H^1 est une fonction de $L^2(\mathbf{R})$ dont la dérivée (au sens des distributions) est dans $L^2(\mathbf{R})$. On notera qu'une telle fonction est continue; cependant, en dimension plus grande, la continuité exige davantage de dérivées.

L'implication de (ii) vers (i) vaut pour une fonction f localement intégrable; la dérivation au sens des distributions inverse l'intégration.

Ainsi les fonctions de l'espace H^1 du tore ont-elles une série de Fourier absolument convergente que l'on peut dériver terme à terme une fois (au sens des distributions).

Influence des discontinuités.

La méthode que nous avons employée pour les séries de Fourier est moins spectaculaire pour la transformation de Fourier. Nous allons nous contenter de l'exemple d'une fonction présentant une discontinuité au seul point 0. Pour étudier la convergence uniforme en x sur un segment $[a, b]$ ne comprenant pas 0, par exemple tel que $0 < a \leq b$, de l'intégrale

$$\int_{-z}^y \mathcal{F}f(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi$$

quand $y, z \rightarrow +\infty$, on choisirait $\alpha = 1/c$ où $c > b$. On multiplierait l'intégrale ci-dessus par $1 - \cos(2\pi\alpha x)$ et on comparerait avec l'intégrale

$$\int_{-z}^y \mathcal{F}g(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi$$

où $g(x) = (1 - \cos(\alpha x))f(x)$. La différence est alors composée de termes en

$$\int_t^{t+c} \mathcal{F}f(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi$$

qui convergent uniformément vers 0 dès que f est intégrable par Riemann-Lebesgue. Si les hypothèses sur f assurent l'intégrabilité de $\mathcal{F}g$, on obtient le résultat cherché.

Le phénomène de Gibbs.

On considère la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\text{sign}(x) .$$

Sa transformée de Fourier est donnée par $\mathcal{F}h = \frac{1}{2}(g - \check{g})$ où

$$g(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-2\pi i\xi x} dx = \frac{1}{1 + 2\pi i\xi} .$$

On s'intéresse à l'intégrale partielle de $\mathcal{F}h$ entre $-A$ et A , qu'on obtient à partir de

$$f(x) = \int_{-A}^A \frac{1}{1 + 2\pi i\xi} e^{2\pi i\xi x} d\xi .$$

Cette dernière fonction vérifie

$$f(x) + f'(x) = \int_{-A}^A e^{2\pi i \xi x} d\xi = \frac{\sin(2\pi x A)}{\pi x} .$$

Par suite l'intégrale partielle cherchée est donnée par

$$\int_0^x \frac{\sin(2\pi t A)}{\pi t} \cosh(x - t) dy .$$

En $x = 1/2xA$ elle a dépassé son premier maximum local, dont la valeur est ainsi minorée par celle en ce point. Posant $2xA = u$ cette dernière vaut

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \cosh\left(\frac{1-u}{2A}\right) dy .$$

Quand $A \rightarrow +\infty$ il vient à la limite

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} du$$

dont une valeur approchée par défaut est

$$1 - \frac{\pi^2}{24}$$

laquelle est supérieure à 0,6. Une estimation plus précise montrerait que ce premier saut dépasse toujours de 18% environ le demi-saut en 0. Cela interdit toute convergence uniforme sur un intervalle $]0, \alpha[$.

Un encadrement plus précis montrerait que c'est aussi la limite du premier maximum local.

Opérateurs compacts et finitude

On se place dans le cadre des espaces de Banach et des applications linéaires continues. Un **isomorphisme** est donc une application linéaire continue qui admet un inverse du même type; il suffit pour cela qu'elle soit bijective et que l'application inverse (dite aussi réciproque) soit continue. On parle aussi d'isomorphisme "topologique" pour mettre l'accent sur la continuité.

Un **morphisme strict** entre espaces de Banach E et F est une application linéaire continue pour lequel la décomposition canonique

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \downarrow & & \uparrow \\ E/\ker u & \rightarrow & \text{Im}u \end{array}$$

passé par un isomorphisme de $E/\ker u$ sur $\text{Im}u$. Dans ces conditions l'image $\text{Im}u$ est complète, parce qu'isomorphe à un quotient qui est complet, donc **fermée**. En fait le théorème de Banach montre que les morphismes stricts sont exactement les applications linéaires continues d'image fermée, mais nous n'en aurons pas besoin; nous établirons directement l'isomorphisme indiqué dans le cas qui nous intéresse.

Si F, G sont des espaces de Banach, leur **produit** et leur **somme** (dite parfois directe externe pour préciser) sont isomorphes; dans les deux cas, l'espace vectoriel sous-jacent est le produit $F \times G$; dans le premier cas la norme est $\max(\|y\|, \|z\|)$; dans le second $\|y\| + \|z\|$; ces normes sont équivalentes.

On préférera la notation d'une somme, qu'on écrira

$$F \oplus G$$

et pour laquelle F, G sont identifiés aux sous-espaces $F \times \{0\}, \{0\} \times G$ de $F \times G$ par les applications qui à y dans F associe $(y, 0)$ et qui à z dans G associe $(0, z)$. De cette façon $F \oplus G$ apparaît comme la somme de F et G , tout élément x de $F \oplus G$ s'écrivant de façon unique comme la somme

$$x = y + z$$

d'un vecteur y de F et d'un vecteur z de G .

Cependant il s'agit d'une somme "topologique". D'un côté x dépendant continûment de y et z , de l'autre y et z dépendant continûment de x . D'un côté c'est la continuité vu par composantes ou projections, de l'autre c'est la continuité des projections.

En particulier F, G s'identifient à des sous-espaces fermés de leur somme.

Deux sous-espaces vectoriels F, G d'un espace vectoriel E sont dits en somme directe si l'application naturelle

$$F \oplus G \rightarrow E$$

qui à (y, z) dans $F \oplus G = F \times G$ associe $y + z$ dans E est un isomorphisme algébrique. Lorsque E est un espace normé, on dit qu'ils sont en somme directe *topologique* si c'est un isomorphisme d'espaces normés, donc "topologique". Dans la décomposition unique

$$x = y + z$$

le vecteur x dépendant toujours continûment de y et z . C'est la réciproque que l'on exige, à savoir que y et z dépendent continûment de x ou que les projections sont continues. Il suffit de le vérifier pour l'une, par exemple y , puisqu'alors $z = x - y$.

Proposition. Soit F un sous-espace fermé de codimension finie de l'espace normé E . Tout supplémentaires algébrique de F est un supplémentaire topologique.

On sait que F admet des supplémentaires algébriques. Il s'agit de voir que pour tout supplémentaire algébrique G , on a une somme directe

$$F \oplus G = E$$

qui est topologique. Pour cela, comme on l'a dit, il suffit de voir que la projection

$$E \rightarrow G$$

est continue. Or, puisque F est fermé, l'on peut considérer l'espace normé quotient E/F et l'injection canonique $G \rightarrow E$, composée avec l'application $E \rightarrow E/F$, donne une application

$$G \rightarrow E/F$$

qui est un isomorphisme algébrique puisque la somme est directe, puis topologique puisque l'espace G est de dimension finie. Or l'application cherchée s'obtient en composant l'application $E \rightarrow E/F$ avec l'isomorphisme réciproque; elle est donc continue.

Proposition. Soit F un sous-espace de dimension finie de l'espace normé E . Alors F admet un supplémentaire topologique.

On considère une base e_1, \dots, e_n de F et la base duale e_1^*, \dots, e_n^* dans le dual algébrique de F , qui est aussi son dual topologique puisqu'on est en dimension finie. On prolonge chaque forme linéaire continue e_i^* , définie sur F pour le moment, en une forme linéaire continue sur E , par le théorème de Hahn-Banach. Désormais e_i^* désignera ce prolongement. On peut alors écrire tout élément de x de E sous la forme

$$x = y + z$$

où

$$y = e_1^*(x)e_1 + \dots + e_n^*(x)e_n .$$

Alors y est dans F et z est dans

$$G = \ker e_1^* \cap \dots \cap \ker e_n^*$$

comme on le voit en appliquant e_i^* à chaque membre. Par ailleurs on voit aussitôt $F \cap G$ est réduit à zéro. On a donc une somme directe algébrique, qui est aussi topologique puisque la première projection est continue.

L'alternative de Fredholm.

On supposera pour simplifier les espaces vectoriels réels; toutefois rien ne serait modifié, quant au fond, pour des espaces complexes.

Définition. Soient E, F des espaces de Banach; un **opérateur de Fredholm** $u : E \rightarrow F$ est un *morphisme strict* dont le noyau $\ker u$ est de dimension finie et l'image $u(E)$ de codimension finie.

Dans ce cas l'**indice** ou **caractéristique d'Euler Poincaré** de u est le nombre entier

$$\chi(u) = \dim(\ker u) - \dim(F/u(E)) ,$$

la dimension du conoyau $F/u(E)$ étant la codimension de l'image $u(E)$.

Un opérateur u d'indice nul vérifie l'**alternative de Fredholm**: si l'équation

$$u(x) = 0$$

admet exactement n solutions indépendantes, alors pour que l'équation

$$u(x) = y$$

ait des solutions, le second membre y doit vérifier n relations indépendantes.

On notera qu'en dimension finie l'indice est $\dim E - \dim F$; il ne dépend pas de u . C'est faux en dimension infinie : l'opérateur de décalage vers la droite (shift) de l^2 a un indice égal à -1 ; celui de décalage vers la gauche a un décalage égal à 1 .

On pourra sauter, dans un premier temps, les trois lemmes qui suivent pour aller tout de suite à la conclusion. Il faut cependant savoir que ces lemmes se démontrent à l'aide d'argument d'algèbre linéaire très élémentaires.

Lemme 1 (transvection de vecteur g et de forme g^*). Soient un espace vectoriel H , une forme linéaire continue g^* sur H et un vecteur g du noyau de g^* . L'application linéaire qui à x associe $x + g^*(x)g$ définit un isomorphisme de H sur lui-même.

C'est classique.

Lemme 2. Considérons un opérateur $u : E \rightarrow F$, une droite $\mathbf{R}g$, un vecteur non nul f de F , l'opérateur $w : \mathbf{R}g \rightarrow F$ défini par $w(z) = \lambda f$ pour $z = \lambda g$, et enfin l'opérateur

$$\tilde{u} : \tilde{E} = E \oplus \mathbf{R}g \rightarrow F$$

défini par $\tilde{u}(x + z) = u(x) + w(z)$.

Alors u et \tilde{u} sont de Fredholm simultanément, et $\chi(\tilde{u}) = \chi(u) + 1$.

Deux cas se présentent. Si f est dans l'image $u(E)$, alors u et \tilde{u} ont même image. D'autre part, choisissant e tel que $u(e) = f$, on caractérise le noyau de \tilde{u} par $u(x + \lambda e) = 0$; le noyau de \tilde{u} est la transformée inverse de la somme $\ker u + \mathbf{R}g$, laquelle est directe, par la transvection de \tilde{E} définie par le vecteur e et la forme coordonnée λ .

Si f n'est pas dans $u(E)$, l'image de \tilde{u} est la somme $u(E) + \mathbf{R}f$ qui est directe. D'autre part, le noyau de \tilde{u} , caractérisé par $u(x) = 0$ et $\lambda = 0$, est aussi celui de u .

L'indice augmente donc de 1 dans tous les cas.

Lemme 3. Considérons un opérateur $u : E \rightarrow F$, une droite $\mathbf{R}g$, une forme linéaire continue non nulle e^* sur E , l'opérateur $w : E \rightarrow \mathbf{R}g$ défini par $w(x) = e^*(x)g$, et enfin l'opérateur

$$\tilde{u} : E \rightarrow F \oplus \mathbf{R}g$$

défini par $\tilde{u}(x) = u(x) + w(x)$.

Alors u et \tilde{u} sont de Fredholm simultanément, et $\chi(\tilde{u}) = \chi(u) - 1$.

Deux cas se présentent. Si e^* est nulle sur le noyau de u , le noyau de \tilde{u} est celui de u . D'autre part e^* s'écrit alors $f^* \circ u$ où f^* est une forme linéaire sur F ; l'image de \tilde{u} ,

ensemble des $u(x) + f^*(u(x))g$, est la transformée de celle de u par la transvection de \tilde{F} définie par le vecteur g et la composée de f^* avec la projection sur F .

Si e^* n'est pas nulle sur $\ker E$, le noyau de \tilde{u} est un sous-espace de codimension 1 de celui de u . D'autre part $E = \ker u + \ker e^*$, et l'image de \tilde{u} contient celle de F ; c'est donc la somme $u(F) + \mathbf{R}g$, qui est directe.

Dans tous les cas l'indice diminue donc de 1.

En itérant l'application du lemme 2, et en prenant pour G un supplémentaire algébrique de l'image $u(E)$ dans F pour la condition nécessaire, on voit que u est de Fredholm si et seulement s'il existe un espace vectoriel G de dimension finie et un opérateur $w : G \rightarrow F$ tels que l'opérateur

$$\tilde{u} : E \oplus G \rightarrow F$$

correspondant soit de Fredholm et surjectif. Alors

$$\chi(u) = \chi(\tilde{u}) - \dim G .$$

En itérant l'application du lemme 3, en prenant pour G le noyau de u et en prolongeant à E , par Hahn-Banach, une base de son dual pour la condition nécessaire, on voit que u est de Fredholm si et seulement s'il existe un espace vectoriel G de dimension finie et un opérateur $w : E \rightarrow G$ tels que l'opérateur

$$\tilde{u} : E \rightarrow F \oplus G$$

correspondant soit de Fredholm et injectif. Alors

$$\chi(u) = \chi(\tilde{u}) + \dim G .$$

Conclusion. Voici comment varie l'indice quand on agrandit E ou F , ce qui revient à border u en un opérateur

$$\begin{pmatrix} u & * \\ * & * \end{pmatrix} .$$

Chaque fois qu'on ajoute une ligne on diminue l'indice de 1 et chaque fois qu'on ajoute une colonne on l'augmente de 1. En ajoutant des lignes on peut obtenir un opérateur injectif, en ajoutant des colonnes un opérateur surjectif.

En particulier, l'opérateur u sera de Fredholm si et seulement s'il existe des espaces vectoriels \tilde{E} et \tilde{F} obtenus en ajoutant à E et F des espaces vectoriels de dimensions finies p et q , et un opérateur $\tilde{u} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}$ bordant u qui soit inversible. Alors $\chi(u) = q - p$.

D'après ce qu'on a vu un opérateur de Fredholm peut toujours être bordé pour être transformé en isomorphisme. Inversement il est facile de montrer que l'opérateur obtenu à partir d'un isomorphisme en retirant des sous-espaces de dimension finie provenant d'une décomposition en somme directe topologique, au départ et à l'arrivée, est de Fredholm.

Proposition. Si $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ sont de Fredholm, alors $v \circ u$ l'est aussi et $\chi(v \circ u) = \chi(u) + \chi(v)$.

On agrandit E et G de façon à se ramener au cas où u est surjectif et v injectif. Le résultat suit.

Proposition. L'ensemble des opérateurs de Fredholm est ouvert dans $L(E, F)$ et l'indice est localement constant.

En effet si on a agrandi E, F pour obtenir une bijection, on vérifie qu'une petite perturbation de u produit une petite perturbation de \tilde{u} ; or une petite perturbation sur un opérateur inversible conserve l'inversibilité.

Théorème. Si K est un opérateur compact de E , alors $T = \mathbf{1} + K$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul.

D'abord le théorème de Riesz appliqué à l'opérateur induit par K sur le noyau de T montre que ce noyau est de dimension finie. En transposant, on obtient le même résultat pour le conoyau, une fois montré que l'image est fermée.

Il s'agit de montrer que T est un morphisme strict. Autrement dit qu'une suite dont l'image tend vers 0 tend elle-même vers 0 dans $E/\ker T$. Raisonnons par l'absurde et ramenons-nous, par extraction, au cas où la norme de x_n dans le quotient est minorée par $\epsilon > 0$. On peut se ramener au cas où la suite x_n est bornée dans le quotient en divisant x_n par sa norme dans le quotient, puis, en remplaçant x_n dans sa classe, au cas où la suite x_n est elle-même bornée dans E .

Soit alors une suite x_n bornée telle que $Tx_n = x_n + Kx_n \rightarrow 0$. Utilisant la compacité de K , ramenons-nous, par extraction, au cas où $Kx_n \rightarrow y$. Alors $x_n \rightarrow -y$, puis $y + Ky = 0$. Ainsi y est dans le noyau de T et $x_n \rightarrow 0$ dans le quotient.

L'application qui à λ dans $[0, 1]$ associe $\chi(\mathbf{1} + \lambda K)$ est localement constante. Comme $[0, 1]$ est connexe, elle est constante. Or elle est nulle en 0.

Spectre d'un opérateur compact.

Dans toute la suite on considère un opérateur compact K de E . Il résulte du dernier théorème que si, pour $\lambda \neq 0$, l'opérateur $K - \lambda \mathbf{1}$ n'est pas inversible, alors cet opérateur n'est pas injectif. Ainsi *toute valeur spectrale non nulle est une valeur propre*. On notera que 0 est toujours valeur spectrale en dimension infinie.

On note

$$F_\lambda = \bigcup_{r \geq 1} \ker(K - \lambda \mathbf{1})^r$$

le sous-espace spectral associé à λ .

Théorème. Etant donné $\alpha > 0$, la somme

$$G_\alpha = \sum_{|\lambda| \geq \alpha} F_\lambda$$

des sous-espaces spectraux relatifs aux valeurs propres λ de module $\geq \alpha$ est de dimension finie. Il en résulte ceci.

a) Les sous-espaces propres E_λ de K relatifs à une valeur propre λ non nulle sont de dimension finie. L'ensemble des valeurs propres de module plus grand qu'un nombre $\alpha > 0$ donné est fini.

b) Si λ est une valeur propre non nulle, les noyaux itérés $\ker(K - \lambda \mathbf{1})^r$ sont eux-mêmes de dimension finie et leur suite croissante est stationnaire.

c) Si λ est une valeur propre non nulle, la suite décroissante des images itérées $\text{Im}(K - \lambda \mathbf{1})^r$ est aussi stationnaire et E est la somme (directe) de ces noyau et image itérés d'ordre r dès que r est assez grand. En particulier les images itérées sont de codimension finie.

On notera que ce théorème contient le théorème de Riesz: si E est localement compact, l'opérateur 1 est compact; comme E est le sous-espace propre pour la valeur propre 1 , il est de dimension finie.

Montrons le premier point. L'image par K de la boule unité de G_α étant précompacte, on peut la recouvrir par des boules de rayon $\alpha/2$ et de centres $K(x_1), \dots, K(x_n)$.

Considérons un sous-espace vectoriel F somme d'un nombre fini de sous-espaces cycliques et qui contienne tous les points x_1, \dots, x_n . Pour cela on décompose chaque x_i en une somme de vecteurs dont chacun est dans un $\ker(K - \lambda \mathbf{1})^r$, puis pour chaque vecteur y de $\ker(K - \lambda \mathbf{1})^r$, on considère le sous espace cyclique engendré par les vecteurs $K^p y$ où $0 \leq p < r$.

Clairement F est de dimension finie, donc fermé, et G_α et F sont stables par K . On obtient un opérateur

$$K_1 : G_\alpha/F \rightarrow G_\alpha/F$$

par passage au quotient, lequel est de norme $\leq \alpha/2$.

Supposons que F contienne le noyau de $(K - \lambda \mathbf{1})^r$ pour $r \geq 0$ (c'est banal pour $r = 0$) sans contenir celui $(K - \lambda \mathbf{1})^{r+1}$ et soit x un vecteur de ce dernier noyau itéré qui ne soit pas dans F . Si $y = (K - \lambda \mathbf{1})x$, on a $(K - \lambda \mathbf{1})^r y = 0$ de sorte que y est dans F , i.e. est nul modulo F . Alors $K_1(x) = \lambda x$ dans le quotient, ce qui contredit la majoration de sa norme.

Les assertions a) et du b) en résultent aussitôt. Pour la finitude du nombre de valeurs propres, il faut juste savoir que des sous-espaces propres relatifs à des valeurs propres distinctes sont toujours en somme directe, ce qui relève en fait de la dimension finie. C'est également vrais de noyaux itérés relatifs à des valeurs propres distinctes.

Maintenant, si la suite des noyaux itérés est stationnaire à partir de r , l'opérateur itéré $T = (K - \lambda \mathbf{1})^r$ vérifie

$$E = \ker T \oplus T(E)$$

par l'alternative de Fredholm et le fait que $\ker T$ et $T(E)$ ont une intersection nulle; en effet, si un vecteur $y = T(x)$ de l'image est dans $\ker T$, alors x est dans $\ker T^2 = \ker T$, et $y = 0$.

La suite des images itérées stationne alors aussi à partir de ce rang.

Voir l'exercice sur les sous-espaces spectraux pour une présentation plus détaillée de la démonstration.

Spectre d'un opérateur autoadjoint compact.

On considère un espace hilbertien H et un opérateur T autoadjoint de H , i.e. un opérateur vérifiant

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

pour tous x, y dans H .

Lorsque T est défini par un noyau $k(x, y)$, cela signifie que k vérifie la symétrie hermitienne $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$.

On vérifie aisément que les valeurs propres d'un tel opérateur sont réelles et que les sous-espaces propres correspondants sont deux à deux orthogonaux. De plus

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \|T\|$$

précise la formule du rayon spectral.

Soit T un opérateur autoadjoint *compact*, soit (λ_n) la suite de ses valeurs propres non nulles, reproduites avec leur multiplicité, et soit (e_n) un système orthonormé de vecteurs propres correspondants. Alors

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle e_n, x \rangle e_n$$

où la série de droite converge dans H .

Rappel.

Si $K : E \rightarrow F$ est une application linéaire compacte entre espaces de Banach, alors l'application **transposée** ${}^tK : F' \rightarrow E'$ donnée par

$${}^tKy' = y \circ K$$

est aussi **compacte**.

Soit en effet (y'_n) une suite de la boule unité de F' . Les restrictions à toute partie bornée de F forment une suite équicontinue; c'est donc le cas pour les restrictions à l'adhérence de l'image KB par K de la boule unité fermée B de E . Par le théorème d'Ascoli on peut obtenir, après extraction, une suite (y'_n) qui converge uniformément sur KB , i.e. telle que la suite $(y'_n \circ K)$ converge uniformément sur B . Comme cela vaut aussi pour la boule nB la suite converge en tout point de E et sa limite est linéaire. Comme la convergence est uniforme sur B , sa limite est bornée sur B . Elle est donc continue.

Espaces vectoriels topologiques localement convexes métrisables

Un certain nombre de modes de convergence ne peuvent pas être décrites par une norme; c'est le cas de la convergence uniforme sur tout compact ou de la convergence uniforme de toutes les dérivées. Chacun de ces modes de convergence peut être décrit par une suite de semi-normes, i.e. de fonctions positives p_n qui ont les propriétés d'une norme à l'exception de la propriété (N3) : on peut avoir $p_n(x) = 0$ sans que $x = 0$.

Dans le premier cas, on considère la suite définie par

$$p_n(f) = \sup_{x \in K_n} |f(x)|$$

où la suite K_n , exhaustive, de parties compactes est telle que chaque partie compacte soit incluse dans l'une des K_n .

Dans le second, cas on considère la suite définie par

$$p_n(f) = \sup_x |f(x)| + \dots + \sup_x |f^{(n)}(x)|$$

par exemple. Il s'agit en fait de normes mais ce n'est pas cela qui importe : aucune ne peut définir seule la convergence considérée.

On conviendra d'appeler **espace vectoriel topologique localement convexe métrisable**, en abrégé **elcm**, la donnée d'un espace vectoriel réel ou complexe E et d'une suite croissante de semi-normes p_n sur E . Nous expliquerons la terminologie plus loin, le qualificatif métrisable n'étant d'ailleurs pas complètement justifié, compte tenu de nos choix.

De la même façon qu'on définit des boules dans un espace normé, on définit des semi-boules, ouvertes ou fermées, en posant une inégalité du type

$$p_n(x) < r \quad \text{ou} \quad p_n(x) \leq r$$

pour les semi-boules centrées à l'origine; on remplace x par $x - a$ pour les semi-boules de centre a . Dans un espace normé, les semi-boules centrées à l'origine dépendent d'un seul paramètre, le rayon r ; ici les semi-boules dépendent de deux paramètres, le rang n et le rayon r .

Partant de là, on définit les voisinages de zéro, les voisinages d'un point a , les parties ouvertes, les parties fermées en reprenant ce que l'on fait dans un espace normé. La différence est que les quantificateurs qui portaient sur le seul r porteront maintenant sur n et r ; par exemple V est un voisinage de 0 s'il existe un rang n et un rayon $r > 0$ tels que V contienne la semi-boule définie par $p_n(x) < r$. On dira que l'on munit de cette façon l'espace vectoriel localement convexe d'une topologie.

N.B. On a imposé la croissance de la suite de semi-normes, i.e. $p_n \leq p_{n+1}$. Il arrive que l'on omette cette condition. Dans ce cas il faut appliquer ce qui précède à la suite définie

$$q_n = \sup_{m \leq n} p_m$$

où le supremum peut aussi être remplacé par la somme; c'est ce qui a été fait dans le second exemple. Il faut bien voir qu'omettre la croissance change la définition des semi-boules; en effet $q_n(x) < r$ équivaut à

$$p_0(x) < r, \dots, p_n(x) < r$$

par exemple.

Etant donnés deux elcm E et F , munis respectivement de semi-normes p_n et q_n , on dira bien sûr qu'une **application linéaire** u de E dans F est **continue** si l'image réciproque par u d'une partie ouverte de F est ouverte dans E . On établit aussitôt la propriété suivante.

Proposition. Il est équivalent de dire :

- (i) u est continue,
- (ii) u est continue en 0,
- (iii) pour chaque rang n on peut trouver un rang m et une constante C tels que

$$q_n(u(x)) \leq Cp_m(x) .$$

Le seul point méritant une petite démonstration est l'implication de (ii) vers (iii), mais le raisonnement est le même que pour une norme. L'image réciproque de la semi-boule définie par $q_n(y) \leq 1$ contient une semi-boule du type $p_m(x) \leq r$ où r est > 0 . Soit alors x est dans E . Si $p_m(x) \neq 0$, posons $x' = (r/p_m(x))x$; alors $p_m(x') \leq r$ et $q_n(u(x')) \leq 1$, d'où la propriété cherchée avec $C = 1/r$. Si $p_m(x) = 0$, on a encore $p_m(kx) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et donc $q_n(u(kx)) \leq 1$, soit $q_n(u(x)) \leq 1/k$ et finalement $q_n(u(x)) = 0$; on a encore la propriété.

Avec les mêmes notations, si H est un ensemble d'applications linéaires de E dans F , il est équivalent de dire :

- (i) H est équicontinu,
- (ii) H est équicontinu en 0 : pour tout voisinage W de 0 dans F on peut trouver un voisinage V de zéro dans E tel que $u(V) \subset W$ pour toute fonction u de H ,
- (iii) pour chaque rang n on peut trouver un rang m et une constante C tels que $q_n(u(x)) \leq Cp_m(x)$ pour toute fonction u de H .

Nous allons justifier maintenant la dénomination que nous avons choisie pour ces espaces.

Convexité locale. On parle de convexité locale pour exprimer le fait que les semi-boules (qui constituent un système fondamental de voisinages de zéro ou d'un point quelconque) sont convexes. Par exemple, si

$$p_n(x) < r \quad \text{et} \quad p_n(y) < r$$

on a

$$p_n((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)p_n(x) + \lambda p_n(y) < r$$

pour λ dans $[0, 1]$.

Séparation et métrisabilité. Un elcm est séparé si et seulement si $p_n(x) = 0$ pour tout x implique $x = 0$.

Nous n'avons pas imposé la séparation dans la définition que nous avons donnée parce que ce serait une restriction inutile et éventuellement gênante. Le petit inconvénient est que notre terminologie est un peu trompeuse. Elle ne renvoie pas à une distance, mais un écart, défini de façon semblable à une distance, mais sans la propriété de séparation.

Maintenant si E est un elcm défini par une suite (p_n) de semi-normes, l'ensemble des x pour lesquels $p_n(x) = 0$ pour tout n est un sous-espace vectoriel fermé et le quotient de E par ce sous-espace est séparé.

Proposition. Avec la définition donnée en début, la topologie d'un elcm peut être définie par un écart, qui sera une distance s'il est séparé.

Il s'agit de construire un écart qui définira les mêmes parties ouvertes, ou les mêmes voisinages pour chaque point. En fait nous construirons un écart invariant par translation, de sorte qu'il suffira de vérifier qu'il conduit aux mêmes voisinages de zéro.

Il y a une quantité de formules possibles et chaque ouvrage propose la sienne. Le plus simple, pour les vérifications, est de considérer l'écart $d(x, y) = p(x - y)$ où

$$p(x) = \sup_n \min(2^{-n}, p_n(x))$$

et où le rôle de 2^{-n} est juste celui d'être une suite tendant vers 0, qu'il est plus commode de supposer décroissante. En effet, dès que $r < 1$, la partie définie par

$$p(x) \leq r$$

coïncide avec la semi-boule fermée

$$p_n(x) \leq r$$

où n est le dernier rang pour lequel $2^{-n} > r$.

Les seules vérifications à faire sont celles des propriétés d'un écart. La symétrie étant évidente, il n'y a que l'inégalité triangulaire pour laquelle il faut établir

$$\min(2^{-n}, p_n(x + y)) \leq \min(2^{-n}, p_n(x)) + \min(2^{-n}, p_n(y))$$

avant de passer à la borne supérieure. C'est l'objet d'un exercice.

Isomorphismes. Un isomorphisme d'elcm est une application linéaire continue qui admet un inverse du même type, en particulier continu.

Avec deux suites distinctes de semi-normes sur un même espace vectoriel E , il est très possible que l'application identique soit un isomorphisme de E muni de l'une vers E muni de l'autre. Cela équivaut au fait que les deux suites définissent la même topologie. On dira éventuellement que l'on a deux suites équivalentes.

Remarque. Beaucoup de gens n'aiment pas ces isomorphismes non triviaux au-dessus d'une application identique; pour cette raison ils commencent par définir une structure comme une classe de suites équivalentes. Cependant on ne peut raisonnablement introduire cette équivalence que lorsqu'on a défini les morphismes que sont les applications linéaires continues, pour déterminer les isomorphismes.

Produit d'une suite d'espaces normés. Dans le cadre des espaces normés, ou plutôt des espaces normables qui sont les espaces vectoriels réels ou complexes munis d'une topologie qui peut être définie par une norme, on ne dispose pas de produits infinis, en particulier du produit d'une suite.

Etant donnée une suite d'espaces normés E_n , leur produit, dans le cadre des elcm, est donné par le produit E des espaces vectoriels et la suite de semi-normes

$$p_n(x) = \|x_n\|$$

où $\|x_n\|$ est la norme de la projection x_n de x dans E_n , suite qu'il reste à rendre croissante suivant le schéma que nous avons indiqué. En effet on a l'énoncé suivant.

Proposition. Les projections $E \rightarrow E_n$ sont continues. De plus, pour qu'une application linéaire u d'un espace vectoriel localement convexe métrisable F dans E soit continue il suffit (et il faut) que chacune de ses projections f_n le soit.

Les vérifications sont immédiates. De plus le produit est séparé.

On remarquera qu'un elcm E s'identifie à un sous-espace du produit des espaces (E, p_n) obtenus en munissant E d'une seule des semi-normes.

Remarque. Dans la catégorie des espaces normés au sens strict, pour laquelle les morphismes sont de norme ≤ 1 , ce qui fait que les isomorphismes sont les isométries, il existe des produits infinis quelconques. Cependant les produits infinis n'ont pas le produit des espaces vectoriels pour espace sous-jacent, mais seulement le sous-espace des familles pour lesquelles la famille des normes est bornée.

Un elcm séparé s'identifie à un sous-espace du produit des espaces normés obtenus en séparant l'espace (E, p_n) , i.e. en prenant son quotient par le sous-espace vectoriel fermé défini par $p_n(x) = 0$.

Complétion; espaces de Fréchet.

Un elcm séparé et complet est appelé **espace de Fréchet**.

On notera que, dans le cas vectoriel, la complétion est une notion topologique. En effet une application linéaire continue est uniformément continue et elle transforme les suites de Cauchy en suites de Cauchy.

Un espace de Fréchet s'identifie à un sous-espace fermé du produit des espaces normés complets obtenus en prenant le complété séparé (E, \hat{p}_n) de l'espace (E, p_n) .

L'espace $\mathcal{C}(U)$ des fonctions numériques continues sur un ouvert U de \mathbf{R}^n , pour la convergence compacte, et l'espace $\mathcal{C}^\infty([a, b])$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $[a, b]$, pour la convergence uniforme de toutes les dérivées, sont des espaces de Fréchet quand on y considère les semi-normes données en début.

Un énoncé utile pour ces espaces est le suivant. Il permet notamment de rattraper une définition mal posée et c'est la raison pour laquelle l'invoque souvent.

Théorème (Banach-Steinhaus). Soit (u_n) une suite d'applications linéaires continues d'un espace de Fréchet E dans un elcm F qui converge simplement sur E .

Alors la suite est équicontinue et sa limite est linéaire continue.

Voir la démonstration en exercice.

Elcm de Schwartz.

Un elcm E est dit de Schwartz si les applications identiques

$$(E, p_{n+1}) \rightarrow (E, p_n)$$

sont précompactes, i.e. si l'image de la boule unité est précompacte.

L'espace $\mathcal{C}^\infty[a, b]$ vérifie cette propriété. C'est donc un espace de Fréchet-Schwartz. Il suffit pour cela de savoir que l'application identique

$$\mathcal{C}^{n+1}[a, b] \rightarrow \mathcal{C}^n[a, b]$$

est compacte, ce qui résulte du théorème d'Ascoli.

Un autre exemple d'espace de Fréchet-Schwartz est l'espace $\mathcal{O}(U)$, sous-espace de $\mathcal{C}(U)$ des fonctions holomorphes sur une partie ouverte U de \mathbf{C} .

Parties bornées; espaces de Fréchet-Montel.

Dans un elcm, une partie B est dite **bornée** si chaque semi-norme p_n est bornée sur A .

Toute application linéaire continue transforme une partie bornée en une partie bornée. En particulier la notion de partie bornée ne dépend que de la topologie. En fait B est bornée si pour tout voisinage V de 0 il existe un scalaire λ tel que B soit inclus dans λV ; on dit que B est absorbée par les voisinages de 0.

Un espace de Fréchet-Schwartz a la propriété suivante, qui en fait un espace de Fréchet-Montel : *toute partie bornée est relativement compacte*.

Soit en effet B une partie bornée de l'espace de Fréchet-Schwartz E . Ce dernier s'identifie à un sous-espace fermé du produit des espaces (E, \hat{p}_n) . Soit B_n l'image de B dans (E, \hat{p}_n) . Elle est incluse dans l'image de B_{n+1} par l'application précompacte $(E, p_{n+1}) \rightarrow (E, \hat{p}_n)$. elle est donc incluse dans une partie précompacte, donc compacte K_n . Finalement B s'identifie à une partie du produit des K_n , qui est un espace compact par Tychonoff. Son adhérence est compacte.

Les parties bornées de $\mathcal{O}(U)$ sont les parties bornées sur tout compact. On parle encore de parties *normales* au sens de Montel. De toute suite normale, on peut extraire une suite qui converge uniformément sur tout compact.

Dual d'un elcm.

L'espace dual E' d'un elcm E est l'espace des formes linéaires continues sur E . Ce n'est pas une topologie qui s'impose naturellement sur E , ce n'est pas la notion de partie ouverte ou de voisinage de zéro, c'est la notion de *partie bornée*.

Précisément les parties bornées du dual E' sont simplement définies comme les parties équicontinues. Ce sont les parties B' pour lesquelles on peut trouver un rang n et un nombre $C \geq 0$ tels que

$$|x'(x)| \leq Cp_n(x)$$

pour toute x' dans B' et tout x dans E . En particulier les parties équicontinues sont bornées en chaque point; si l'on préfère les applications $x' \mapsto x'(a)$ sont bornées pour a fixé.

On y associe une notion de convergence pour les suites : une suite x'_k de E' converge vers 0 (resp. est de Cauchy) **au sens de Mackey** si l'on peut trouver une partie bornée B' de E' et une suite (ϵ_k) de nombres positifs tendant vers 0 telle que x'_k (resp. $x'_{k+l} - x'_k$ pour tout l) soit dans $\epsilon_k B'$. On vérifie facilement une propriété de complétion : toute suite de Cauchy converge.

Ainsi $x'_k \rightarrow 0$ au sens de Mackey si $x'_k = \epsilon_k y'_k$ où $\epsilon_k \rightarrow 0$ dans \mathbf{R}_+ et où y'_k reste bornée dans E' .

Clairement ne suite x'_k de E' qui converge au sens de Mackey converge simplement sur E . Maintenant la réciproque est vraie si E est un espace de Fréchet-Schwartz. Soit en effet (u_k) une suite de E' qui converge simplement sur E . D'abord, par Banach-Steinhaus, la suite (u_k) est équicontinue. Ensuite sa limite est linéaire continue, de sorte qu'on peut se ramener au cas où elle est nulle. L'équicontinuité signifie qu'il existe un ordre n et une constante C tels que

$$|u_n(x)| \leq Cp_n(x)$$

pour tout k . Maintenant la partie K de E définie par $p_{n+1}(f) \leq 1$ est précompacte dans l'espace E semi-normé par p_n , comme cela résulte du théorème d'Ascoli suivant.

Soient K, M des espaces munis d'écart, l'espace K étant précompact. Une partie H d'applications de K dans M est précompacte pour l'écart de la convergence uniforme dès

- qu'elle est uniformément équicontinue
- et qu'en chaque point de K les valeurs sont incluses dans une partie précompacte.

On l'établit en complétant M , puis K qui devient compact, ce qui ramène au théorème usuel.

Reprenons. La suite uniformément équicontinue (u_k) qui converge simplement vers 0 sur K y converge uniformément vers 0. Si B' est la partie bornée de E' définie par $|u(f)| \leq 1$ sur K et si ϵ_k est la norme uniforme de u_k sur K , alors u_k est dans $\epsilon_k B'$.

Distributions.

Soit U une partie ouverte de \mathbf{R}^d . Pour toute partie compacte K on note \mathcal{D}_K l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support dans K ; ce dernier est muni d'une suite croissante de semi-normes d'une façon analogue à $\mathcal{C}^\infty[a, b]$; cela en fait un elcm. On note \mathcal{D} l'espace vectoriel réunion des \mathcal{D}_K , une suite (ϕ_k) de \mathcal{D} est dite convergente si elle l'est dans l'un des \mathcal{D}_K .

Une distribution T sur U est une forme linéaire sur \mathcal{D} qui induit sur chaque \mathcal{D}_K une forme linéaire continue, donc un élément de l'espace dual. Il revient au même de dire que $T(\phi_k) \rightarrow T(\phi)$ chaque fois que $\phi_k \rightarrow \phi$ dans \mathcal{D} .

Une suite (T_k) de distribution converge (resp. est de Cauchy) si la suite induite sur chaque \mathcal{D}_K l'est au sens de Mackey. On a une propriété de complétion facile : toute suite de Cauchy de distributions converge.

On montre encore, par exemple, que si $T_k \rightarrow T$ et $\phi_k \rightarrow \phi$ alors $T_k(\phi_k) \rightarrow T(\phi)$. En effet la convergence $\phi_k \rightarrow \phi$ a lieu dans un \mathcal{D}_K . On écrit

$$T_k(\phi_k) - T(\phi) = (T_k(\phi_k) - T_k(\phi)) + (T_k(\phi) - T(\phi))$$

où la première parenthèse tend vers zéro par l'équicontinuité de la suite T_k dans le dual de \mathcal{D}_K et la seconde par la convergence de T_k vers T .

Maintenant on peut caractériser autrement la convergence d'une suite de distributions, et montrer qu'elle équivaut à la convergence simple sur \mathcal{D} . Comme tout se passe avec les \mathcal{D}_K , c'est ce qu'on a vu dans la section précédente.

Petit bilan.

Comme elcm à part entière nous n'avons guère que l'espace de Fréchet-Schwartz-Montel $\mathcal{O}(U)$. On se sert notamment de la compacité forte dans cet espace pour établir le théorème de représentation conforme de Riemann.

Un espace comme $\mathcal{C}^\infty([a, b])$, qui est également du type ci-dessus, est moins important pour lui-même. Il intervient implicitement dans un espace comme $\mathcal{C}^\infty(U) = \mathcal{E}(U)$, lequel est juste un peu plus complexe à décrire. Cependant il intervient principalement, comme on l'a vu, au travers des \mathcal{D}_K , par leurs duals, lesquelles conduisent aux distributions. Or le dual de \mathcal{D}_K n'est pas naturellement un elcm; c'est la notion de partie bornée qui y domine.

Nous n'avons pas parlé de l'espace \mathcal{S} . C'est aussi un elcm. Cependant l'espace \mathcal{S} n'est qu'un intermédiaire pour accéder à son dual \mathcal{S}' qui est l'espace des distributions tempérées. Et ce dual n'est pas naturellement un elcm non plus.

Il reste à dire un mot des convergences faibles. La convergence faible est naturellement définie par des semi-normes. Cependant elle n'est pas globalement métrisable en dimension infinie. On sort donc du cadre des elcm.

Note de fin de chapitre.

Le thème de ce chapitre est inspiré par l'appendice C du *cours d'analyse* à l'École polytechnique de Jean-Michel Bony. On trouvera cependant un certain nombre de différences.

D'abord nous ne supposons pas les espaces séparés a priori. Il est très peu naturel d'imposer une condition de séparation, car les elcm sont construits à partir d'espaces (E, p_n) qui sont eux-mêmes semi-normés et non normés en général. Evidemment il devient un peu abusif de conserver dans ces conditions le qualificatif métrisable, ce qu'on a choisi, malgré tout, de faire.

Surtout nous avons changé radicalement l'ordre d'exposition pour réduire au minimum ce qu'il faut vérifier et pour éviter de donner des définitions reposant sur des choix non canoniques, ce qui se passe lorsqu'on met en avant une métrique, avec l'obligation de corriger le tir après coup.

Pour finir, nous essayons de montrer, à propos de l'application aux distributions, qu'il y a d'une part une notion naturelle de convergence, qu'il y a d'autre part une notion pratique à utiliser, que l'une et l'autre donnent le même résultat, mais que confondre ce qui est naturel et ce qui est pratique n'est pas la meilleure façon d'éclairer le sujet. Nous avons repris l'exemple de la forme bilinéaire $T(\phi)$ sur $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}$; nous aurions pu y ajouter celui de ϕT sur $\mathcal{E} \times \mathcal{D}'$ ou de $T * U$ sur les paires de distributions convolables.